

מבחן בחדו"א 1

משך המבחן: שלוש שעות. השימוש בכל חומר עזר אסור, כולל מחשבון.

יש לענות על בדיוק שאלה אחת מחלק א' ובדיוק שלוש שאלות מחלק ב'.
חלק ג' הוא רשות.
נא לסמן, בעמוד הראשון במחברת הבחינה, אילו שאלות בחרתם.
עליכם לצטט, במדויק, כל משפט מהשיעור או התרגול בו הנכם משתמשים.

שימו לב: בכל סעיף, תשובה לא נכונה תזכה אתכם ב-0 נקודות. תשובה ריקה תזכה אתכם ב- 20% משווי הסעיף. **בהצלחה!!**

חלק א'

יש לענות על שאלה אחת מבין השתיים הבאות.

שאלה 1: (25 נקודות)

הוכיחו את משפט ערך הביניים: תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונתון $f(a) < 0 < f(b)$. אזי קיים $a < x_0 < b$ כך ש- $f(x_0) = 0$.

שאלה 2: (25 נקודות)

(א) (15 נקודות) הוכיחו את משפט דרבו: תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה בקטע (a, b) , גזירה מימין ב- a וגזירה משמאל ב- b . נניח שעבור $c \in \mathbb{R}$ מתקיים $f'_+(a) < c < f'_-(b)$. אזי קיים $a < x_0 < b$ כך ש- $f'(x_0) = c$.

(ב) (10 נקודות) תנו דוגמא לפונקציה גזירה (בכל נקודה) ושנגזרתה איננה רציפה.

חלק ב'

יש לענות על שלוש שאלות מבין הארבע הבאות.

שאלה 3: (25 נקודות)

הוכיחו את אי-השוויון

$$\left(\ln(1+x) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^k}{k} \right) (-x)^{n+1} \leq 0$$

עבור $x > -1$

שאלה 4: (25 נקודות)

(א) (15 נקודות) נתונה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה בכל \mathbb{R} ונגזרתה רציפה.

נתונה גם $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. הראו כי

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+g(x)) - f(g(x))}{x} = f'(0)$$

(ב) (10 נקודות) נתונה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה בנקודה $x_0 = 0$. נתונה גם

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $|g(x)| \leq |x|$. הראו כי

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+g(x)) - f(g(x))}{x} = f'(0)$$

שאלה 5: (25 נקודות)

נתונה סדרה a_n , ונתון שהמספרים 2008 ו-2009 הם גבולות חלקיים של הסדרה. כמו-כן נתון שלכל n מתקיים $|a_{n+1} - a_n| \leq 1/2$. הוכיחו כי ל- a_n לפחות שלושה גבולות חלקיים.

שאלה 6: (25 נקודות)

(א) (10 נקודות) הוכיחו את אי השוויון הבא עבור $a > 0, b > 0$

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln\left(\frac{a}{b}\right) \leq \frac{a-b}{b}$$

(ב) (10 נקודות) הוכיחו שהטור הבא מתכנס

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \ln\left(\frac{j+1}{j}\right) \right)$$

(ג) (5 נקודות) הוכיחו שהגבול הבא קיים וסופי*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(n) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right)$$

חלק ג'

שאלה 7: (10 נקודות)

(א) (5 נקודות) יהי $\alpha \in \mathbb{Q}$ חתך דדקינד, ונתון $\alpha \geq 0^*$. הגדירו את $-\alpha$ והראו שהוא חתך.

(ב) (5 נקודות) הראו כי $(-\alpha) + \alpha = 0^*$.

*גבול זה נקרא מינוס קבוע אוילר. אף אחד לא יודע אם הוא רציונלי או לא.