

**בחינה - חדו"א 2, מועד מיוחד**  
**סמסטר ב' תשס"ט, אוניברסיטת תל-אביב**

מרצה: בועז קלרטג

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון. יש לנסח במדויק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכם משתמשים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. משקל כל שאלה 22 נקודות.

1. (א) האם האינטגרל  $\int_1^{\infty} e^{-\log^2 x} dx$  מתכנס? (22 נקודות).  
 (ב) תהי  $f$  פונקציה גזירה ברציפות שמקיימת  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{|x|}f(x) = 0$ . נניח ש- (משקל כל סעיף 11 נקודות).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = 1.$$

הוכיחו כי

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}.$$

2. תהי  $f : [0, 2] \rightarrow [0, \infty)$  פונקציה רציפה ואי-שליילית. נניח ש-  $f$  פונקציה קעורה, כלומר, לכל שתי נקודות  $x, y \in [0, 2]$  ומספר  $0 < \lambda < 1$ , מתקיים (22 נקודות)

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

נתון ש-  $f(1) = 1$ . הוכיחו כי

$$\int_0^2 f(x) dx \geq 1.$$

3. (א) האם טור הפונקציות (22 נקודות).  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$  (משקל כל סעיף 11 נקודות)

מתכנס במידה שווה ב-  $\mathbb{R}$ ?

(ב) תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה  $2\pi$ -מחזורית, שמקיימת

$$\forall x \in [-\pi, \pi), \quad f(x) = |x|.$$

חשבו את פיתוח פורייה של  $f$ . האם טור פורייה מתכנס נקודתית לפונקציה?

4. (א) תהי סדרת פיבונצ'י, כלומר  $a_0 = a_1 = 1$  ו-  $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$  לכל  $n \geq 0$ . נסמן  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . הוכיחו שבתחום ההתכנסות מתקיים

22 נקודות.  
 סעיף א: 17 נקודות  
 סעיף ב: 5 נקודות)

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

(ב) מצאו את רדיוס ההתכנסות  $R$  של הטור. האם הטור מתכנס במידה שווה ב-  $(-R, R)$ ?

5. תהי  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה דיפרנציאבילית בראשית, ותהי  $\gamma_1, \gamma_2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  שתי עקומות גזרות ברציפות ב-  $0$ , כך ש-  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0, 0)$ . נתון ש-

22 נקודות)

$$\forall t \in (-1, 1), \quad \gamma_2(t) = \gamma_1(t) + (t^2, t^3)$$

הוכיחו כי

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_2(t)) \right|_{t=0}$$

בהצלחה!