

בחינה - חדו"א 2, מועד ב'

סמסטר ב' תשס"ט, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' יפים גלוסקין, פרופ' בעז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. יש לנסח במדויק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכם משתמשים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. משקל כל שאלה 22 נקודות.

1. תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח ש- $\int_0^\infty f(x) dx$ מתכנס. חשבו את (22 נקודות)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx.$$

2. (א) האם (22 נקודות)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x} dx$$

סעיף א: 15 נקודות
סעיף ב: 7 נקודות

מתכנס בהחלט? בתנאי?

(ב) תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה וחיובית. נניח ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log f)'(x)$ קיים ושליילי. הוכיחו ש- $\int_0^\infty f$ מתכנס.

3. חשבו את (22 נקודות)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n \cdot 2^{2n+1}}$$

בעזרת טורי חזקות או בכל דרך אחרת.

4. (א) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה 2π -מחזורית וגזירה ברציפות המקיימת $\hat{f}(n) = 3^{-n^2}$ עבור n שלם. חשבו את מקדמי פורייה של הפונקציה (22 נקודות)

סעיף א: 17 נקודות
סעיף ב: 5 נקודות

$$g(x) = \pi f'(x + 2009).$$

(ב) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה 2π -מחזורית, המקיימת $f(0) = 1$ ו-

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \quad f(x) = 1 + \sin \frac{\pi^2}{x}.$$

האם טור פורייה של f מתכנס באפס? אם כן, מהו סכום הטור בנקודה אפס?

5. תהי $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

נסמן $g = f^2$. שימו לב: לא נתון ש- f רציפה או בעלת נגזרות חלקיות.

(א) הגדירו דיפרנציאביליות של פונקציה מ- \mathbb{R}^2 ל- \mathbb{R} .

(ב) הוכיחו ש- g דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$. מצאו את הנגזרות החלקיות של g בראשית.

22 נקודות.
משקל כל סעיף 11
נקודות.

בהצלחה!