חדו"א 2 - תרגיל מס' 9

1. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה 2π-מחזורית, אינטגרבילית רימן על $[0,2\pi]$. כזכור, מסמנים $\hat{f}(n)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$, מקדם פורייה ה- n של f.

   (א) הוכיחו כי $\widehat{f+g}(n)=\widehat{f}+\widehat{g}$ לכל $n\in\mathbb{Z}$.

   (ב) נניח ש- f פונקציה ממשית. אזי $\widehat{f}(-n)=\overline{\widehat{f}(n)}$.

   (ג) עבור $a\in\mathbb{R}$ נסמן $f_a(t)=f(t+a)$. הראו ש- $\widehat{f_a}(n)=e^{ina}\hat{f}(n)$.

   (ד) נניח ש- f גזירה, וש- f' אינטגרבילית ב- $[0,2\pi]$. הוכיחו ש- $\widehat{f'}(n)=in\hat{f}(n)$.

   (ה) נתון ש- f גזירה אינסוף פעמים. הוכיחו שלכל $p>0$, מתקיים $\widehat{f}(n)=o(n^{-p})$. כלומר, לכל $p>0$,
$$\lim_{n\to\pm\infty} n^p\widehat{f}(n)=0.$$

2. תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציות 2π-מחזורית, אינטגרבילית רימן על $[0,2\pi]$. מסמנים $S_Nf(t)=\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e^{int}$.

   (א) נניח ש- $f\equiv 0$ בסביבה של נקודה $x_0\in\mathbb{R}$. השתמשו במשפט שהוכח בכיתה והסיקו ש- $S_nf(x_0)\to 0$ כאשר $n\to\infty$.

   (ב) נניח ש- $f\equiv g$ בסביבה של $x_0\in\mathbb{R}$. הוכיחו את תכונת הלוקאליזציה של התכנסות טור פורייה: $S_nf(x_0)\to f(x_0)$ אם ורק אם $S_ng(x_0)\to g(x_0)$.

3. נתון ש- f פונקציית ליפשיץ בקטע $[a,b]$ (כלומר, קיים $L>0$ כך שלכל שתי נקודות $x,y\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$). נניח ש- f מקיימת תנאי ליפשיץ גם בקטע $[b,c]$. הוכיחו ש- f מקיימת תנאי ליפשיץ ב- $[a,c]$.

4. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, וגזירה ב- (a,b) פרט לנקודה אחת $c\in(a,b)$. נניח שקיים $M>0$ כך ש- $|f'(x)|<M$ לכל $x\in(a,b)$ שבו הפונקציה גזירה. הוכיחו ש- f היא פונקציית ליפשיץ ב- $[a,b]$.

5. חשבו את פיתוח פורייה של הפונקציות ה- 2π-מחזוריות הבאות. האם ההתכנסות היא נקודתית? בהחלט? במידה שווה?

   (א) $f(x)=x$ עבור $x\in[0,2\pi)$.

   (ב) $f(x)=x$ עבור $x\in[-\pi,\pi)$.

   (ג) $f(x)=(1-x/\pi)^2$ עבור $x\in[0,2\pi)$.

   (ד) $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$ עבור $x\in[-\pi,\pi)$.

   (ה) $f(x)=|x|$ עבור $x\in[-\pi,\pi)$.

6. תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציות רציפות ו- 2π-מחזוריות. נסמן
$$(f*g)(x)=\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\frac{dt}{2\pi},$$
הקונבולוציה של f ו- g. הוכיחו ש- $f*g$ פונקציה רציפה.

7. השתמשו בתשובתם לשאלה 5, סעיף ג, והוכיחו שלכל $0 \le x < 1$,

$$(1-2x)^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi n x)}{n^2}.$$

הסיקו ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

8. בכיתה ראינו ש- $\cot(\pi t) - \frac{1}{\pi t} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{t^2-n^2}$ לכל t לא שלם.

(א) הראו שלכל $0 \le x < 1$ מתקיים

$$\int_0^{\pi x}\left[\cot(t) - \frac{1}{t}\right]dt = \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

האם מדובר באינטגרל לא אמיתי, או באינטגרל רימן רגיל?

(ב) הסיקו שלכל $0 \le x < 1$,

$$\sin(x) = \lim_{N\to\infty} x\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

הציבו $x = \pi/2$. איך קוראים לנוסחא שקיבלתם?

9. הוכיחו בעזרת וואריאציה על הוכחת משפט ברנשטיין, שכל פונקציה רציפה בעלת מחזור של 2π ניתן לקרב במידה שווה על ידי פולינומים טריגונומטרים.