להלן הוכחה (מהספר של מייזלר) שלכל מספר ממשי חיובי יש שורש. ההוכחה משתמשת בכך ש־ $\mathbb{R}$ שדה סדור, ושלכל קבוצה חסומה מלעיל יש סופרימום (כלומר, תכונת השלמות). נשתמש בעובדות הפשוטות הבאות (שנכונות לכל שדה סדור):

(i) $0 \le x \le 1 \Rightarrow x^n \le x$.

(ii) $0 \le x < y \Rightarrow x^n < y^n$. מסקנה מכך היא שאם $x, y \ge 0$ מקיימים $x^n \le y^n$, אזי בהכרח $x \le y$.

(iii) אי־שיוויון ברנולי: $(1+x)^n \ge 1 + nx$ לכל $x \ge -1, n \in \mathbb{N}$.

<u>משפט:</u> יהי $\alpha > 0$ מספר ממשי ו־ n מספר טבעי. אזי קיים מספר ממשי $x > 0$ כך ש־ $x^n = \alpha$.

הוכחה: נסמן ב־

$$S = \{y \in \mathbb{R}; 0 \le y, y^n \le \alpha\}.$$

ברור ש־ S לא ריקה (היא מכילה את אפס). נראה ש־ S חסומה מלעיל. למעשה, $\alpha + 1$ הוא חסם מלעיל, שכן

$$\forall y \in S, \quad y^n \le \alpha \le \alpha + 1 \le (\alpha+1)^n$$

ולכן כל $y \in S$ מקיים ש־ $y \le \alpha + 1$. מכאן ש־ S קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל, ויש לה סופרימום. נסמן:

$$x = \sup S.$$

נראה ש־ x הוא אכן המספר המבוקש. צריך להראות ש־ $x > 0$ וש־ $x^n = \alpha$.

למה $x > 0$? ראשית, נראה ש־ $\alpha/(\alpha+1) \in S$. אכן,

$$\left(\frac{\alpha}{(\alpha+1)}\right)^n \le \frac{\alpha}{\alpha+1} \le \alpha$$

ומכאן ש־ $\alpha/(\alpha+1) \in S$. מהגדרת x כסופרימום, $x \ge \alpha/(\alpha+1) > 0$. (את השלב הזה לא כל כך הראיתי בכיתה, הסתפקתי בכך ש־ $x \ge 0$. זה היה לא בסדר, בעיקר כי משתמשים בחיוביות x בהמשך).

למה $x^n = \alpha$? זה נראה ברור, אבל ההוכחה הפורמלית היחידה שאני רואה כרגע נראית ככה: נוכיח ש־ x^n לא יכול להיות גדול מ־ α, וגם לא יכול להיות קטן מ־ α. מכאן נסיק שבהכרח $x^n = \alpha$.

1. נניח בשלילה ש־ $x^n < \alpha$. נמצא $y \in S$ שמקיים $x < y$ וגם $y \in S$. נסמן $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\alpha - x^n}{n\alpha}\}$. כמובן ש־ $\varepsilon \le 1/2 < 1$. מכיוון ש־ $\alpha - x^n > 0$, אנחנו גם יודעים ש־ $\varepsilon > 0$. עתה, נגדיר $y = x/(1-\varepsilon)$. אזי $y > x$, כי חילקנו את x (שהוא מספר חיובי) במספר חיובי קטן מ־ 1. ברור גם ש־ $y > 0$. בנוסף, $n\alpha\varepsilon \le \alpha - x^n$ מהגדרת ε, ומכאן ש־ $1 - n\varepsilon \ge x^n/\alpha$. לכן, מאי־שיוויון ברנולי,

$$y^n = \frac{x^n}{(1-\varepsilon)^n} \le \frac{x^n}{1-n\varepsilon} \le \frac{x^n}{x^n/\alpha} = \alpha,$$

וקיבלנו ש־ $y \in S$. לסיכום, מצאנו איבר $y \in S$ שהוא גדול ממש מ־ x. לכן x אינו חסם מלעיל ל־ S, בסתירה להגדרת $x = \sup S$.

2. נניח בשלילה ש־ $x^n > \alpha$. נמצא מספר y, שמהווה חסם מלעיל ל־ S, כך ש־ $y < x$. נסמן $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}, \frac{x^n-\alpha}{nx^n}\}$. כמובן ש־ $\varepsilon \leq 1/2 < 1$. מכיוון ש־ $x^n - \alpha > 0$, אנחנו גם יודעים ש־ $\varepsilon > 0$. עתה, נגדיר $y = x(1-\varepsilon)$. אזי $y < x$, כי הכפלנו את x (שהוא מספר חיובי) במספר חיובי קטן מ־ 1. ברור גם ש־ $y > 0$. בנוסף, $nx^n\varepsilon \leq x^n - \alpha$ מהגדרת ε, ומכאן ש־ $x^n(1-n\varepsilon) \geq \alpha$. לכן, מאי־שיוויון ברנולי,

$$y^n = x^n(1-\varepsilon)^n \geq x^n(1-n\varepsilon) \geq \alpha.$$

אנו מסיקים ש־ y הוא חסם מלעיל ל־ S: לכל $z \in S$ מתקיים $z^n \leq \alpha \leq y^n$, ומכאן ש־ $z \leq y$. לסיכום, מצאנו מספר y שהוא קטן יותר מ־ x, ומהווה חסם מלעיל ל־ S. זו סתירה לכך ש־ x הוא החסם מלעיל המינימלי של S.

$\square$