

16 ביולי 2009

בחינה - חדו"א 2, מועד א'

סמסטר ב' תשס"ט, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' יפים גלוסקין, פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. יש לנסח במדויק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכם משתמשים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. משקל כל שאלה 22 נקודות.

1. תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה 2π -מחזורית הגזירה אינסוף פעמים. הוכיחו שלכל $p > 0$ שלם, מקדמי פורייה מקיימים (22 נקודות)

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} n^p \widehat{f}(n) = 0.$$

2. חשבו את (22 נקודות)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

בעזרת טורי חזקות או בכל דרך אחרת.

3. (א) האם $\int_0^{\infty} \sin(x^{3/2}) dx$ מתכנס? (22 נקודות).
(ב) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות. נניח ש- $\int_0^{\infty} f$ מתכנס וש- f' חסומה. הוכיחו ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. (11 נקודות). משקל כל סעיף (22 נקודות).

4. יהיו $0 < a < b < 1$. עבור $k \geq 0$ שלם, נסמן (22 נקודות).

$$R_k = \int_a^b t^k \ln t dt.$$

סעיפים א,ב:
10 נקודות כל אחד.
סעיף ג:
שתי נקודות

(א) הראו ש-

$$R_k = \frac{1}{k+1} \left[b^{k+1} \ln b - a^{k+1} \ln a \right] - \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

(ב) הוכיחו ש-

$$\int_a^b \frac{\ln t}{1-t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} R_k.$$

(ג) מצאו את

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 1^-}} \int_a^b \frac{\ln t}{1-t} dt$$

שימו לב: משקל
הסעיף שתי
נקודות בלבד!
פתרו קודם
את השאלות
האחרות.

5. תהי $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות. נתון כי בכל נקודה (x, y) במעגל היחידה $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ מתקיים

22 נקודות.
משקל כל סעיף
11 נקודות.

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} \geq 0.$$

נסמן $f(t) = u(\cos t, \sin t)$.

(א) הוכיחו כי $f'(t) \leq 0$ לכל $t \in [0, 2\pi]$.

(ב) הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

בהצלחה!