

בחינה - פונקציות ממשיות, מועד א'

סמסטר א' תש"ע, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. יש לנסח במדוייק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכם משתמשים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. משקל כל שאלה 25 נקודות.

1. יהי $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$ מרחב מידה. הוכיחו ש- $L^1(\mu)$ מרחב שלם.

2. מצאו פונקציה $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ שמקיימת את התכונות הבאות:

(א) רציפה בהחלט.

(ב) f עולה ממש (לכל $0 \leq x < y \leq 1$, מתקיים $f(x) < f(y)$).

(ג) קיימת קבוצה $A \subset [0, 1]$ עם $m(A) > 0$ כך ש- $f'(x) = 0$ לכל $x \in A$.

3. עבור $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ נסמן ב-

$$H_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1, y \leq f(x)\}$$

את תת-הגרף של f .

(א) תהינה $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות. הוכיחו ש- (10 נקודות)

$$\int_{[0,1]} |f - g| dm_1 = m_2(H_f \Delta H_g)$$

כאשר m_i היא מידת לבג ב- \mathbb{R}^i , ו- Δ מציון הפרש סימטרי.

(ב) תהינה $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות. נסמן, עבור $t \in \mathbb{R}$, (15 נקודות)

$$A_t = \{x \in [0, 1]; f(x) < t\}, \quad B_t = \{x \in [0, 1]; g(x) < t\}.$$

הוכיחו ש-

$$\int_{[0,1]} |f - g| dm_1 = \int_{\mathbb{R}} m_1(A_t \Delta B_t) dm_1(t)$$

4. תהיינה μ, ν מידות בורל סיגמא-סופיות על \mathbb{R} .

(א) נניח שלכל $a < b$ רציונלים, (10 נקודות)

$$\mu([a, b]) = \nu([a, b])$$

האם בהכרח $\mu \equiv \nu$?

(ב) נניח שלכל $t \in \mathbb{R}$, (15 נקודות)

$$\mu([t, t+1]) = \nu([t, t+1])$$

האם בהכרח $\mu \equiv \nu$?

בהצלחה!