חדו"א 1 - תרגיל 6

8 בדצמבר 2008

1. הוכיחו כי אם לסדרה מונוטונית יש תת סדרה מתכנסת אז היא מתכנסת.
2. הוכיחו שאם $\{a_n\}$ סדרה כך ש- $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$, אז קבוצת הגבולות החלקיים שלה הוא קטע.

רמז: הקטע הזה הוא $[\liminf a_n, \limsup a_n]$, וניתן להניח כי הסדרה היא חסומה.

3. נניח שעבור סדרה $\{a_n\}$ מתקיים:
   (א) $a_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 8$, $a_{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 5$. הוכיחו כי קבוצת הגבולות החלקיים של הסדרה היא $\{5, 8\}$.
   (ב) $a_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, $a_{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת. לאן?
4. מצאו $\mathrm{PL}(a_n)$, $\liminf a_n, \limsup a_n$, $\inf\{a_n | \ n \in \mathbb{N}\}$, $\sup\{a_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ עבור הסדרות הבאות:
   (א) $a_n = n^{(-1)^n n}$
   (ב) $a_n = cos^n(\frac{\pi n}{4})$
   (ג) $a_n = (4^{(-1)^n} + 2)^{\frac{1}{n}}$
   (ד) $a_n = \frac{(1-(-1)^n)\cdot 2^n + 1}{2^n + 3}$
   (ה) $a_n = \frac{2n^2}{7} - \lfloor \frac{2n^2}{7} \rfloor$
5. עבור a_n, b_n שתי סדרות חסומות הוכיחו:
   (א) $-\limsup_{n\to\infty}(b_n) = \liminf_{n\to\infty}(-b_n)$
   (ב) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty}(a_n) + \limsup_{n\to\infty}(b_n)$.

   והיעזרו בסעיף קודם כדי לקבל חינם אי שיוויון דומה עבור $\liminf$.
6. הוכיחו את מבחן המנה של ד'אלמבר עבור טורים חיוביים:

   אם עבור טור $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$, עם $a_k > 0$ לכל k, מתקיים $\frac{a_{k+1}}{a_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} q$,

   אז אם $q < 1$, הטור מתכנס, ואם $q > 1$, הטור מתבדר.
7. בדקו את ההתכנסות של הטורים הבאים:

(א) $\Sigma_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(ln(k))^{\alpha}}$ (עבור אילו $\alpha\in\mathbb{R}$ הטור מתכנס ועבור אילו -לא?)

(ב) $\Sigma_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kln(ln(k))}$

(ג) $\Sigma_{k=2}^{\infty}\frac{1}{ln(k!)}$

רמז: השתמשו במבחן של קושי (עם 2^n).

8. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $a_n=(\frac{n}{n+1})^n$

(ב) $a_n=(\frac{n^2+n+1}{n^2+n})^{2n^2+3n}$

(ג) $a_n=\frac{8^n}{(4-\frac{1}{n})^{\frac{3n}{2}}}$

(ד) $a_n=(\frac{\ln(2n)}{\ln(n)})^{\ln(n)}$