9 ביולי 2010

בחינה - חדו"א 3, מועד א'

סמסטר ב' תש"ע, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. יש לנסח במדוייק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכם משתמשים. נמקו היטב. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. משקל כל שאלה 22 נקודות.

1. תהי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה C^∞. נתון ש־ f הרמונית (כלומר, $\triangle f = 0$). נניח גם ש־ f פונקציה הומוגנית מדרגה 2010. כלומר,

$$f(\lambda x) = \lambda^{2010} f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(6 נקודות) (א) היזכרו בנוסחת אוילר: $\nabla f(x) \cdot x = 2010 f(x)$, והוכיחו אותה.

(8 נקודות) (ב) הוכיחו שלכל $r > 0$,

$$\int_{\partial B(0,r)} f = 0$$

כאשר $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \le r\}$ הוא כדור ברדיוס r ב־ $\mathbb{R}^n$.

(8 נקודות) (ג) הסיקו ש־

$$\int_{B(0,1)} f = 0$$

(22 נקודות) 2. יהיו $a, b > 0$. חשבו את

$$\int_\gamma \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

כאשר γ עקומה חלקה ב־ $\mathbb{R}^3$ שמתחילה ב־ $\partial B(0,a)$, מסתיימת ב־ $\partial B(0,b)$, ולא עוברת דרך הראשית.

3. יהי $M = \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ ו־

$$N = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x-5)^4 + y^6 + z^{2010} = 1\right\}.$$

הוכיחו שקיימים לפחות שני זוגות שונים $(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in M \times N$ כך שעבור $i=1,2$ מתקיים:

(14 נקודות) (א) הווקטור $p_i - q_i$ מאונך למישור המשיק $T_{p_i}M$.

(8 נקודות) (ב) $T_{p_i}M = T_{q_i}N$.

(22 נקודות) 4. יהי $U \subset \mathbb{R}^n$ תחום פתוח, $f,g : U \to \mathbb{R}^n$ פונקציות חלקות C^∞. נתון

(א) ההעתקה $U \ni x \mapsto f(x) + tg(x) \in \mathbb{R}^n$ היא חד־חד־ערכית, לכל $t > 0$.

(ב) $\det\left(f'(x) + tg'(x)\right) > 0$, לכל $t > 0$ ו־ $x \in U$.

תהי $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ קבוצת ז'ורדן כך ש־ $\overline{\Omega} \subset U$. עבור $t > 0$ נסמן

$$K_t = \{f(x) + tg(x); x \in \Omega\}.$$

עבור $t > 0$ נגדיר $h(t) = Vol_n(K_t)$. הוכיחו ש־ h פולינום ממעלה n לכל היותר.

5. תהי $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה C^∞ כך ש־

$$F(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1.$$

נניח גם שלכל נקודה $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\max\left\{\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,y)\right|, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F(x,y)\right|, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}F(x,y)\right|\right\} \le 1.$$

(6 נקודות) (א) הוכיחו שקיים $\varepsilon > 0$ ופונקציה $g : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$, חלקה C^∞, כך שלכל $|x| < \varepsilon$,

$$F(x, g(x)) = 0$$

(8 נקודות) (ב) הוכיחו שבריבוע $[-1/4,1/4] \times [-1/4,1/4] \subset \mathbb{R}^2$ מתקיימים אי השוויונים:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \ge \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} \le \frac{1}{2}.$$

(8 נקודות) (ג) הוכיחו שאפשר לקבל $\varepsilon \ge 1/4$ בסעיף א.

בהצלחה!