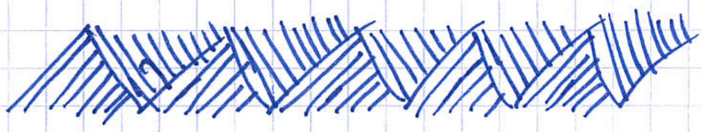
טופולוגיה - תרגיל בית מס' 6:

1. יהיו $h,k: X\to Y$ רציפות, $k(x_0)=y_1$, $h(x_0)=y_0$. אם k ו-h הומוטופיות הראו שיש מסילה α ב-Y מ-y_0 ל-y_1 כך ש $k_*=\hat{\alpha}\circ h_*$.

2. הראו כי אם $x\in X$ הוא עיווי נסג של X אז לכל סביבה U של x יש סביבה $V\subset U$ של x כך שההכלה $V\hookrightarrow U$ הומוטופית ל-0.

3. (א) יהי X תת-מרחב של $\mathbb{R}^2$ שמורכב מהקטע האופקי $[0,1]\times\{0\}$ יחד עם הקטעים האנכיים $\{r\}\times[0,1-r]$ עבור $r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$. הראו כי כל נק' ב-$[0,1]\times\{0\}$ היא עיווי נסג של X, אבל כל נק' אחרת הוא לא. 

(ב) יהי Y תת-המרחב של $\mathbb{R}^2$ שהוא האיחוד של אינסוף עותקים של X שמסודרים באופן הבא



4. חשבו $\pi_1(K)$ כאשר K הוא בקבוק קליין.

5. הראו כי אם $p_1: \tilde{X}_1\to X_1$ ו- $p_2: \tilde{X}_2\to X_2$ מרחבי כיסוי אז $p_1\times p_2: \tilde{X}_1\times\tilde{X}_2\to X_1\times X_2$ מרחב כיסוי!

6. הראו כי אם X קשיר מסילתית ו-$|\pi_1(X)|<\infty$ אז כל העתקה $f: X\to S^1$ הומוטופית להעתקה קבועה.

7. יהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי Y מ"ט. נניח ש $f: X\to Y$ רציפה ניתנת להרחבה רציפה $\tilde{f}: \mathbb{R}^n\to Y$ אז f_* טריוויאלית.

8. תהי $f: D^2 \to \mathbb{R}^2$ רציפה, כך ש $f(0,0) \notin f(S^1)$
וכן ההעתקה $(f|_{S^1})_*: \pi_1(S^1) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$
אינה קבועה. הוכיחו שיש $x \in D^2$ עם $f(x)=0$.

9. יש 10 מסמרים על קיר ויש תמונה שרוצים
לתלות על הקיר. יש לנו חבל מאוד ארוך. האם
ניתן לתלות את התמונה כך שלא תיפול, אבל לכל
מסמר שנוציא התמונה תיפול?

10. מצאו מ"ט X כך ש $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.