

## חדו"א 1 - תרגיל 9

30 בדצמבר 2008

1. בתרגיל הזה נדון בשינוי משתנים בחישוב גבולות:  
נניח כי  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  היא פונקציה כך שבנקודה  $x_0 \in I$  קיים  $L := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .  
הוכיחו כי אם  $X: J \rightarrow I$  היא פונקציה במשתנה  $t$  כך ש-  $\lim_{t \rightarrow t_0} X(t) = x_0$   
אז  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(X(t)) = L$ , בכל אחד מהמקרים הבאים:  
(א) בהנתן ש-  $f$  רציפה ב-  $x_0$ .  
(ב) בהנתן ש-  $X$  מונוטונית בסביבת  $t_0$ .  
(ג) (יותר כללי) בהנתן ש-  $X(t) \neq x_0$  לכל  $t \neq t_0$  בסביבת  $t_0$ .  
למחשבה: התוכלו לנסח תנאי כללי יותר מאלה?
2. נניח כי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה. הוכיחו כי  
(א) אם  $f$  חח"ע בקטע  $[0, 1]$  אז היא מונוטונית ממש בקטע זה.  
(ב) אם  $f$  חח"ע ב-  $\mathbb{R}$  אז היא מונוטונית ממש ב-  $\mathbb{R}$ .  
האם הטענות שבסעיפים מתקיימות בלי דרישת הרציפות?
3. בשיעור ראינו שאם  $f$  רציפה אז תמונת כל קטע זה קטע.  
האם ההיפך נכון? נסו לרקוד עם  $\sin(\frac{1}{x})$ .
4. הוכיחו שאם  $f$  רציפה ב-  $[0, 1]$ , ומונוטונית ממש ב-  $(0, 1)$   
אז היא מונוטונית ממש גם ב-  $[0, 1]$ .
5. הוכיחו שאם  $f$  פונקציה רציפה ושלילית בקטע  $[8, \infty)$ , כך ש-  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -8$   
אז  $-\infty < \sup_{[8, \infty)} f(x) < +\infty$ . ומה אם הקטע היה  $(8, \infty)$  ?
6. הוכיחו שלמשוואות הבאות יש פתרונות:  
(א)  $\cot(x) = x/10, x \in (0, \frac{\pi}{2})$   
(ב)  $f(a) = f(a + \frac{1}{2}), a \in [0, \frac{1}{2}]$   
כש-  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה כך ש-  $f(0) = f(1)$ .
7. האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש? הוכיחו את טענתכם.

(א)  $f(x) = \ln(x)$  בקטע  $(0, 1]$ .

(ב)  $f(x) = \arctan(x)$  ב- $\mathbb{R}$ .

נסו לנסח טענה כללית המתאימה למקרה זה.

(ג)  $f(x) = x^2$  ב- $\mathbb{R}$ .

(ד)  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  ב- $(0, \infty)$ .

(ה)  $f(x) = \sqrt{x}$  ב- $[0, \infty)$ .

8. (תרגיל חשוב למחשבה)

(א) הגדירו את המושגים 'פונקציה  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  היא רציפה (רציפה במ"ש)'

הדרכה: ההגדרות הרגילות, רק לוקחים את כל הנקודות מ- $\mathbb{Q}$ .

(ב) הראו שכל פונקציה  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  שהיא רציפה במ"ש ניתנת להרחבה באופן יחיד

לפונקציה רציפה  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(ג) האם אותו דבר נכון לפונקציה  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  שהיא רק רציפה?

9. (עוד תרגיל חשוב למחשבה)

הוכיחו כי  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה במ"ש בקטע  $(a, b)$

אם ורק אם ניתן להרחיב אותה לפונקציה רציפה על קטע  $[a, b]$ .

הסיקו שפונקציה רציפה במ"ש על קטע  $(a, b)$  חסומה בו.

(רמז: מהו תנאי קושי לקיום הגבול עבור פונקציות?)