

## מבחן בחדו"א 1

משך המבחן: שלוש שעות. השימוש בכל חומר עזר אסור, כולל למחשבון.

יש לענות על בדיוק שאלה אחת מחלק א' ובדיוק שלוש שאלות מחלק ב'.  
חלק ג' הוא רשות.  
עליכם לצטט, במדויק, כל משפט מהשיעור או התרגול בו הנכם משתמשים.

שימו לב: בכל סעיף, תשובה לא נכונה תזכה אתכם ב-0 נקודות. תשובה ריקה תזכה אתכם ב- 20% משווי הסעיף.

### חלק א'

יש לענות על שאלה אחת מבין השתיים הבאות.

שאלה 1: (25 נקודות)

הוכיחו שסדרה עולה וחסומה – מתכנסת לגבול סופי.

שאלה 2: (25 נקודות)

כלל לופיטל: יהיו  $f, g$  פונקציות גזירות בקטע  $(0,1)$ , כך ש-  $g(x) \neq 0$  בקטע הנ"ל. נתון ש-  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ . הוכיחו כי

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

במידה והגבול באגף ימין קיים.

## חלק ב'

יש לענות על שלוש שאלות מבין הארבע הבאות.

שאלה 3: (25 נקודות)

עבור אילו ערכי  $m$  יש למשוואה

$$3 \ln x + mx^3 = 17$$

פיתרון יחיד (ב- $x$ )? שני פתרונות? אפס פתרונות?

שאלה 4: (25 נקודות)

נסמן  $f(x) = x + (1-x) \cdot \sin^2 x$ .

(א) (5 נקודות) הוכיחו ש- $1 \leq f(x) \leq x$  לכל  $0 < x < 1$ .

(ב) (10 נקודות) יהי  $0 < a_0 < 1$  מספר כלשהו. נגדיר סדרה באופן רקורסיבי ע"י

$$a_n = f(a_{n-1})$$

לכל  $n \geq 1$ . הוכיחו שהסדרה הנ"ל מתכנסת.

(ג) (10 נקודות), מצאו את גבול הסדרה.

שאלה 5: (25 נקודות)

תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  פונקציה אי-שלילית, גזירה פעמיים ברציפות. נתון ש-

$$f(0) = f'(0) = 0$$

הוכיחו כי  $f''(0) \geq 0$ .

שאלה 6: (25 נקודות)

תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה שלעולם אינה מתאפסת, כך שלכל שני מספרים  $x, y \in \mathbb{R}$ , המנה  $f(x)/f(y)$  היא מספר רציונלי. הוכיחו ש- $f$  היא פונקציה קבועה.

חלק ג

שאלה 7: (10 נקודות)

תהי  $A$  קבוצה חסומה של התכי דדקינד. הוכיחו שקיים חסם מלעיל מינימלי (סופרמום) ל- $A$ .

**בהצלחה!**