מבוא לאנליזה פונקציונלית – תרגיל 3

נא להגיש את הפתרון בפורמט pdf עד ה- 10 למאי (עד שעה לפני חצות) בקישור הבא:
https://www.dropbox.com/request/oBPpGbXMZubNa9ICGTkb

1. היזכרו בהגדרת הנגזרת של דיסטריבוציה מתונה, והוכיחו כי $\log|x|$ היא דיסטריבוציה מתונה שנגזרתה $F = p.v.(1/x)$ המוגדרת על ידי

$$F(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

עבור פונקציית בוחן φ.

2. נתונים מרחבים מטרים קומפקטים X_1 ו- X_2. הוכיחו כי $C(X_1)$ איזומטרי ל- $C(X_2)$ אם ורק אם X_1 הומאומורפי ל- X_2. (רמז: לאן איזומטריה מעבירה נקודות קיצוניות של כדור היחידה של הדואלי?).

3. הוכיחו שבכל אלגברת בנך, ההעתקה $x \mapsto x^{-1}$, המוגדרת בקבוצה הפתוחה של האיברים ההפיכים, היא העתקה רציפה.

4. נביט באלגברת בנך $A = L^1([0,1]) \oplus \{\lambda e; \lambda \in \mathbb{C}\}$ עם קונבולוציה:

$$(x * y)(t) = \int_0^t x(s)y(t-s) \qquad\qquad \forall x, y \in L^1([0,1]).$$

הסבירו כיצד מוגדר הכפל על האלגברה במלואה, והוכיחו שכל איברי $L^1([0,1])$ נילפוטנטים מוכללים. הסיקו שלכל $\lambda \in \mathbb{C}, f, k \in L^1([0,1])$ קיים פתרון $u \in L^1([0,1])$ למשוואה

$$u + \lambda k * u = f$$

5. נביט באלגברת בנך $A = L^1(\mathbb{R}) \oplus \{\lambda e; \lambda \in \mathbb{C}\}$ עם קונבולוציה. יהי $\chi : A \to \mathbb{C}$ הומומורפיזם של אלגבראות שלא מתאפס על $L^1(\mathbb{R})$. הוכיחו כי קיים $\xi \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\chi(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\cdot x} f(x) dx.$$

6. עבור פונקציה רציפה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ו- $\tau \in \mathbb{R}$ נסמן $f_\tau(t) = f(t-\tau)$. נסמן ב- AP את אוסף כל הפונקציות הרציפות f כך שאוסף ההזזות

$$T(f) = \{f_\tau\, ;\, \tau \in \mathbb{R}\}$$

הוא קבוצה פרהקומפקטית ב- $C(\mathbb{R})$ ביחס לנורמת סופרמום. (קבוצה במרחב מטרי נקראת פרהקומפקט אם לכל $\varepsilon > 0$, ניתן לכסותה על ידי מספר סופי של כדורים ברדיוס $\varepsilon > 0$).

(א) הראו כי AP מכיל את כל הפונקציות המחזוריות הרציפות.

(ב) הוכיחו כי AP סגור להתכנסות במידה שווה, ושכל הפונקציות בו רציפות במידה שווה.

(ג) הוכיחו כי AP הוא מרחב לינארי הסגור לכפל נקודתי.
(רמז: בהינתן שני כיסויים של $T(f)$ ושל $T(g)$ על ידי מספר סופי של כדורים קטנים, איך מייצרים כיסוי של $T(f+g)$?)

(ד) הוכיחו כי AP הוא אלגברת C^* קומוטטיבית, ביחס לכפל נקודתי ונורמת סופרימום.

(ה) לקומפקט $\sigma(AP)$ קוראים קומפקטיפיקצית Bohr של הממשיים. הוכיחו שאכן יש שיכון קנוני של $\mathbb{R}$ ב- $\sigma(AP)$, שתמונתו צפופה.
(רמז: כדי להראות צפיפות של תת קבוצה, הוכיחו שכל פונקציה רציפה שמתאפסת על תת הקבוצה, היא אפס זהותית).

(ו) הראו שאפשר להרחיב את פעולת החיבור של $\mathbb{R}$ ולקבל מבנה של חבורה אבלית על הקומפקט $\sigma(AP)$, כך שהחיבור והנגדי הן פעולות רציפות.

(ז) (סעיף רשות, אולי רק למי שמכיר את מידת Haar על חבורה אבלית קומפקטית) הוכיחו את משפט פון נוימן: לכל $f \in AP$, הסגוֹר ב - $C(\mathbb{R})$ של הקמוֹר של $T(f)$ מכיל בדיוק פונקציה קבועה אחת.