מבוא לאנליזה פונקציונלית – תרגיל 4

יש לפתור לפחות 6 מהשאלות שבדף התרגיל.

נא להגיש את הפתרון בפורמט pdf עד ה- 31 למאי (עד שעה לפני חצות) בקישור הבא:
https://www.dropbox.com/request/fRYbrJh9hoFRjNL8c4i4

1. יהי H מרחב הילברט ספרבילי, ו- T אופרטור לינארי מוגדר בצפיפות ב- H. נתון ש- T צמוד לעצמו בעיקרו (essentially self-adjoint). הוכיחו כי ל- T יש הרחבה צ"ע יחידה.

2. יהי H מרחב הילברט ספרבילי, ו- T אופרטור לינארי מוגדר בצפיפות ב- H.

   (א) הוכיחו כי אם T צמוד לעצמו וחח"ע, אז $T^{-1} : Image(T) \to Dom(T)$ צמוד לעצמו.

   (ב) הוכיחו כי אם T סימטרי ועל, אז הוא צמוד לעצמו.

3. יהי H מרחב הילברט ספרבילי, ו- T אופרטור סגור וסימטרי, מוגדר בצפיפות ב- H.

   (א) הראו כי המכפלה הפנימית $\langle x, y\rangle^* = \langle x, y\rangle + \langle T^*x, T^*y\rangle$ משרה מבנה של מרחב הילברט על $Dom(T^*)$.
   (רמז: מה הקשר לגרף של T^* ולמכפלה הפנימית ב- $H \oplus H$?)

   (ב) נניח כי $y \in Dom(T^*)$ מאונך לתת המרחב $Dom(T)$ ביחס ל- $\langle\cdot,\cdot\rangle^*$. הראו כי $T^*v \in Dom(T^*)$ ובנוסף $(T^*)^2v = -v$.

   (ג) נסמן $E^\pm = Image(T \pm i)^\perp = ker(T^* \mp i)$. הראו כי

$$Dom(T^*) \supseteq Dom(T) + E^+ + E^-$$

   (ד) הראו כי $Dom(T^*) = Dom(T) + E^+ + E^-$. (רמז: אם $v \in Dom(T^*)$ מאונך לאגף ימין ביחס ל- $\langle\cdot,\cdot\rangle^*$ אז $(T^* - i)(T^* + i)v = 0$. עתה, הראו כי $(T^* + i)v$ מאונך ל- $ker(T^* - i)$ ביחס לאותה מ"פ)

4. נביט באופרטור $Tf = f''$ ב- $H = L^2([0, 1])$ עם $Dom(T) = C_c^\infty(0, 1)$ (פונקציות חלקות עם תומך קומפקטי בקטע הפתוח $(0, 1)$).

   (א) הראו כי T סימטרי ואינדקסי הדפקט שלו הם $(2, 2)$.

   (ב) תארו הרחבה של T שהיא צ"ע בעיקרה.

5. תהי $w : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ פונקציה חלקה וחיובית, ונסמן $d\mu(x) = w(x)dx$. נביט באופרטור המוגדר בצפיפות ב- $L^2(\mu)$ עם $Dom(L) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (פונקציות חלקות עם תומך קומפקטי) ו-

$$Lf = \Delta f + \langle\nabla \log w, \nabla f\rangle \qquad \forall f \in Dom(L)$$

(א) הראו כי L אופרטור סימטרי ב- $L^2(\mu)$. (למעשה הוא צ"ע בעיקרו)

(ב) הראו כי לכל $f \in Dom(L)$ ו- $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(Lf)(x) = c_n \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^2 \mu(B(x,\varepsilon))} \int_{B(x,\varepsilon)} [f(y) - f(x)] \cdot \sqrt{\frac{w(x)}{w(y)}} d\mu(y)$$

כאשר $B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \,;\, |y-x| < \varepsilon\}$ ו- c_n קבוע מפורש שתלוי רק ב- n.

(ג) הראו כי L שקול אוניטרית לאופרטור A המוגדר בצפיפות ב- $L^2(\mathbb{R}^n)$ ע"י

$$Af = \Delta f - \frac{\Delta \sqrt{w}}{\sqrt{w}} \cdot f$$

עם $Dom(A) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(רמז: השקילות האוניטרית $U : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mu)$ היא $Uf = f/\sqrt{w}$).

6. יהי H מרחב הילברט ספרבילי ו- A אופרטור מוגדר בצפיפות ב- H וצמוד לעצמו. נתון אופרטור סימטרי $B : Dom(A) \to H$ שמקיים

$$\|Bx\| \le c_1 \|Ax\| + c_2 \|x\| \qquad\qquad \forall x \in Dom(A)$$

עבור קבועים $c_1 \in (0,1), c_2 > 0$.

(א) השתמשו במשפט הספקטרלי עבור A, והוכיחו שעבור $n > 0$ מספיק גדול

$$\|BR_{ni}(A)\| < 1$$

בנורמת אופרטור, כאשר $R_z(A) = (z - A)^{-1}$.

(רמז: $\|BR_{ni}(A)x\| \le c_1 \|AR_{ni}(A)x\| + c_2 \|R_{ni}(A)x\|$. מה הנורמה של $AR_{ni}(A)$?)

(ב) הוכיחו את הזהות $A + B - z = (1 + BR_z(A))(A - z)$.

(ג) הסיקו שעבור $n > 0$ מספיק גדול, $A + B \pm ni : Dom(A) \to H$ חח"ע ועל.

(ד) הראו כי $A + B$ צ"ע.

7. יהי H מרחב הילברט ספרבילי ו- A אופרטור מוגדר בצפיפות ב- H וצמוד לעצמו. נקודה $\lambda \in \sigma(A)$ שייכת לספקטרום העיקרי (essential spectrum) אם אינה ע"ע מריבוי סופי.

(א) השתמשו במשפט הספקטרלי והוכיחו את קריטריון Weyl: מספר $\lambda \in \mathbb{C}$ שייך לספקטרום העיקרי אם ורק אם יש ב- H סדרה אורתונורמלית $f_1, f_2, \ldots$ כך ש-

$$(A - \lambda) f_n \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

(ב) הסיקו שאם K צ"ע וקומפקטי, הספקטרום העיקרי של $A + K$ זהה לזה של A.