תרגיל 12 - חלק II

5 (א) $f(x,y)=(x^3+y^3)^{1/3}$ דיפרנציאבילית בכל נקודה $(x,y)\neq(0,0)$

כי תהיה בעלת נגזרות חלקיות רציפות שם. (לגזור ולבדוק...)

עבור $(0,0)$: נבדוק קיום נגזרות חלקיות לפי הגדרה:

$$f'_x(0,0) \stackrel{?}{=} \lim_{h\to0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(h^3)^{1/3}-0}{h}=1$$

בדומה $\exists f'_y(0,0)=1$. אם f דיפר' ב- $(0,0)$ הרי ש-

$$f(x,y)=\underbrace{f(0,0)}_{0}+\underbrace{1}_{f'_x(0,0)}\cdot x+\underbrace{1}_{f'_y(0,0)}\cdot y + w(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

כאשר $w(x,y)\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$.

$$(x^3+y^3)^{1/3}=x+y+w(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

נבדוק זאת:

$$w(x,y)=\frac{(x^3+y^3)^{1/3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\substack{x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta}}{=} \frac{\cancel{\rho}[(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^{1/3}-\cos\theta-\sin\theta]}{\cancel{\rho}}$$

ראינו ש- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} w(x,y)=\lim_{\rho\to0} w(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ ← לא קיים! תלוי בזווית θ

בפרט $\lim_{(x,y)\to(0,0)} w(x,y)\neq0$ לכן אין דיפרנציאביליות.

(ב) $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. ב- $(x,y)\neq(0,0)$ דיפר' מרציפות נגזרות חלקיות.

ב- $(0,0)$ נבדוק קיום נגזרות חלקיות:

$$f'_x(0,0)\stackrel{?}{=}\lim_{h\to0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$ ← לופיטל

בדומה $\exists f'_y(0,0)=0$. תנאי דיפרנציאביליות אומר:

$$f(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}=\cancel{f(0,0)}+\cancel{0\cdot x}+\cancel{0\cdot y}+w(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$w(x,y)=\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\substack{x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta}}{=} \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\rho}\xrightarrow{\rho\to0}0$$

יש דיפרנציאביליות.

(ג)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

מנק' $(x,y)\neq(0,0)$ נחשב:

$$f'_x(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot y-xy\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y(x^2+y^2)-yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

ובדומה
$$f'_y(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

f_x, f_y רציפות בנקודה $(x,y)\neq(0,0)$ ולכן f דיפ' שם.

ב- $(0,0)$:
$$f'_x(0,0)\overset{?}{=}\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

וכן $\exists f'_y(0,0)=0$.

נבדוק דיפ' מהגדרה:
$$f(x,y)=f(0,0)+0x+0y+w(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$w(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}w(x,y)=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}=\cos\theta\sin\theta$$

$x=\rho\cos\theta$
$y=\rho\sin\theta$

תלוי ב- θ, לכן הגבול הכפול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} w(x,y)$ לא קיים!

לכן f לא דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

---

6 (א) באופן כללי, אם $z(\rho,\theta)=f(x(\rho,\theta),y(\rho,\theta))$
כאשר f דיפ' ו- $x(\rho,\theta)$, $y(\rho,\theta)$ גזירות נקבל מכלל השרשרת:

$$\frac{\partial z}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}$$

$$f(x,y)=x^2y-y^2x\ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x}=2xy-y^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2-2xy$$

$$x(\rho,\theta)=\rho\cos\theta\ \to\ \frac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-\rho\sin\theta$$

$$y(\rho,\theta)=\rho\sin\theta\ \to\ \frac{\partial y}{\partial\rho}=\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=\rho\cos\theta$$

נציב הכל:

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \underbrace{(2\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta - \rho^2\sin^2\theta)}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x(\rho,\theta),y(\rho,\theta))}\cdot\underbrace{\cos\theta}_{\frac{\partial x}{\partial \rho}} + (\rho^2\cos^2\theta - 2\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta)\cdot\sin\theta$$

$$\cancel{= \rho^2(\sin 2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta + \rho^2(\cos^2\theta - \sin 2\theta)\sin\theta}$$

$$= \rho^2\sin\theta\cos\theta\,(2\cos\theta - \sin\theta + \cos\theta - 2\sin\theta)$$

$$= \rho^2\sin\theta\cos\theta\,(3\cos\theta - 3\sin\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = (2\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta - \rho^2\sin^2\theta)\cdot(-\rho\sin\theta) +$$

$$+ (\rho^2\cos^2\theta - 2\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta)\cdot(\rho\cos\theta) =$$

$$= \rho^3[\sin^2\theta(2\cos\theta - \sin\theta) + \cos^2\theta(\cos\theta - 2\sin\theta)]$$

(ב)

$$u(x,y) = \sin x + f(\sin y - \sin x)$$

$$u_x = \cos x + f'(\sin y - \sin x)\cdot(-\cos x) \qquad /\cdot\cos y$$

$$u_y = f'(\sin y - \sin x)\cdot\cos y \qquad /\cdot\cos x$$

נחבר: $\cos y\cdot u_x + \cos x\cdot u_y = \cos x\cdot\cos y + 0$

7) מהמשפט ידוע כי אם $f,g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ דיפרנציאביליות ב- $\underline{x}^\circ\in\mathbb{R}^d$, $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב- $(f(\underline{x}^\circ),g(\underline{x}^\circ))$ אז $\underline{x}\mapsto\varphi(f(\underline{x}),g(\underline{x}))$ דיפרנציאבילית ב- $\underline{x}^\circ$.

(א) נקח $\varphi(x,y)=x\pm y$ ו- $\varphi(x,y)=x\cdot y$ בהתאמה - הן דיפרנציאביליות (למשל כי הנגזרות החלקיות רציפות).

(ב) אם $g(\underline{x}^\circ)>0$ אז $\varphi(x,y)=\frac{x}{y}$ דיפר' בנק' $(f(\underline{x}^\circ),g(\underline{x}^\circ))$ (שוב כי הנגזרות החלקיות רציפות בסביבתה).
בדומה עם $\varphi(x,y)=x^y$ דיפר' ב- $(f(\underline{x}^\circ),g(\underline{x}^\circ))$.

(ג) כאן $\varphi(x)=\psi(f(x),g(x))$ כאשר $\psi(f,g)=\langle f,g\rangle$

בקורדינטות של $\mathbb{R}^k$: $f=(f_1,\dots,f_k)$, $g=(g_1,\dots,g_k)$ $\Leftarrow$ $\psi(f,g)=\sum_{i=1}^{k} f_i g_i$

כמובן, ψ היא פונקציה דיפרנציאבילית (כהרכבה של כאלה, או לפי רציפות הנגזרות)

לכן $\psi(f(x),g(x))$ דיפרנציאבילית ב- $x \in \mathbb{R}^d$

(כזכור, $f,g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ מהמכפלה הפנימית $\psi:\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$)

נרשום $f(x) = (f_1(x),\dots,f_k(x))$

$g(x) = (g_1(x),\dots,g_k(x))$. מכלל השרשרת:

$\psi = \psi(f(x),g(x))$

$$D_x\psi(h) = D_f\psi \cdot D_x f(h) + D_g\psi \cdot D_x g(h)$$

$$D_f\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial f_1},\dots,\frac{\partial\psi}{\partial f_k}\right) = (g_1,\dots,g_k)\Big|_x = g(x)$$

$\psi = \sum_{i=1}^k f_i g_i$ מחושבים בנקודה x, כמובן

בדומה $D_g\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial g_1},\dots,\frac{\partial\psi}{\partial g_k}\right) = \underbrace{(f_1,\dots,f_k)\Big|_x}_{f(x)}$.

לכן: $D_x\psi(h) = \langle g(x), D_x f(h)\rangle + \langle f(x), D_x g(h)\rangle$

או: $= \sum_{i=1}^k \left[g_i(x) f_i'(x) h_i + f_i(x) g_i'(x) h_i\right]$

(8)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^{10}+y^2}, & \text{אחרת} \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

האם f רציפה ב-$(0,0)$? נחשב גבול כשמתקרבים ל-$(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^{10}+y^2} = \begin{bmatrix} \text{נציב} \\ y=kx^5 \\ x\to 0 \end{bmatrix} \underset{\text{אם קיים}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{kx^8}{x^{10}+k^2x^{10}} = \frac{k}{1+k^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$$

לכן אין רציפות ב- $(0,0)$ [הגבול $\neq f(0,0)$ ואפילו לא קיים...]

__הערה:__ ראינו ש-f לא חסומה כי יש כיוונים שבהם שואפים ל-0 והפונקציה שואפת ל-∞.

__נגזרות כיווניות:__ מהגדרה, $\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$

לכן קיים $f'_x(0,0)=0$.

בדומה קיים $f'_y(0,0)=0$ - למרות הכל הן קיימות!

(9) $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ דיפר' ב-$\mathbb{R}^n$, הומוגנית ממעלה λ

(כלומר $f(ax)=a^\lambda f(x)$ לכל $0\le a$ ולכל $x\in\mathbb{R}^n$).

(א) נקח דיפרנציאל לפי x: $d(f(ax)) = a\cdot df_{ax} = a^\lambda df_x$

[אם תרצו, בצורה מפורשת:
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(ax)\cdot a+\frac{\partial f}{\partial x_2}(ax)\cdot a+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(ax)\cdot a = a^\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$
]

כלומר $df_{ax}=a^{\lambda-1}df_x$. אם $\lambda-1<0$, אז לא יתכן
אינו דיפרנציאבילי בראשית (נקח $a=0$ ו-x כלשהו, אז לא יתכן
שגבול df_0 מוגדר וסופי אבל $a^{\lambda-1}$ לא, ו-df_x סופי ולא
יכול לבטל את $a^{\lambda-1}$). סתירה. לכן $\boxed{\lambda-1\ge 0}$.

(ב) נגזור לפי a: מכלל השרשרת -
מה שמופיע בקורדינטה ה-j

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(ax)\cdot\frac{\partial(ax_j)}{\partial a}=\lambda a^{\lambda-1}f(x)$$

$$\sum\frac{\partial f}{\partial x_j}(ax)\cdot x_j=\lambda a^{\lambda-1}f(x)$$

נסמן $y=ax$

$$\sum\frac{\partial f}{\partial x_j}(y)\cdot\frac{y_j}{a}=\lambda a^{\lambda-1}f\left(\frac{y}{a}\right)$$

אבל ממשוואת ההומוגניות במקרה זה $f(y)=a^\lambda f\left(\frac{y}{a}\right)$

$$\Rightarrow f\left(\frac{y}{a}\right)=\frac{f(y)}{a^\lambda}$$

$$\Rightarrow \sum\frac{\partial f}{\partial x_j}(y)\cdot\frac{y_j}{a}=\lambda a^{\lambda-1}\cdot\frac{f(y)}{a^\lambda}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(y)\cdot y_j=\lambda f(y)}$$