הסבר נוסף לגבי בעיית Plateau

אני רוצה להרחיב מעט לגבי המשפט "One shows by a variational argument that such a map must define a generalized minimal surface in D" שמופיע בפרק 7. הסבר מקיף בהרבה נמצא במאמר של Courant מ־ 1937 שנקרא Plateau's problem and Dirichlet's principle.

נסמן $D = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, u_1^2 + u_2^2\}$ דיסק היחידה, ו־ $C = \partial D$. נתונה לנו עקומת ז'ורדן פשוטה $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$. מביטים באוסף כל ההעתקות הרציפות $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ כך ש־ $x|_C$ הוא הומאומורפיזם על Γ, וכך ש־ x חלקה ב־ D. בקרב ההעתקות הנ"ל, ממזערים את אינטגרל דיריכלה:

$$\mathcal{D}[x] := \int_D \left[\left\| \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\|^2 \right] du_1 du_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_D \left[\left| \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right|^2 \right] du_1 du_2$$

מטיעוני קומפקטיות שקשורים לחשבון וואריאציות (ארצלה־אסקולי או רליך־קונדרצ'וב), אפשר להראות שהמינימום מתקבל, ובעזרת עיקרון אנליטי עמוק למדי שנקרא "רגולריות אליפטית", אפשר אפילו להראות שהפונקציה הממוזערת חלקה C^∞ בתוך D. אלה טיעונים כלליים יחסית, שלא קשורים דווקא לצורה הספציפית של אינטגרל דיריכלה. בפרק 7 מוסבר למה הפונקציה הממוזערת x מקיימת ש־ $x|_C$ הומאומורפיזם על Γ.

למה דווקא הפונקציה $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ שממזערת את אינטגרל דיריכלה נותנת לנו משטח מינימלי? נראה ראשית שזו פונקציה הרמונית. תהי $y : D \to \mathbb{R}^n$ פונקציה חלקה כלשהיא, עם תומך קומפקטי ב־ D. אזי לכל $\varepsilon \in (-1, 1)$,

$$\int_D \left[\left\| \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\|^2 \right] = \mathcal{D}[x] \le \mathcal{D}\left[x + \varepsilon y\right] = \int_D \left[\left\| \frac{\partial x}{\partial u_1} + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial u_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial x}{\partial u_2} + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial u_2} \right\|^2 \right]$$

בפרט, לפונקציה $\varepsilon \mapsto \mathcal{D}\left[x + \varepsilon y\right]$ יש מינימום מקומי בראשית, והנגזרת הראשונה שלה שם מתאפסת. מגזירה מתחת לסימן האינטגרל (למה מותר?) מקבלים,

$$\int_D 2\left[\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial y}{\partial u_1}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial y}{\partial u_2}\right\rangle\right] du_1 du_2 = 0.$$

נפעיל אינטגרציה בחלקים ביחס ל־u_1 עבור המחובר הראשון, וביחס ל־ u_2 עבור המחובר השני. לפונקציה $y : D \to \mathbb{R}^n$ יש תומך קומפקטי ב־ D, כך שגורמי השפה של האינטגרציה בחלקים ־ יתאפסו. נקבל:

$$-2\int_D \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}, y\right\rangle du_1 du_2 = 0.$$

כלומר, הלפלסיאן $\Delta x = \partial^2 x/\partial u_1^2 + \partial^2 x/\partial u_2^2$ בהכרח מתאפס ב־ D, שכן האינטגרל של המכפלה שלו עם y מתאפס, כאשר y פונקציה חלקה שרירותית עם תומך קומפקטי ב־ D. לכן x הרמונית. נותר להראות ש־ x משרה קואורדינטות איזותרמיות, כלומר שהפונקציות $\phi_k = \frac{\partial x}{\partial u_1} - i\frac{\partial x}{\partial u_2}$ מקיימות ש־

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_k^2 = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

נשים לב שהפונקציות $\phi_1, \ldots, \phi_n : D \to \mathbb{C}$ הולומורפיות, מכיוון ש־ $x_1, \ldots, x_n$ הרמוניות. כדי להוכיח את **(1)** נעבור לקואורדינטות קוטביות $u_1 = r\cos\varphi, u_2 = r\sin\varphi$. כעת, נחליף משתנים ונביט ב־ $x(\varphi, r)$ כפונקציה של φ ו־ r. נבטא את אינטגרל דיריכלה בקואורדינטות קוטביות:

$$\mathcal{D}[x] = \int_D \left[\left\|\frac{\partial x}{\partial u_1}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial x}{\partial u_2}\right\|^2\right] du_1 du_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\left\|\frac{\partial x}{\partial r}\right\|^2 + \frac{1}{r^2}\left\|\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\|^2\right] r dr d\varphi.$$

במקום הפרטורבציה הפנימית של x שבדקנו קודם (כלומר, $x + \varepsilon y$, כש־ y עם תומך קומפקטי בדיסק), ננסה עתה פרטורבציית סיבוב. נניח שהפונקציה $x_\varepsilon : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ מקיימת

$$x_\varepsilon(r, \theta) = x(r, \theta + \varepsilon\lambda(r, \theta)) \qquad \textbf{(2)}$$

כאשר λ היא פונקציה סקלרית חלקה כלשהיא שמקיימת $\lambda(r, 0) = 0$. עבור ε קטן מספיק, הפונקציה $\theta \mapsto \theta + \varepsilon\lambda(r, \theta)$ משרה פונקציה מונוטונית־ממש על המעגל,

הומאומורפיזם של המעגל על עצמו. לכן $x_\varepsilon|_C$ הומאומורפיזם על Γ. מכאן, שעבור ε קרוב מספיק לאפס,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\left\|\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial r}\right\|^2 + \frac{1}{r^2}\left\|\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial \theta}\right\|^2\right] rdrd\theta = \mathcal{D}[x_\varepsilon] \geq \mathcal{D}[x]$$

הנגזרת באפס של אגף שמאל מתאפסת בראשית (ביחס ל־ ε). לאור הנוסחא (2) נסמן $\varphi(r,\theta) = \theta + \varepsilon\lambda(r,\theta)$ וכמובן $x_\varepsilon(r,\theta) = x(r,\varphi)$, נקבל

$$\left\|\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial r}\right\|^2 + \frac{1}{r^2}\left\|\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial \theta}\right\|^2 = \left\|\frac{\partial x}{\partial r} + \varepsilon\frac{\partial \lambda}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\|^2 + \frac{|1+\varepsilon(\partial\lambda/\partial\theta)|^2}{r^2}\left\|\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\|^2$$

כאשר x ונגזרותיו מחושבים ב־ (r,φ) ואילו λ ונגזרותיה מחושבים ב־ (r,θ). אפשר לחשוב על $r,\theta,\varphi,x,x_\varepsilon$ כעל חמש קואורדינטות או פונקציות על איזו יריעה דו־ממדית, שמגדירה את הקשרים ביניהם. כאמור, כשגוזרים את x, חושבים עליו כעל פונקציה של (r,φ), ואילו אל λ מתייחסים כאל פונקציה של (r,θ). נעבור לאינטגרל במשתנים (r,φ) ונקבל:

$$\mathcal{D}[x_\varepsilon] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\{\left\|\frac{\partial x}{\partial r} + \varepsilon\frac{\partial \lambda}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\|^2 + \frac{|1+\varepsilon(\partial\lambda/\partial\theta)|^2}{r^2}\left\|\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\|^2\right\}\frac{r}{1+\varepsilon(d\lambda/d\theta)}drd\varphi$$

מגזירה תחת סימן האינטגרל,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[2\frac{\partial \lambda}{\partial r}\left\langle\frac{\partial x}{\partial r},\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\rangle - \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\left\|\frac{\partial x}{\partial r}\right\|^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{r^2}\left\|\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\|^2\right] rdrd\varphi = 0$$

נבצע אינטגרציה בחלקים, כדי להעביר נגזרות מ־ λ לגורמים אחרים:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \lambda\left[2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left\langle\frac{\partial x}{\partial r},\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\left\|\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\|^2 - r\left\|\frac{\partial x}{\partial r}\right\|^2\right)\right] drd\varphi = \int_0^{2\pi} 2\lambda r\left\langle\frac{\partial x}{\partial r},\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\rangle d\varphi\Big|_{r=1}$$

ליתר דיוק, כשמציבים $r=1$, הכוונה היא בעצם לגבול $r\to 1^-$, כי אנו רשאים לגזור רק בפנים הדיסק. כבר יודעים ש־ $\Delta x = x_{rr} + x_r/r + x_{\varphi\varphi}/r^2 = 0$ (כתבנו את הלפלסיאן בקואורדינטות קוטביות). לכן האינטגרנד באגף שמאל מתאפס:

$$2x_r \cdot x_\varphi + 2r(x_{rr} \cdot x_\varphi) + 2r(x_r \cdot x_{r\varphi}) + \frac{2}{r}(x_{\varphi\varphi} \cdot x_\varphi) - 2r(x_{r\varphi} \cdot x_r) = 2r(\Delta x \cdot x_\varphi) = 0$$

בדיעבדת זה לא כל כך מפתיע שהאינטגרנד מתאפס בפנים העיגול D, כי כבר מיצינו את כל המידע שאפשר לקבל מפרטורבציות פנימיות ב־ D , וראינו את הקשר להתאפסות הלפלסיאן. התרומה החדשה כאן היא גורם השפה: קיבלנו שלכל λ חלקה עם $\lambda(r,0) = 0$,

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} 2\lambda r \left\langle \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right\rangle d\varphi = 0$$

כלומר, ככל שמתקרבים לשפה, המכפלה הסקאלרית $\langle x_r, x_\varphi \rangle$ הולכת ומתקרבת לאפס.

נסמן $z = u_1 + iu_2$, משתנה מרוכב. עתה,

טענת עזר: $\operatorname{Im}\left(z^2 \sum_k \phi_k^2(z)\right) = -2r \left\langle \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right\rangle$

מטענת העזר נובע שהקואורדינטות איזותרמיות: החלק המדומה של הפונקציה ההולומורפית $z^2 \sum_k \phi_k^2(z)$ מקבל מקסימום ומינימום בשפה הדיסק, אבל שואף לאפס בשפה. לכן החלק המדומה מתאפס בכל הדיסק (כדי להצדיק את עיקרון המקסימום כאן, צריך להכיר את נושא ערכי השפה של פונקציות הולומורפיות בדיסק היחידה, ראו למשל פרק 3 בספר של Katznelson בשם Introduction to Harmonic Analysis, שלפעמים לומדים בקורס בשם זה בשנה ג'). מהולומורפיות, הפונקציה $z^2 \sum_k \phi_k^2(z)$ קבועה, ובהכרח מתאפסת, כמבוקש. נותר רק להוכיח את טענת העזר.

הוכחת טענת העזר: כזכור, נהוג לסמן $\partial f/\partial z = (\partial f/\partial u_1 - i\partial f/\partial u_2)/2$. עתה,

$$z^2 \sum_k \phi_k^2(z) = 4z^2 \sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial z}\right)^2 = 4\sum_k \left(\left.\frac{\partial x_k(e^t z)}{\partial t}\right|_{t=0}\right)^2$$

כאשר $t = t_1 + it_2$ משתנה מרוכב חדש. מכיוון ש־ $\partial/\partial t = (\partial/\partial t_1 - i\partial/\partial t_2)/2$,

$$z^2 \sum_k \phi_k^2(z) = \sum_k \left(\left.\frac{\partial x_k(e^{t_1} z)}{\partial t_1}\right|_{t_1=0} - i\left.\frac{\partial x_k(e^{it_2} z)}{\partial t_2}\right|_{t_2=0}\right)^2 = \sum_k \left(r\frac{\partial x_k}{\partial r} - i\frac{\partial x_k}{\partial \varphi}\right)^2$$

ולכן, $\operatorname{Im}(z^2 \sum_k \phi_k^2(z)) = -2\sum_k r\frac{\partial x_k}{\partial r}\frac{\partial x_k}{\partial \varphi}$, כמבוקש.