

בוחן אמצע - חדו"א 1

סמסטר א תשס"ט, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: דר' שירי ארטשטיין-אבידן, פרופ' בועז קלרטג

משך הבחינה שתיים. אין להשתמש בחומר עזר. יש לנסח במדויק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכם משתמשים.

חלק א'

ענו על אחת משתי השאלות הבאות:

1. הוכיחו כי סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי. (30 נק')
2. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. הוכיחו שקיימת תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש- (30 נק')

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

חלק ב'

ענו על שתי השאלות הבאות:

3. (א) כיצד מגדירים כפל של חתכי דדקינד? (10 נק')
- (ב) יהי α חתך כך ש- $\alpha > 0^*$. הוכיחו ש- (20 נק')
- $$2^* \cdot \alpha = \{2q; q \in \alpha\}$$
4. (א) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נניח שהסדרות $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{a_{5n}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות. האם גם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ בהכרח מתכנסת? הוכיחו או תנו דוגמא נגדית. (20 נק')
- (ב) תהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $b_1 > 0$ ו- (20 נק')

$$b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 1}{b_n}$$

האם הסדרה מתכנסת לגבול סופי? גבול אינסופי? או שמא אינה מתכנסת כלל וכלל? הוכיחו את תשובתכם.

בהצלחה!