

23 באוקטובר 2015

## בחינה - טופולוגיה, מועד ב

סמסטר קיץ, שנת הלימודים תשע"ה, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: בועז קלרטג, מתרגל: סטפן סניגרוב.

משך הבחינה שלוש שעות. יש לפתור ארבע מתוך חמש השאלות. אין להשתמש בכל חומר עזר או במחשבון. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

השתדלו לא לחרוג מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך, בסוף הבחינה יש דף נוסף. וודאו היטב את תשובותיכם לפני כתיבתן בטופס המבחן.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

# בהצלחה!

(25 נקודות) 1. נתונות פונקציות רציפות  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  עבור  $n \geq 1$  עם התכונה הבאה: לכל  $x \in \mathbb{R}$ , הקבוצה  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  חסומה. הוכיחו שקיימים  $M > 0$  ו-  $a, b \in \mathbb{R}$  עם  $a < b$  כך ש-

$$\forall x \in [a, b], n \geq 1, \quad |f_n(x)| \leq M$$

2. (א) יהי  $X$  מרחב טופולוגי. הוכיחו כי  $X$  האוסדורף אם ורק אם האלכסון  $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$  הוא קבוצה סגורה ב-  $X \times X$ . (15 נקודות)
- (ב) הוכיחו כי  $[0, 1]^2$  עם טופולוגיית הסדר הלכסיקוגרפי אינו ספרבילי. (10 נקודות)

3. הוכיחו את משפט Borsuk-Ulam בשני ממדים: לכל פונקציה רציפה  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  קיימת  $p \in S^2$  כך ש-  $f(p) = f(-p)$ . (25 נקודות)

4. תהי  $f : S^2 \rightarrow S^2$  העתקה שאין לה נקודת שבת. הוכיחו כי  $f$  הומוטופית ל- $g(x) = -x$ . (רמז: הביטו במעגל גדול שמכיל את  $x$  ואת  $f(x)$ ) (25 נקודות)

(25 נקודות) 5. נסמן ב־  $M$  את טבעת מבווס. תארו העתקת כיסוי  $p : M \rightarrow M$  כך שלכל  $x \in M$ , התמונה ההפוכה  $p^{-1}(x)$  מכילה בדיוק 2015 נקודות.

במידת הצורך רשמו את המשך הפיתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

