טופולוגיה - תרגיל בית מס' 4:

1. יהיו X,Y - מ"ט, ויהי $C(X,Y)=\{f:X\to Y \mid f\text{-רציפה}\}$
לכל $K\subset X$ קומפקטית ו- $U\subset Y$ פתוחה נגדיר:
$V(K,U)=\{f\in C(X,Y) \mid f(K)\subset U\}$.

(א) הוכיחו כי האוסף $\{V(K,U) \mid K\subset X \text{ קומפ'},\ U\subset Y \text{ פתוחה}\}$ הוא תת-בסיס לטופולוגיה על $C(X,Y)$.

(ב) הוכיחו כי אם X קומפקטי מקומית אז שתי פונקציות $f,g\in C(X,Y)$ הן באותו רכיב קשירות מסילתית אם ורק אם קיימת $H:[0,1]\times X\to Y$ רציפה עבורה $H(0,x)=f(x),\ H(1,x)=g(x)$ לכל $x\in X$.

2. הוכיחו כי אם $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ מרחבים טופולוגיים ספרביליים אז $\prod_{\alpha\in\mathbb{N}} X_\alpha$ ספרבילי.

3. הוכיחו כי $S^1\times S^1$ הומאומורפי ל- $\mathbb{T}^2$.

4. הוכיחו כי $S^n\times(0,\infty)$ הומאומורפי ל- $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

5. הוכיחו כי אם $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ - מ"ט רגולריים אז $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ רגולרי.

6. הוכיחו כי אם $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ - מ"ט C_1 (C_2) אז $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ הוא C_1 (C_2).

7. הוכיחו כי אם X קומפקטי מקומית והאוסדורף אזי X פתוח ב- βX כאשר βX הוא קומפקטיפיקציית סטון צ'ך שהוגדרה בשיעור.

8. הוכיחו כי טופולוגיית הגבול התחתון (זו הנוצרת ע"י הקטעים מהצורה $[a,b)$) היא מעדנת הרגילה.

(9) אם X מ"ט האוסדורף, הוכיחו כי קומפקטיפיקציית אלכסנדרוף (קומפקטיפיקציית נקודה) היא אכן טופולוגיה.

(10) בכיתה הוגדר גבול בנך של סדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ ביחס לאולטר $\ell \in \beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. $(a_1,a_2,\dots) \mapsto \hat{a}(\ell)$

(א) הוכיחו כי אם $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ מתכנסת אז $\hat{a}(\ell) = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(ב) הוכיחו כי $\hat{a}(\ell)$ הוא מונוטוני ולינארי בסדרה.

Scanned by CamScanner