חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב - פתרון תרגיל 12.

1

א

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

ראשית עבור $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\sin y}{x^2+y^2}+x\sin y\cdot\frac{(-2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x\cos y}{x^2+y^2}+x\sin y\,\frac{(-2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

אם $(x,y)=(0,0)$ נחשב ישירות לפי ההגדרה

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0\end{cases}$$

ב

$$(x\neq 0)\qquad f(x,y)=e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}=$$

$$=\left[-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right]e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}=$$

$$=-\frac{y}{x^2+y^2}\,e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\,e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

③ $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נגדיר

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \to \sum f_i(x_i)$$

④ נראה כי

f_i דיפרנציאביליות ($i = 1, \dots, n$) $\Rightarrow$ f דיפרנציאבילית.

~~תזכורת:~~

~~ידוע שפונקציה דיפרנציאבילית $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ב-$x \in \mathbb{R}^n$ אם קיימים $A_1, \dots, A_n$ כך ש~~

~~$f(x_1+\Delta x_1, x_n)$~~

תזכורת

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב-$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ אם קיימים $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ כך ש

$$f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum A_i x_i + O(|\Delta x|^2)$$

כאשר $g \in O(|x|^2)$ אם $\frac{g(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$

לפי ההנחה קיימים $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ כך ש

$$g_i(\Delta x) = f_i(x_i + \Delta x_i) - f(x_i) - A_i x_i$$

מקיים

$$\frac{g_i(\Delta x)}{|\Delta x|^2} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

בפרט לפי המשפט

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i)$$

לכן, הטענה נכונה אם נראה כי

$$f(x_1+\Delta x_1,\dots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_n)-\sum f_i'(x_i)\Delta x_i =$$

$$= \sum g_i(\Delta x_i)$$

מקיים

$$\frac{\sum g_i(x_i)}{\|(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\|} \xrightarrow[\Delta x_i\to 0]{} 0$$

נראה:

טענת עזר: $g_1,\dots,g_n$ פונקציות ($\mathbb{R}\to\mathbb{R}$)

$$\frac{g_i(x)}{|x|^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{לכל } i=1,\dots,n \quad \Rightarrow \quad \frac{g_1(x_1)+\dots+g_n(x_n)}{x_1^2+\dots+x_n^2} \xrightarrow[x_i\to 0]{} 0$$

הסבר:

$$\frac{g_1(x_1)+\dots+g_n(x_n)}{x_1^2+\dots+x_n^2} = \frac{g_1(x_1)}{x_1^2+\dots+x_n^2}+\dots+\frac{g_n(x_n)}{x_1^2+\dots+x_n^2}$$

ולפי סנדוויץ'

$$0 < \left|\frac{g_i(x_i)}{x_1^2+\dots+x_n^2}\right| < \frac{g(x_i)}{x_i^2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \searrow$$

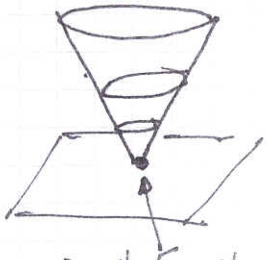
$$0 \qquad\qquad 0$$

לכל $i=1,\dots,n$.

4 ב $f(x)=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ $(x=(x_1,\dots,x_n))$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}$$

שימו לב לציור הבא:



אפשר לראות חוסר דיפ'

מוגדרות בכל $0 \neq X = (x_1, \dots, x_n)$ הנגזרות החלקיות

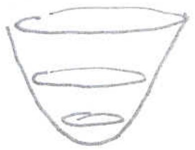
רציפות $\Longleftarrow$ f דיפרנציאבילית.

f אינה דיפרנציאבילית בראשית.

$$g_{\bar{a}}(x) = f(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) - \sum a_i \Delta x_i$$

לא יכולה להיות ב- $O(|\Delta x|^2)$ לאף $a_1, \dots, a_n$.

דוגמא



ב) לדוגמא בראשית $x_0 = (0, \dots, 0)$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

הנגזרות רציפות בכל המרחב $\Leftarrow$ f דיפרנציאבילית

$$df = x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n$$

5)

א)

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}} \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt{(x^3+y^3)^2}}$$

מוגדרות הן ורציפות כאשר $(x,y) \neq (0,0)$. בנוסף

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3}}{\Delta x} = 1 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta y^3}}{\Delta y} = 1$$

נסמן

$$g(\Delta x, \Delta y) := f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - \Delta x - \Delta y$$

$$= \sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} - \Delta x - \Delta y$$

נראה כי $g(\Delta x,\Delta y)$ אינה $o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$ נקח מסלול מיוחד.

$$\Delta x = \Delta y \longrightarrow 0$$

במסלול זה

$$\frac{g(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{\sqrt[3]{2\Delta x^3} - 2\Delta x}{\sqrt{2\Delta x^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}} \cancel{\frac{\Delta x}{\Delta x}} \neq 0 \,!$$

הערה: שימו לב כי במעבר אחד $f(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$

גזירה. בניגוד ל- $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ שאינה גזירה).

הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$.

(2)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

עבור $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

ב- $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$x=y$ אינו
רציפות
בנקודה

$x\to 0$
$y=0$
$y\to 0$
$x=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

נסמן

$$g(\Delta x,\Delta y)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-0\cdot\Delta x-0\Delta y=f(\Delta x,\Delta y)$$

1.5
דיפרנ'
בבדיקה

$$\frac{g(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \xrightarrow[\Delta x=\Delta y\to 0]{} \frac{2\Delta x^2}{2\Delta x^2}\cdot\frac{1}{\Delta x}\to\infty$$

$$\frac{g(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3+\Delta y^3} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \underset{\Delta x = \Delta y}{=} \frac{\sqrt[3]{2}\,\Delta x - 2\Delta x}{\sqrt{2}\,\Delta x} \neq 0$$

$$\frac{g^2}{\Delta x^2+\Delta y^2} = \frac{\Delta x^2+\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2} - \frac{2\Delta x\Delta y - \sqrt[3]{(\Delta x^3+\Delta y^3)^2}}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$\left(\frac{2\Delta x \Delta y - \sqrt[3]{(\Delta x^3+\Delta y^3)^2}}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$