<u>חדו"א 1 ־ תרגיל 8</u>

22 בדצמבר 2008

1. הוכח לפי הגדרה כי $f(x)=\sqrt{x}$ פונקציה רציפה בתחום הגדרתה.
2. <u>פונקציה מונוטונית</u>:
   (א) הוכיחו כי לפונקציה מונוטונית **תמיד** קיימים הגבולות החד־צדדיים.
   (ב) הוכיחו כי לפונקציה מונוטונית המוגדרת על קטע פתוח לא יכולה להיות נקודת אי־רציפות סליקה בתוך הקטע.
   (ג) הסיקו מהם סוגי נקודות האי־רציפות האפשריים לפונקציה מונוטונית על קטע.
   (ד) אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ונתון כי f מונוטונית עולה בקטע (a,b) אז f מונוטונית עולה גם ב $[a,b]$.
3. הוכיחו כי פונקציה רציפה, הינה חסומה <u>מקומית</u>. כלומר עבור כל x בו הפונקציה רציפה <u>קיימת</u> סביבה של x שבה f חסומה.
4. חשב את הגבולות הבאים:
   (א) $\lim_{x\to\infty}\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}$
   (ב) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$
   (ג) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\sin x\cdot\sin 2x}$
   (ד) $\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$
5. חקור את הרציפות של הפונקציות הבאות ומיין את סוגי נקודות האי רציפות:
   (א) $f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ \frac{\pi}{2} & x=0\end{cases}$
   (ב) $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x) & x\notin\mathbb{Q}\\ \cos(\pi x) & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$
   (ג) (*) $f(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(\pi x\cdot m!)$. <u>רמז</u>: הפרידו למקרים: x רציונאלי ו x אי־רציונאלי.
6. עבור אילו ערכי a (ו b אם מופיע), הפונקציות הבאות רציפות:

(א) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos x} & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \\ a & x = 0 \end{cases}$

(ב) $\begin{cases} (1+ax)^{\frac{a}{x}} & x > 0 \\ b & x = 0 \\ e(1+e^{\frac{1}{x}}) & x < 0 \end{cases}$

7. תנו דוגמא לפונקציה $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ שהיא:

(א) רציפה אך ורק בנקודה אחת.

(ב) (*) מונוטונית עולה אך איננה רציפה באף קטע.

8. הוכח או הפרך:

(א) אם f רציפה בנקודה x_0 אז גם $|f|$ רציפה ב x_0.

(ב) אם $|f|$ רציפה בנקודה x_0 אז גם f רציפה ב x_0.

9. הוכיחו כי לכל אחת מהמשוואות יש לפחות פיתרון אחד בקטע הנתון:

(א) $x^5 + 3x - 1 = 0$ בקטע $[0,1]$.

(ב) $\tan x = x$ בקטע $(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2})$ עבור כל $k \in \mathbb{Z}$.