

חזו"א 1 - תרגיל מס' 1

1. פתרו את אי-השוויונים הבאים:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} \geq \sqrt{3x-2} \quad (\text{א})$$

$$(x-3)^{5x} < (x-3)^{x^2} \quad (\text{ב})$$

$$|\sin(x)| < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{ג})$$

$$||x+1| - |x-1|| < 1 \quad (\text{ד})$$

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+2) < 1 \quad (\text{ה})$$

2. הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

$$\forall x, y \quad |x-y| \geq ||x| - |y|| \quad (\text{א})$$

$$t = \frac{\sqrt{(y)}}{\sqrt{(x)}} \quad \text{רמז: } \forall a \neq 0 \quad \left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2 \quad (\text{ב})$$

$$\forall x, y \quad \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (\text{ג})$$

$$\forall a \quad |a-1| + |a-2| + |a-3| \geq 2 \quad (\text{ד})$$

(ה) יהיו $a, b, c > 0$ מספרים המקיימים $a+b+c=1$. הוכיחו כי $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$. ניתן להעזר בסעיף ב.

$$(\text{ו}) \text{ יהי } \epsilon > 0. \text{ הוכיחו כי אם } |x-a| < \epsilon, |y-b| < \epsilon \text{ אזי } |xy-ab| < \epsilon(|a|+|b|+\epsilon)$$

3. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{א})$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad \text{לכל } x, y \geq 0 \text{ ולכל מספר טבעי } n. \quad (\text{ג})$$

$$18 \text{ מחלק את } 7^n + 12n + 17 \text{ לכל מספר טבעי } n. \quad (\text{ד})$$

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin x| \quad (\text{ה})$$

4. הוכיחו הזהות הבאה: $\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j} = \binom{n}{k}$ כאשר $0 < m < n$.

$$\text{רמז: } (1+x)^m (1+x)^{n-m} = (1+x)^n$$