

בוחרן אמצע - פונקציות מרוכבות 1

סמסטר ב' תשע"א, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' בועז קלרטג

משך הבוחרן שעתיים. יש לפתור שלוש מתוך ארבע השאלות. אין להשתמש במחשבון, מותר להשתמש בדף נוסחאות A4 יחיד, כתוב בשני הצדדים. יש לנסח במדויק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכס משתמשים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם.

1. הוכיחו כי הפונקציה

$$u(x, y) = \ln \left| \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \right|.$$

הרמונית בדיסק היחידה $D(0, 1)$, ומצאו את הצמוד הרמוני.

2. (א) הוכיחו ש-

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$$

היא פונקציה הולומורפית ב- $D(0, 1)$.

(ב) הוכיחו שלכל $\theta \in \mathbb{Q}$,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{2\pi i \theta}) = \infty.$$

3. מצאו העתקה הולומורפית חח"ע ועל $f : A \rightarrow B$ כאשר

$$A = D(0, 1)$$

ו-

$$B = \{z \in D(0, 1); \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

4. מצאו את כל הפונקציות הולומורפיות $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש- $f(z)\overline{f'(z)}$ היא פונקציה הרמונית. (מותר להשתמש בעובדה שנוכיח בהמשך הקורס, שהחלק הממשי והחלק המדומה של כל פונקציה הולומורפית חלקים C^∞).

בהצלחה!