חדו"א 1 - תרגיל 5

7 בדצמבר 2008

1. חשב את הגבולות הבאים:

(א) $a_n = \frac{a^n}{p(n)}$, כאשר $a > 1$, ו $p(n)$ פולינום כלשהו המקיים $\forall n, p(n) > 0$.

(ב) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, כאשר $a > b > 0$.

(ג) $a_n = \frac{1 \cdot sin1 + 2 \cdot sin2 + \cdots + nsinn}{n^3}$

(ד) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}$

(ה) $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$

(ו) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

2. תיהי a_n סידרה חיובית, $\forall n, a_n > 0$, ונתון כי קיים הגבול של a_n במובן הרחב נסמנו $\lim a_n = a$.

(א) הוכח כי עבור b_n המוגדרת כך: $b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ גם כן קיים הגבול במובן הרחב והוא $\lim b_n = a$. רמז: השתמש באי־שיוויון ממוצעים ובכך שהממוצע החשבוני מתכנס לאותו גבול כמו a_n.

(ב) השתמש בסעיף הקודם כדי להוכיח כי אם מתקיים: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ אז קיים גם $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$.
חשבו בעזרת זה את הגבולות הבאים:

(ג) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

(ד) $a_n = \frac{n!}{A^n}$, כאשר $A > 1$.

(ה) $a_n = \sqrt[n]{p(n)}$, כאשר הוא פולינום שעבורו השורש מוגדר.

(ו) $a_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$.

3. הוכח:

(א) נתונה סידרה a_n שמתכנסת ל $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ וסידרה חיובית $b_k > 0$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} b_k = +\infty$. הוכח כי קיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{k=n} b_k a_k}{\sum_{k=1}^{k=n} b_k} = a$$

רמז: הזכר איך הוכחנו במקרה של ממוצע חשבוני פשוט.

(ב) <u>הלמה של שטולץ</u>: תיהיה y_n סדרה <u>עולה</u> כך ש $y_n \to \infty$ אזי אם קיים הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L$$

אזי קיים גם הגבול $\lim \frac{x_n}{y_n} = L$.

<u>רמז</u>: השתמש בסעיף הקודם אחרי שתגדיר: $b_k = y_{n+1}-y_n$ ו $a_n = \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

השתמש בלמה כדי לחשב:

(ג) $a_n = \frac{\lfloor 1^2\alpha \rfloor + \lfloor 2^2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n^2\alpha \rfloor}{n^3}$

4. הוכח או הפרך:

(א) אם $\lim \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$ אז בהכרח $\lim a_n = a$.

(ב) אם $\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a$ אז בהכרח $\lim a_n = a$.

(ג) אם $\lim \sqrt[n]{a_n} = a$ אז בהכרח $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$.

(ד) לכל סדרה לא חסומה קיים גבול במובן הרחב.

(ה) כל סדרה שקיים לה גבול סופי היא חסומה.

5. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות:

(א) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 4\cdots(2n)}$

(ב) $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$

6. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולן:

(א) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = a_n(2-a_n)$

(ב) $a_1 = \frac{3}{2},\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$

(ג) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)}$

7. הוכיחו שאם a_n מתכנסת אז עפ"י קריטריון קושי מתקיים: $\lim(a_{2n}-a_n) = 0$.

8. הוכח או הפרך:

(א) a_n מקיימת $\lim(a_{n+1}-a_n) = 0$ אז a_n סדרת קושי.

(ב) a_n מקיימת $\lim(a_{2n}-a_n) = 0$ אז a_n סדרת קושי.

(ג) a_n מקיימת לכל n : $|a_{n+1}-a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ אז היא סדרת קושי.

(ד) a_n מקיימת לכל n : $|a_{n+1}-a_n| < \frac{9}{10}|a_n - a_{n-1}|$ אז היא סדרת קושי.

9. הוכיחו כי הסדרות הבאות <u>אינן</u> מתכנסות לגבול סופי:

(א) $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)}$

(ב) $a_1 > 0,\ a_{n+1} = 3 \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$