חדו"א 2 - תרגיל מס' 5

1. חשבו את אורך המסילות הבאות:

(א) $\gamma(t) = (t, \ln(\cos t))$, $\gamma : [0, \frac{\pi}{6}] \to \mathbb{R}^2$

(ב) $\gamma(t) = ((1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t)$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$.

(ג) $\gamma(t) = \left(e^{\sqrt{t+5}}, e^{\sqrt{t+5}}\right)$, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

2. תהא f פונקציה רציפה. הוכיחו ש-

$$\int_0^x \left[\int_0^t f(u)du\right] dt = \int_0^x f(u)(x-u)du.$$

3. חשבו את שטח התחומים החסומים ע"י העקומות הבאות:

(א) $y = x^2/4$ ו- $y = 8/(4+x^2)$.

(ב) $y^2 = 2x$ ו- $x^2 + y^2 = 8$ (חשבו את שטח שני התחומים המתקבלים).

4. עבור $a > 0$ נסמן $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$. פונקציה זו נקראת פונקציית גמה.

(א) הוכיחו שהאינטגרל מתכנס לכל $a > 0$ ושמתקיים $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

(ב) הסיקו ש- $\Gamma(n) = (n-1)!$ לכל n טבעי.

(ג) חשבו את $\Gamma(1/2), \Gamma(3/2)$ בהסתמך על האינטגרל הגאוסי.

(ד) תנו הוכחה של שורה אחת ש- $n! \geq (n/e)^n$ לכל $n \geq 1$.

(רמז: לחסום מלמטה את $\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}$ באמצעות האינטגרל החל מ- n, ולהשתמש בכך ש- $t^n \geq n^n$ בתחום החדש).

5. תהי $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה וחיובית.

(א) נניח ש- $\lim\limits_{x\to\infty} (\log f)'(x)$ קיים ושלילי. הוכיחו ש- $\int_0^\infty f$ מתכנס.

(ב) נניח ש- $\int_0^\infty f$ מתכנס וש- f' חסומה. הוכיחו ש- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

6. תהי $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ עקומה גזירה ברציפות.

(א) הוכיחו שאורך העקומה הוא לפחות $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ כאשר $\gamma(a) = (x_1, y_1), \gamma(b) = (x_2, y_2)$.

(ב) אורך העקומה לא תלוי בפרמטריזציה: תהי $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ פונקציה עולה וגזירה ברציפות. נסמן $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$. הוכיחו שאורך $\tilde{\gamma}$ שווה לאורך γ.

7. תזכורת מחדו"א 1: חקרו את התכנסות הטורים הבאים:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]\log n\ ; \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{a}{n}\right]\ ;$$
$$\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{x\sin x dx}{x^3+1}\ ; \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty}a^{h_n}, \quad h_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n};$$
$$\text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ ; \quad \text{(f)} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}\ ; \quad \text{(g)} \sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$$

8. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים. אומרים שהמכפלה האינסופית $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסת, אם קיים $P\neq 0$ כך שסדרת המכפלות החלקיות $P_n:=\prod_{k=1}^{n}a_k$ מתכנסת ל־ P. אם $P_n\to 0$ אומרים שהמכפלה מתבדרת לאפס. הוכיחו:

(א) אם המכפלה $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסת, אז $a_n\to 1$.

(ב) אם $a_n>0$ לכל n, אז $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסת או"א הטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln a_n$ מתכנס.

(ג) אם $a_n=1+c_n\geq 1$, אזי $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסת או"א הטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ מתכנס.

9. הוכיחו את אי־שיוויון ינסן: לכל פונקציה קמורה וגזירה f, ולכל פונקציה רציפה g,

$$f\left(\int_0^1 g(x)dx\right)\leq\int_0^1 f(g(x))dx$$

(רמז: נסמן $c=\int_0^1 g(x)dx$. אזי $f(t)\geq f(c)+f'(c)(t-c)$.)

10. חשבו את הגבולות של סדרות הפונקציות הבאות. באילו מקרים ההתכנסות היא במידה שווה?

(א) $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$ ב־ $[0,\infty)$.

(ב) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ב־ $[0,1]$.

(ג) $f_n(x)=\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n$ ב־ (i) כל $\mathbb{R}$, (ii) הקטע $[-A,A]$ עבור $A>0$.