<u>**דף נוסחאות חלקי בנושא משטחים מינימלים בהצגה אפרמטרית**</u>

נניח ש־ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה וקמורה, ונתונה פונקציה $f : D \to \mathbb{R}^{n-2}$ חלקה.

נסמן

$$graph(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n \,;\, x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

נרשום $p = \partial f/\partial x_1,\ q = \partial f/\partial x_2$. (מי שרוצה, יכול לחשוב על המצב הבא: יש לנו משטח $graph(f)$, ובינתיים יש לנו 5 פונקציות על המשטח ההוא: x, y, f, p, q. עוד מעט יהיו פונקציות נוספות שם). התבנית היסודית הראשונה של המשטח $graph(f)$ בהצגה אפרמטרית היא:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+|p|^2 & p \cdot q \\ p \cdot q & 1+|q|^2 \end{pmatrix}$$

1. המשטח $graph(f)$ הוא משטח מינימלי אם ורק אם קיימת $E : D \to \mathbb{R}$ חלקה עם

$$D(\nabla E) = \nabla^2 E = \frac{G}{\sqrt{\det G}} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} 1+|p|^2 & p \cdot q \\ p \cdot q & 1+|q|^2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

כאשר $W = \sqrt{\det G}$.

2. נניח ש־ $graph(f)$ משטח מינימלי. נשים לב שהפונקציה E היא פונקציה קמורה המקיימת $\det \nabla^2 E = 1$.

משפט Jorgens (ממד 2), Calabi (ממד 3,4,5) ו־ Pogorelov (כל הממדים):
תהי $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה קמורה וחלקה עם $\det \nabla^2 E \equiv 1$. אזי הפונקציה E היא פולינום ממעלה 2.

3. הגישה של Jörgens: יש התאמה בין פונקציות הולומורפיות במישור המרוכב, ופונקציות קמורות במישור שהדטרמיננטה של ההסיאן שלהן שווה ל־ 1. אומרים שההתאמה הזו היתה פחות או יותר ידועה ל־ Darboux ו־ Backlund. אפשר להבין את ההתאמה בקלות יחסית בשפה של תבניות דיפרנציאליות. נסמן $\nabla E = (F, G)$. סליחה על השימוש

החוזר באות G, כך זה גם בספר. אזי התנאי "הדטרמיננטה של ההסיאן של E שווה לאחד" נכתב באופן הבא:

$$\begin{cases} dF \wedge dx_1 + dG \wedge dx_2 = 0 \\ dF \wedge dG - dx_1 \wedge dx_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

או בקיצור ע"י משוואה אחת $(dF + idx_2) \wedge (dx_1 + idG) = 0$. את משוואות קושי רימן רושמים באופן דומה: אם $w = h(z)$ פונקציה של משתנה מרוכב, משוואות קושי־רימן נכתבות בקיצור כך: $dz \wedge dw = 0$. מסקנה: במידה ובאיזור מסויים הביטוי $F + ix_2$ הוא פונקציה של $x_1 + iG$, אזי זו בהכרח פונקציה הולומורפית. את משוואה (2) נעדיף לרשום כך:

$$[(dx_1 + dF) + i(dx_2 + dG)] \wedge [(dx_1 - dF) + i(dG - dx_2)] = 0 \tag{3}$$

4. נסמן $\xi = x + \nabla E$. כלומר, $\xi_1 = x_1 + F, \xi_2 = x_2 + G$. מתכונות של פונקציות קמורות (טענות חדו"א 2 בפרק 5), ראינו שהעתקה $x \mapsto \xi(x)$ היא העתקה מרחיבה, ובפרט היא דיפאומורפיזם. כדאי מאוד לחשוב על $z = \xi_1 + i\xi_2$ כעל קואורדינטה הולומורפית על המשטח. למשל, משוואה (3) אומרת שהביטוי $w := (x_1 - F) + i(G - x_2)$ תלוי ב־ z באופן הולומורפי.

5. מכיוון ש־ $\nabla E = (F, G)$, מנוסחא (1) מקבלים ש־ $dF = (g_{11}dx_1 + g_{12}dx_2)/W$ וכנ"ל עבור dG. בנוסף, מכיוון ש־ w פונקציה הולומורפית של z, מתקיים ש־ $|dw|^2 = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 |dz|^2$. לכן התבנית היסודית הראשונה היא:

$$g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2 = W(dFdx_1 + dGdx_2) = \frac{W}{4}\left(1 - \left|\frac{dw}{dz}\right|^2\right)|dz|^2$$

בפרט, קיבלנו ש־ $z = \xi_1 + i\xi_2$ נותנת קואורדינטות איזותרמיות.

6. כבר השתמשתי ביותר מדי תבניות דיפרנציאליות, שזה אסור, אין טעם להמשיך.