בס״ק

5.א.

$f(z)=e^{2\pi i z}$ נגדיר

נראה כי f מקיימת את תנאי הסעיף הקודם:

$$f(z)=e^{2\pi i z}$$

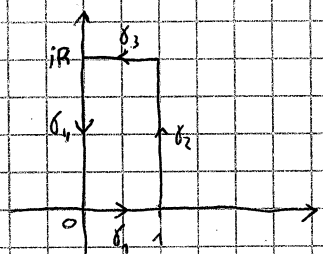
$$f(z+1)=e^{2\pi i(z+1)}=\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{e^{2\pi i}}\cdot e^{2\pi i z}=e^{2\pi i z}=f(z)$$

$$f(t+iR)=e^{2\pi i(t+iR)}=e^{-2\pi R+2\pi i t}$$

$$\Downarrow$$

$$|f(t+iR)|=\left|e^{-2\pi R+2\pi i t}\right|=e^{-2\pi R}$$

$$\Rightarrow \sup_{t\in[0,1]}|f(t+iR)|=\sup_{t\in[0,1]}e^{-2\pi R}\xrightarrow{R\to+\infty}0$$



$$\int_0^1 f(t)\,dt=0$$

ת. רצ׳ $f\in F$ ב-$\mathbb{C}$

f שלמה, לכן:

$$\int_\gamma f=0$$

$$\left|\int_{\gamma_3}f(z)\,dz\right|\le 1\cdot\max_{z\in\gamma_3}|f(z)|=\max_{t\in[0,1]}|f(t+iR)|\xrightarrow{R\to\infty}0$$

רציפה F. (כי $f\in C$)

ולכן, כי:

$t\in[0,R]\quad \gamma_2(t)=1+it$

$t\in[0,R]\quad \gamma_4(t)=it$

$$\int_{\gamma_4}f(z)\,dz=i\int_{iR}^{0}f(it)\,dt=-i\int_0^{iR}f(it)\,dt=-i\int_0^{iR}f(it+1)\,dt=-\int_{\gamma_2}f(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(z)\,dz=\int_{\gamma_1}f(z)\,dz=-\int_{\gamma_2}f(z)\,dz-\int_{\gamma_3}f(z)\,dz-\int_{\gamma_4}f(z)\,dz=-\int_{\gamma_3}f(z)\,dz\xrightarrow{R\to\infty}0$$

$$\Leftarrow\quad \int_0^1 f(z)\,dz=0$$

4. בראשית, נמצא את כל האוטומורפיזמים (כלומר העתקות (חח"ע ועל)
קונפ' f, כאשר D הוא ~~~~ מעגל היחידה.

יהי $a \in D$ כך ש- $f(a)=0$ (f על)

~~$\Rightarrow \quad = f$~~

מעתיקה
מוביוס ל-D

$$g = f \circ \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

$\Rightarrow$ $g: D$ אוטו-מורפיזם, $g(0)=0$

$\Downarrow$

$$|g(z)| \le |z|$$

אבל גם g^{-1} אוטו', $g^{-1}(0)=0$

$\Downarrow$

$$|g^{-1}(z)| \le |z|$$

$\Downarrow$ ע"י g^{-1} הפיכה

$$|z| \le |g(z)|$$

$\Downarrow$

$|g(z)| = |z|$ לכל $z \in D$

$\Downarrow$

$$g(z) = e^{i\theta} z$$

$\Downarrow$

$$e^{i\theta} z = f \circ \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

$\Downarrow$

f מהצורה

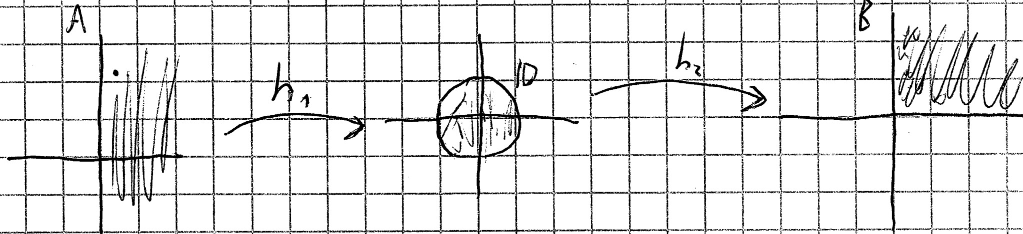
$$e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

סעיף ג

לכן, ~~כפי~~ כפי שראינו בכיתה, כל העתק הולו', חח"ע ועל
מ-D ל-D הן מהצורה:

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$$

לכן, כדי לסיים את ~~ה~~ השאלה, אנו נמצא
h_1 ו-h_2 מפורשות, כך ש:



ואז, הפונ' $\varphi(z)=h_2\circ f\circ h_1$

הן אפיון של כל הפונ' חח"ע ועל

מ-A ל-B – כי אם פונ' ψ היא חח"ע ועל מ-A ל-B,

אז ~~בגלל~~ שגם h_1, h_2 הן חח"ע ועל, אז

הפונ' $h_2^{-1}\circ\psi\circ h_1^{-1}=f$ בהכרח אוטו' של D, ומכיוון

שמצאנו אפיון לכל ה-f-ים כנ"ל, אנו מצאנו את

כל הפונ' חח"ע ועל מ-A ל-B.

נמצא את h_1:

$$h_1(z)=\frac{z-1}{z+1}$$

טענה: h מעתיקה את $i\mathbb{R}$ ל-∂D.

הוכחה: 1 ו-1- סימטריות ביחס ל-$i\mathbb{R}$.

כי h_1 מביוס

$h_1(-1)=\infty$, $h_1(1)=0$ סימטריות ביחס ל-$h_1(i\mathbb{R})$

$\Leftarrow$ $h_1(i\mathbb{R})$ ~~מעגל~~ מעגל ברדיוס R כלשהו, שמרכזו ב-0.

נמצא את R: $|h_1(0)|=1 \Leftarrow h_1(0)=-1$

0 על $i\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $h_1(0)$ על ~~ה~~ המעגל $\Leftarrow$ $R=1$.

המשך

נרצה ש- $h_1(A)$ ~~[illegible]~~ יהיה $\{z \mid |z|<1\}$ או $\{z \mid |z|>1\}$

ומכיוון ש- $A \ni 1$ ו- $h_1(1)=0$

$\Leftarrow$ $h_1(A)=\mathbb{D}$

כעת, נמצא את h_2:

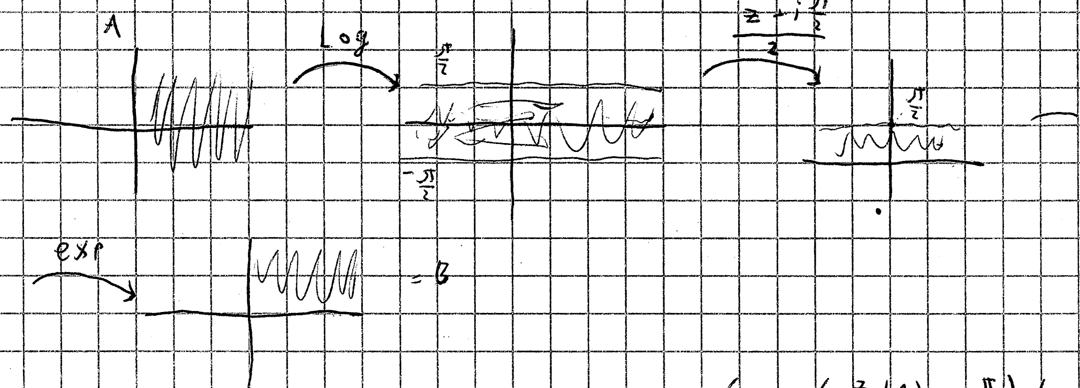
נשים לב, כי $\psi(z) = -\frac{z+1}{z-1}$

~~[illegible]~~ מעתיקה את $\mathbb{D}$ ל- A, כי $0, \infty$ סימטריות ביחס ל- $\partial\mathbb{D}$, $\psi(0)=1$, $\psi(\infty)=-1$,

ולכן $\psi(\partial\mathbb{D}) = i\mathbb{R}$, ומכיוון ש- $0 \in \mathbb{D}$, $\psi(0)=1 \in A$

$\Leftarrow$ $\psi:\mathbb{D} \to A$.

נמצא העתקה φ, מ- A ל- B:



$$\Rightarrow h_2 = e \circ \frac{z+i\frac{\pi}{2}}{2} \circ \operatorname{Log} \circ \psi = e^{\left(\operatorname{Log}\left(-\frac{z+1}{z-1}\right)+i\frac{\pi}{2}\right)/2}$$

~~$\Rightarrow \varphi = h_2 \circ f \circ h_1$~~

$$f \circ h_1 = e^{i\theta} \cdot \frac{\frac{z-1}{z+1} - a}{1 - \bar{a}\frac{z-1}{z+1}} =$$

$$= e^{i\theta} \cdot \frac{z-1-az-a}{z+1-\bar{a}z+\bar{a}} = e^{i\theta} \cdot \frac{z(1-a)-1-a}{z(1-\bar{a})+1+\bar{a}}$$

ל- $z \mapsto e^{\frac{\operatorname{Log} z}{2}}$ יש לה, לא [illegible] שלה.

קפיץ?

$$\Downarrow$$

$$\varphi = h_2 \circ f \circ h_1$$

$$\left(h_2 = e^{\left(Log\left(-\frac{z+1}{z-1}\right)+i\frac{\pi}{2}\right)/2} \right., \quad f \circ h_1 = e^{i\theta} \cdot \frac{z(1+a)-1+a}{z(1+\bar{a})+1+\bar{a}}$$

$$-\frac{z+1}{z-1} \circ \frac{z(1+a)-1+a}{z(1+\bar{a})+1+\bar{a}} = -\frac{\frac{z(1+a)-1+a}{z(1+\bar{a})+1+\bar{a}}+1}{\frac{z(1+a)-1+a}{z(1+\bar{a})+1+\bar{a}}-1} =$$

$$= -\frac{z(1+a)-1+a+z(1+\bar{a})+1+\bar{a}}{z(1+a)-1+a-z(1+\bar{a})-1-\bar{a}} = -\frac{z(2+\bar{a}+a)+\bar{a}+a}{z(\bar{a}-a)-2+a-\bar{a}}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(z) = e^{\left(Log\left(-\frac{z(2+\bar{a}+a)+\bar{a}+a}{z(\bar{a}+a)-2+a-\bar{a}}\right)+i\frac{\pi}{2}\right)/2}$$

עבור $|a|<1$, $\theta\in[0,2\pi]$

ושוב ניתן לבחור ולבחור את השורש.

בגלל לקחת סגן, צריך לבחור $\sqrt{\cdot}$

במקום $e^{Log(\cdot)/2}$

-1

קסין

1. יהי D עיגול היחידה. $f: D\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ הולו'.

נראה כי 0 סינג' סליקה.

נניח בשלילה כי 0 ~~יש~~ סינג' עיקרית.

$\Leftarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $f(D(0,\varepsilon)\setminus\{0\})$ צפופה ב-$\mathbb{C}$

אבל, מכיוון ש- $Re(f(D\setminus\{0\}))>0$,

$\Leftarrow$ $\forall\varepsilon<1$ $f(D(0,\varepsilon)\setminus\{0\})\cap\{z: Re(z)<0\}=\emptyset$

$\Leftarrow$ $f(D(0,\varepsilon)\setminus\{0\})$ אינה צפופה ב-$\mathbb{C}$,

לכן 0 אינה סינג' עיקרית.

נניח בשלילה כי 0 קוטב, יהי p סדר הקוטב.

נסמן: $g(z)=z^p\cdot f(z)$, $g(0)\neq0$.

$\Leftarrow$ $f(z)=\frac{g(z)}{z^p}$

נתבונן בסביבה קטנה של 0, $D(0,\varepsilon)$:

$$f(\varepsilon e^{i\theta})=\frac{g(\varepsilon e^{i\theta})}{(\varepsilon e^{i\theta})^p}=\frac{g(0)+O(\varepsilon)}{\varepsilon^p\cdot e^{ip\theta}}.$$

אבל, אם נעבור על $f(\varepsilon e^{i\theta})$ עבור ערכי θ ב-$[0,2\pi]$, אז עבור ε מספיק קטן, הסביבה של $D(g(0),\varepsilon)$ לא מכילה את 0, אבל מכיוון שהמכנה הוא קטן בערכו המוחלט, $|f(\varepsilon e^{i\theta})|$ גדול, והמונה כאשר אנו משנים את θ, הסביבה $D(g(0),\varepsilon)$ עושה סיבוב סביב ה-0, ולכן, ישנו ערך θ עבורו

$D(g(0),\varepsilon)\subset\{Re(z)<0\}$ $\Leftarrow$ $Re(f(\varepsilon e^{i\theta}))<0$ $\Leftarrow$ סתירה!

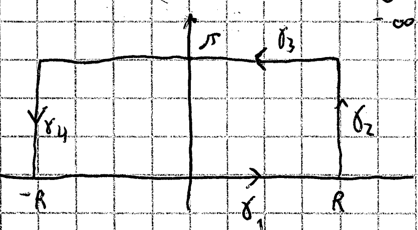
$\Leftarrow$ ל-f ~~יש~~ יש סינג' סליקה ב-0.

10|10

אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב

בס"ד

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = ?$$



2. נחשב $f(z) = \dfrac{e^{az}}{\cosh(z)}$.

$$A_R = \{ z : -R < Re(z) < R ,\ 0 < Im(z) < \pi \}$$

$\cosh(z) = \cos(iz) \Leftarrow$ ל- $\cosh(z)$ יש אפס

אחד ב-A, והוא ב- $i\frac{\pi}{2}$. אפס פשוט,

כי

$$(\cosh(z))'\Big|_{z=i\frac{\pi}{2}} = \sinh(z)\Big|_{z=i\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sinh\left(i\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{i-(-i)}{2} = i$$

כמו כן, $e^{az}\Big|_{z=i\frac{\pi}{2}} \neq 0$, לכן, ל-$f$ יש קוטב פשוט

ב- $z = i\frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{i\frac{\pi}{2}} f = \lim_{z\to i\frac{\pi}{2}} \left(z - i\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot f(z) =$$

$$= \lim_{z\to i\frac{\pi}{2}} \frac{\left(z-i\frac{\pi}{2}\right)e^{az}}{\cosh(z)} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{z\to i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{az} + \left(z-i\frac{\pi}{2}\right)a\cdot e^{az}}{\sinh(z)} =$$

$$= \frac{e^{ia\frac{\pi}{2}}}{\sinh\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{e^{ia\frac{\pi}{2}}}{i}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z) = 2\pi e^{ia\frac{\pi}{2}}$$

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \le \pi \cdot \max_{z\in\gamma_2} \left| \frac{e^{az}}{\cosh(z)} \right| = 2\pi\cdot e^{aR}\cdot \frac{1}{\min\limits_{z\in\gamma_2} |e^{z} + e^{-z}|} \le$$

$$\le 2\pi e^{aR}\cdot \frac{1}{\min\limits_{z\in\gamma_2} \big||e^z| - |e^{-z}|\big|} = \frac{2\pi\cdot e^{aR}}{e^{R} - e^{-R}} \sim \frac{2\pi\cdot e^{aR}}{e^{R}} = 2\pi\cdot e^{(a-1)R} =$$

$$= 2\pi\cdot e^{(a-1)R} \xrightarrow[(a-1<0 \ \Leftarrow\ a<1 \text{ כי})]{R\to\infty} 0$$

המשך

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| \le \pi \cdot \max_{z\in\gamma_4}|f(z)| = 2\pi \cdot \frac{\max_{z\in\gamma_4}|e^{az}|}{\min_{z\in\gamma_4}|e^{z}+e^{-z}|} \le$$

$$\le 2\pi \cdot e^{-aR} \cdot \frac{1}{\min_{z\in\gamma_4}\left||e^{z}|-|e^{-z}|\right|} =$$

$$= \frac{2\pi\cdot e^{-aR}}{e^{R}-e^{-R}} \sim \frac{2\pi\cdot e^{-aR}}{e^{R}} = 2\pi e^{(-a-1)R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$a>-1$ כי

$\Downarrow$

$-a-1<0$

$$\cancel{\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t)\,dt = -\int_{-R}^{R}\frac{e^{a(-t+i\pi)}}{\cosh(-t+i\pi)}} =$$

$\cancel{\gamma_3(t) = -t+i\pi,\ t\in[-R,R]}$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} f(t+i\pi)\cdot 1\,dt =$$

$\gamma_3(t) = t+i\pi,\ t\in[-R,R]$

$$= -\int_{-R}^{R}\frac{e^{a(t+i\pi)}}{\cosh(t+i\pi)} = -e^{ai\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{at}}{-\cosh(t)}\,dt =$$

$$\cosh(t+i\pi) = \frac{e^{t+i\pi}+e^{-t-i\pi}}{2} = \frac{e^{t}\cdot(-1)+e^{-t}\cdot(-1)}{2} = -\frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = -\cosh(t)$$

$$= e^{ai\pi}\cdot\int_{-R}^{R}\frac{e^{at}}{\cosh(t)}\,dt = e^{ai\pi}\cdot\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

בס״ד

$$\Downarrow$$

$$\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f = 2\pi i e^{ia\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{\gamma_2} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \int_{\gamma_4} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + e^{ai\pi}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i e^{ia\frac{\pi}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \frac{2\pi \cdot e^{ia\frac{\pi}{2}}}{e^{ai\pi}+1} = \frac{2}{e^{ia\frac{\pi}{2}}+e^{-ia\frac{\pi}{2}}}\cdot\pi =$$

$$= \frac{1}{\cos\left(a\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\pi = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}\,dx = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$$

20|20

המשך

3.א.

צ״ל ש-

$$f(z) = (z-1)^n \cdot e^z + \frac{1}{2}(z+1)^n$$

יש בדיוק n שורשים

ב- $A = \{Re(z) > 0\}$

נסמן $g(z) = (z-1)^n e^z$

$$g(z) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(z-1)^n \cdot e^z = 0 \quad \text{כי } e^z \neq 0$$
$$(z-1)^n = 0$$

$\Leftarrow$ ל-g יש n אפסים (כולל ריבוי)

ב-A (למעשה יש לה אפס אחד

מסדר n)

נראה כי

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

$$\left|\frac{1}{2}(z+1)^n\right| < |(z-1)^n e^z|$$

ראשית, נראה זאת עבור $z \in i\mathbb{R}$:

$$\left|\frac{1}{2}(z+1)^n\right| = \frac{|z+1|^n}{2}, \quad |(z-1)^n e^z| = |z-1|^n \cdot |e^z| \underset{Re(z)=0}{=} |z-1|^n$$

נראה כי:

$$\frac{|z+1|^n}{2} < |z-1|^n \quad \forall z \in i\mathbb{R}$$

מכיוון ש- $i\mathbb{R}$ הוא הקו האמצעי של הקטע המחבר

את הנקודות $1, -1$, נקבל כי:

(נקודות על הקו הם נמצאים במרחק שווה מקצוות הקטע שהקו הוא חוצה אנך)

$$|z+1| = |z-1|$$

בס"ד

$\Downarrow$

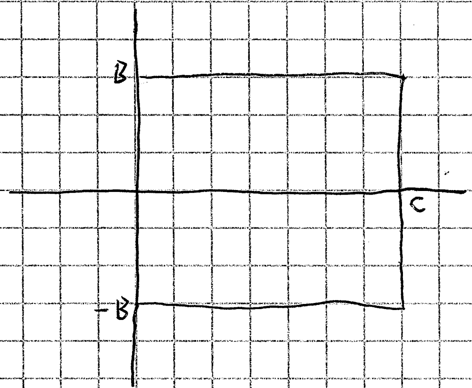
$$|z+1|^n = |z-1|^n$$

$\Downarrow$

$$\frac{|z+1|^n}{2} < |z-1|^n$$

(אין פתרון, כי $|z+1| \neq 0$, $|z-1| \neq 0$ לכל $z \in A$)

כעת, אנו נבחר מלבן מתאים בצורה הבאה:



ונראה שבאי-שוויון מתקיים על שפת המלבן.
נראה את נכונות האי-שוויון על הצלע השמאלית.
~~נראה את נכונות על הצלע השמאלית~~

$$\left|\frac{1}{2}(z+1)^n\right| < \left|e^z (z-1)^n\right| \iff \frac{|z+1|^n}{2} < |z-1|^n \cdot e^{Re(z)} \iff$$

$$\iff |z+1| < |z-1| \cdot \sqrt[n]{2} \cdot e^{\frac{Re(z)}{n}}$$

נשים לב כי:

$$2 = |2| = |(z+1)-(z-1)| \geq \big||z+1|-|z-1|\big|$$

עבור $z \in A$, מתקיים $|z+1| > |z-1|$, כי המרחק של נקודה ב-A מ-1 קטן מהמרחק מ-(-1).

$\Downarrow$

$$\forall z \in A \quad |z+1| - |z-1| > 0$$

$\Downarrow$

$$|z+1| \leq 2 + |z-1|$$

קס״ק

נראה שאי השוויון מתקיים על הצלע הימנית

כלומר,

$$|z+1| < |z-1|\cdot\sqrt[n]{2}\cdot e^{\frac{Re(z)}{n}}$$

$$\Updownarrow$$

$$|z+1| < |z-1|\cdot\sqrt[n]{2}\cdot e^{c/n}$$

נבחר $c>3$, $e^{\frac{c}{n}}>2$, ונקבל

$$|z-1|\cdot\sqrt[n]{2}\cdot e^{c/n} > 2|z-1|\cdot\sqrt[n]{2} =$$

$$= |z-1|\sqrt[n]{2} + |z-1|\cdot\sqrt[n]{2} \geq |z-1|\sqrt[n]{2} + 2\sqrt[n]{2} > |z-1| + 2 \geq |z+1|$$

נראה שאי השוויון מתקיים על הצלע העליונה.

יהי ε, כך ש- $e^{\varepsilon/n} \geq 2 \wedge \varepsilon > 3$

ראשית, נוכיח את אי השוויון עבור

$$z \in A_n = \{Im(z)=B,\ 0<Re(z)<\varepsilon\}$$

נראה ש- 1

$$\lim_{\substack{Im(z)\to\infty \\ Re(z)<\varepsilon}} \frac{|z+1|}{|z-1|} = 1$$

$$\sup\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = \left|\frac{\varepsilon+it+1}{\varepsilon+it-1}\right| \xrightarrow{t\to\infty} 1$$

אז יתקיים, שעבור כל $z\in A_n$,

$$\sqrt[n]{2}\cdot e^{\frac{Re(z)}{n}} > \sqrt[n]{2} = \xi > 1$$

אז יתקיים ש- $|z+1| > |z-1|$,

$$\frac{|z+1|}{|z-1|} > 1$$

הוכחה

אבל, מכיוון ש-

$$\lim_{\substack{Im(z)\to\infty \\ Re(z)<\varepsilon}} \frac{|z+1|}{|z-1|} = 1,$$

אז ~~[illegible]~~ נוכל למצוא B, כך ש:

$$\forall z,\ \substack{Im(z)>B \\ Re(z)<\varepsilon} \quad \frac{|z+1|}{|z-1|} < \xi$$

$$|z+1| \overset{ש}{<} \xi|z-1| < |z-1|\sqrt[n]{2}\cdot e^{\frac{Re(z)}{n}}$$

בס"ד

כעת, נוכיח את אי-השוויון עבור

$$A_z = \{Im(z)=B,\ Re(z)\geq \varepsilon\}$$

$$|z-1|\cdot\sqrt[n]{2}\cdot e^{\varepsilon/n} > 2|z-1|\cdot\sqrt[n]{2} = |z-1|\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{2}|z-1| \geq$$

$$\geq |z-1|\sqrt[n]{2} + 2\sqrt[n]{2} > |z-1| + 2 \geq |z+1|$$

$\Downarrow$

אי-השוויון מתקיים עבור החלק העליון.

נוכיח את אי-השוויון עבור החלק התחתון:

מכיוון ש- $|\bar{z}-1|=|z-1|$, $e^{\frac{Re(z)}{n}} = e^{\frac{Re(\bar{z})}{n}}$ ו- $|z+1|=|\bar{z}+1|$

אז אי השוויון נכון עבור z אמ"מ הוא נכון עבור $\bar{z}$.

מכיוון שהצלע התחתונה היא גרסה ~~משוקפת~~ של העליונה

בשיקוף ~~של~~ הצלע העליונה, אי-השוויון מתקיים

גם עבור הצלע התחתונה.

$\Downarrow$

$$\left|\frac{1}{2}(z+1)^n\right| < \left|e^z(z-1)^n\right|$$

עבור כל z על צלעות המלבן (אנו יכולים ~~להגדיל~~ להגדיל

אותו לכל גודל, כי ערך ה-B (-) ~~ש~~ שמצאנו

הם ערכים שמספיקים לקיום האי-שוויון, אבל אם נגדיל אותם

עוד - נגדיל אותם לאינסוף - אי-השוויון נשמר)

ב.

$$f'(z) = n(z-1)^{n-1}e^z + (z-1)^n e^z + \frac{n}{2}(z+1)^{n-1}$$

$$f(z) = (z-1)^n e^z + \frac{1}{2}(z+1)^n$$

נניח כי $f(z)=f'(z)=0$ עבור z כלשהו

[illegible]

(נניח שלא, שיש פתרון, כי $z \neq \pm 1$) $\quad f(z) = (z-1)^n e^z + \frac{1}{2}(z+1)^n = 0$

$\Downarrow$

$$f'(z) = (z-1)^n e^z + n(z-1)^{n-1} e^z + \frac{n}{2}(z+1)^{n-1} = 0$$

$\Downarrow$

$$-\frac{1}{2}(z+1)^n + \frac{n}{z-1}\cdot (z-1)^n e^z + \frac{n}{2}(z+1)^{n-1} = 0$$

$$-\frac{1}{2}(z+1)^n - \frac{n}{z-1}\cdot\frac{1}{2}(z+1)^n + \frac{n}{2}(z+1)^{n-1} = 0 \qquad :(z+1)^{n-1}$$

$$-\frac{1}{2}(z+1) - \frac{n}{2}\cdot\frac{z+1}{z-1} + \frac{n}{2} = 0$$

$$(z+1) + n\cdot\frac{z+1}{z-1} - n = 0$$

$$z^2 - 1 + \cancel{nz} + n - \cancel{nz} + n = 0$$

$$z^2 = 1 - 2n < 0$$

$$\Leftarrow \quad z \in i\mathbb{R}$$

אבל הראינו את קיום פאים של משפט רושה

שאורך $i\mathbb{R}$, ואלה ממספקות קיום פאים ~~[illegible]~~

שלמעשה מקיימת פונקציה שלא אורך ספפ אין אפסים, ושהן מכונקציות

שמשוויון מן המכפלה מספר הפתרונות $\Leftarrow$ ל- $f(z)$ ול- $f'(z)$ אין שורשים משותפים

$\Downarrow$

[illegible]

כל שורשי $f(z)$ [illegible] במישור

הימני פשוטים,

כמו כן, ישנם n שורשים

~~[illegible]~~ כאלה, בחצי

המישור הימני.