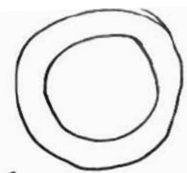
חדו"א 2

פתרון לתרגיל 13

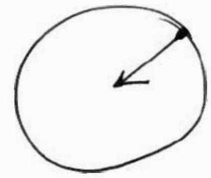
① א. קווי גובה הם איחודים של מעגלים.



$$\{f(x,y)=c\} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \in \varphi^{-1}(c)\} = \bigcup_{\alpha\in\varphi^{-1}(c)} \{x^2+y^2=\alpha\}$$

$f(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$

הגרדיאנט מצביע במאונך לקווי הגובה באחד הכוונים:



(או שווה 0 כמו ב- $f(x,y)\equiv 0$ (צ"ל $\varphi\equiv 0$)

כמו ב- $f(x,y)=x^2+y^2$

כמו ב- $f(x,y)=-x^2-y^2$

ב. דוגמה רק עם קווים ישרים דרך הראשית במקום מעגלים. (ו- $\{y=0\}$ מחוץ לתחום ההגדרה).

② $u(x,y) = f(x)g(y)$

$\partial \quad u_x = f_x g \qquad u_y = f g_y$

$u_{xy} = f_x g_y$

$u_x u_y = f_x g f g_y$

$u u_{xy} = f g f_x g_y$

$\Rightarrow \quad u u_{xy} - u_x u_y = 0.$

③

$0 = \partial^{xy} u = \partial^x(\partial^y u)$

$\Rightarrow \quad \partial^y u = f(y)$

$\Rightarrow \quad u(x,y) = F(y) + G(x)$

$F(y) = \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy$ F - גזירה פעמיים ברציפות כי

כש- f גזירה פעם אחת ברציפות.

ו- G גזירה פעמיים ברציפות כהפרש של u ו- F.

כי אז $G(x) = u(x,y_0)$

ולהיפך אם F, G גזירות פעמיים ברציפות אז ל- $u(x,y) = F(x) + G(y)$

מתקיים $\partial^{xy} u = 0$

④ היה בשיעור: הנה הרשימות המתאימות.

__שוורץ__: $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{a}{b} \in E^\circ$ אם קיימות הנגזרות f_{xy}

ו- f_{yx} בסביבה V של $\binom{a}{b}$ ובנוסף f_{xy}, f_{yx} רציפות ב- $\binom{a}{b}$

אז: $f_{xy}\binom{a}{b} = f_{yx}\binom{a}{b}$.

__דוגמה__: $f = x^2y$. $f_x = 2xy$, $f_{xy} = 2x$, $f_{yx} = 2x$ (בכל נק' ב- $\mathbb{R}^2$)

הנגזרות הנ"ל קיימות ורציפות ולכן, לפי שוורץ, שוות.

__דוגמה__: האם אפשר לוותר על חלק מהתנאים? לא! למשל:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \end{cases}$$

ידוע

הוכיחו כי $f_{xy} = -1$, $f_{yx} = +1$.

$$f_x\binom{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\left. xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 0\right|_{y=0}}{x-0} = 0$$

$$f_x\binom{x}{y} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}\left[x^2-y^2 + \frac{x \cdot 4xy^2}{x^2+y^2}\right] =$$

$$\cancel{= \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\left[x^4 - y^4 + 4x^2y^2\right]}$$

$$f_x\binom{x}{y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\cdot\left[x^4+2x^2y^2+y^4-2y^4\right] = y\cdot\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^5}{(x^2+y^2)^2} = y\cdot\left[1-2\cdot\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2\right]$$

(שימו לב שזו פונ' רציפה בכל מקום – גם בראשית.)

נגזור לפי y;

$$\boxed{f_{xy}\binom{0}{0}} = \lim_{y\to0}\frac{f_x\binom{0}{y}-\cancel{f_x\binom{0}{0}}^{=0}}{y-0} = \lim_{y\to0}\left[1-2\right] = \boxed{-1}$$

$$f_{xy}\binom{x}{y} = \left[1-2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2\right] + y\frac{d}{dy}\left[1-2\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right)^2\right] = \left[\dots\right] + -2y\cdot\frac{d}{dy}\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{-2} =$$

$$= \left[\dots\right] + \underbrace{y\cdot(-2)}_{\text{מקדם}}\cdot\underbrace{(-2)\cdot\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{-3}}_{\text{נגזרת}}\cdot\underbrace{x^2\cdot(-2)\cdot y^{-3}}_{\text{נגזרת פנימית}} = \left[\dots\right] - 8y\cdot x^2\cdot y^{-3}\cdot\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right)^3 =$$

$$= \left[\dots\right] - 8\cdot\left(\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^3 = \underbrace{\frac{\overbrace{(x^2+y^2)^2-2y^4}^{\text{זה היה כאן למעלה...}}}{(x^2+y^2)^2}} + \frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{-8\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2\cdot y^2}{(x^2+y^2)} =$$

$$= \cancel{\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}} - 8\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2 =$$

$$= \boxed{1-2\cdot\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2\cdot\left[1+4\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\right]}$$

ניתן לראות ש- f_{xy} אמנם קיימת בכל $\mathbb{R}^2$, אך אינה רציפה בראשית;

אם ניקח את הישר $y\equiv0$ נקבל $f_{xy}\binom{x}{0}\equiv 1\xrightarrow{x\to0}\underline{\underline{1}}$.

אם ניקח את הישר $y=x$ נקבל $f_{xy}\binom{x}{x} = 1-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[1+4\cdot\frac{1}{2}\right] = 1-\frac{1}{2}\cdot3 = -\frac{1}{2}\xrightarrow{x\to0}\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

ובכלל $\boxed{f_{xy}\binom{0}{0}=-1}$, שזה לא $-\frac{1}{2}$ ולא $\underline{1}$.

(*) נחשב $\underline{f_{yx}\binom{0}{0}=?}$;

$$\boxed{\left(f_y\binom{0}{0}\right)} = \lim_{y\to0}\frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\Big|_{x=0}}{y-0} = \lim_{y\to0}\frac{0-0}{y} = \boxed{0}$$

$$f_y\binom{x}{y} = x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\cdot\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\cdot\left[x^4-y^4-2\cdot y^2\cdot 2x^2\right] =$$

$$= x\cdot\left[\frac{x^4-y^4-4\cdot x^2\cdot y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

ועכשיו נגזור לפי x, כלומר על הישר $\binom{x}{0}$;

$$\boxed{f_{yx}\binom{0}{0}} = \lim_{x\to0}\frac{f_y\binom{x}{0}-\cancel{f_y\binom{0}{0}}^{=0}}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{x^4-\cancel{0^4}-\cancel{4x^2\cdot0}}{(x^2+0)^2} = \lim_{x\to0}1 = \boxed{1}$$

לכן

$$\boxed{-1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\binom{0}{0} = f_{xy}\binom{0}{0} \neq f_{yx}\binom{0}{0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|\binom{0}{0} = 1}$$

זה קרה כי, למרות שהנגזרות המעורבות f_{xy} ו- f_{yx} קיימות בכל $\mathbb{R}^2$, הן לא רציפות ב-$\binom{0}{0}$. [אגב, ניתן לראות שהן רציפות ב- $\mathbb{R}^2\setminus\left\{\binom{0}{0}\right\}$].

(5) (א) נגזור את $f(x,y) = x^y = e^{y\cdot \ln x}$

$$f_x(x,y) = e^{y\cdot\ln x}\cdot\frac{y}{x} = x^{y-1}\cdot y \quad , \quad f_{xx} = y\cdot(y-1)\cdot x^{y-2}$$

$$f_x(1,1) = 1 \quad , \quad f_{xx}(1,1) = 0$$

הערה; על הישר $(x,1)$, f היא פשוט $f(x,1)=x$, לכן זה היה צפוי.

באופן דומה, $f(1,y) = 1^y = 1$ לכן $0 = f_y(1,1) = f_{yy}(1,1)$.

חישוב ישיר ייתן אותה תוצאה;

$$f_y(x,y) = \ln x\cdot e^{y\cdot\ln x} \quad , \quad f_{yy} = (\ln x)^2\cdot e^{y\cdot\ln x}$$

לבסוף; $f_{yx}(x,y) = \frac{1}{x}\cdot e^{y\cdot\ln x} + (\ln x)\cdot y\cdot x^{y-1} \quad , \quad f_{yx}(1,1) = 1$

(שזו הנגזרת לפי y של $f_x(1,y) = 1\cdot y = y$)

לסיכום; $\boxed{f_y(1,1) = f_{yy}(1,1) = f_{xx}(1,1) = 0}$, $\boxed{f_x(1,1) = f_{xy}(1,1) = 1}$.

$\boxed{f(1,1) = 1}$.

ופולינום טיילור של f בנקודה $(1,1)$ הוא;

$$f(1+x,1+y) = 1 + 1\cdot x + 0\cdot y + \frac{1}{2}\cdot\left[0\cdot x^2 + 2\cdot 1\cdot xy + 0\cdot y^2\right] + \bar{o}\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(1+x,1+y) = 1 + x + xy + \bar{o}(x^2+y^2)}$$

(ב) נגזור את $f(x,y,z) = r^4 = (x^2+y^2+z^2)^2 \quad , \quad \vec{p} = (0,0,0)$

$$f(\vec{p}) = 0$$

$$f_x = 2\cdot(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x \quad , \quad f_{xx} = 4\cdot(x^2+y^2+z^2) + 4x\cdot 2x$$

$$f_{xy} = 4x\cdot 2y$$

נציב את $\vec{p}$ בנגזרות, ומסימטריה נקבל;

$$f_x(\vec{p}) = f_y(\vec{p}) = f_z(\vec{p}) = f_{xy}(\vec{p}) = f_{xz}(\vec{p}) = f_{yz}(\vec{p}) = f_{xx}(\vec{p}) = f_{yy}(\vec{p}) = f_{zz}(\vec{p}) = 0$$

לכן; $\boxed{f(x,y,z) = 0 + \bar{o}(x^2+y^2+z^2)}$

<u>הערה</u>: כיוון שבסביבה $f = r^4$ היא או קטן $(\bar{o})$ של r^2, אז מיחידות פולינום טיילור נובע שפולינום טיילור מסדר 2 מתאפס.

נחשב גרדיאנט בכל נקודה $f_{(x,y)} = \begin{cases} xy\cdot \ln(x^2+y^2) & ; \text{אחרת} \\ 0 & ; x=y=0 \end{cases}$ C 7

שאיננה הראשית:

$$f_x = y\cdot \ln(x^2+y^2) + xy\cdot \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = y\cdot\left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right]$$

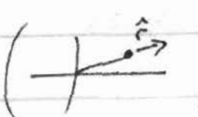
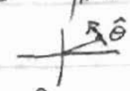
$$f_y = \ldots = x\cdot\left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right]$$

אם $y=0$ אז $f_x=0$, וכדי לקבל $f_y=0$
צריך לדרוש $x\cdot\ln(x^2)=0$. כלומר $x=\pm 1$ $\Leftarrow$ $\boxed{(1,0),\ (-1,0)}$
באופן דומה, הנקודות היחידות על הישר $x=0$ בהן הגרדיאנט מתאפס הן
$\boxed{(0,-1)\ ,\ (0,1)}$.

יש נקודות נוספות: $\boxed{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)}$ (בדקו).

(*) כדי להבין מדוע אין עוד - "איך להגיע לנוסחה" - כתבו
את f כפונקציה של r ו-θ:

$$f_{(r,\theta)} = \frac{1}{2}\cdot \sin(2\theta)\cdot \ln(r^2) = \sin(2\theta)\cdot\ln(r)$$
(עבור $r\neq 0$ ←).

חשבו על הטיעון הבא: הגרדיאנט מתאפס בנקודה מסוימת $\binom{x}{y}$
אם ורק אם הנגזרות $\frac{\partial f}{\partial r}$ ו- $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ מתאפסות ב- $\binom{r}{\theta}$ המתאים ל-
(כלומר $x=r\cdot\cos\theta$, $y=r\cdot\sin\theta$).
זה נכון כיוון שהנגזרות "בכיוון" r () ו"בכיוון"
θ () ניתנות ע"י מכפלה פנימית של הגרדיאנט
עם כיוונים אלו, והתנאי שוקטור ב- $\mathbb{R}^2$ הוא ניצב לשני וקטורים
בלתי תלויים לינארית ($\hat{r}$ ו- $\hat{\theta}$ הם תמיד בת"ל) שקול לכך
שהוקטור הוא וקטור האפס.

מצאנו את כל הנקודות הסטציונריות שאינן הראשית.

בראשית:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = 0$$

בדומה

$\Rightarrow \vec{0}$ היא נק' סטציונרית.

$\vec{0}$ היא לא מקסימום מקומי ולא מינימום מקומי, כי $xy\ln(x^2+y^2)$

מקבל את שני הסימנים בכל סביבה של $\vec{0}$.

בשאר הנקודות $\vec{p}$ מוצאים את מטריצת ההסיאן $H_{\vec{p}}(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$,

בודקים אם ה- det חיובי,

במקרה זה $\text{trace} > 0 \Rightarrow$ יש מינימום מקומי.

$\text{trace} < 0 \Rightarrow$ יש מקסימום מקומי.

זה חישוב ונשיר ארוך. למעשה מספיק להסתכל ב-4 מ-8 הנקודות הנותרות כי הפונק' סימטרית תחת $(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$ ו(y,x).

(ב)

$$f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2) = y^2 - 4x^2y + 3x^4$$

$$\partial^y f = 2y - 4x^2$$
$$\partial^x f = -8xy + 12x^3 \rightsquigarrow \nabla f_{(x,y)} = 0 \iff \boxed{(x,y) = (0,0).}$$

בקשר למיון - פנו לשאלה 9.

(ג) חישוב ישיר ארוך. הערה: אין אנליטי לפונקציה.

(3) חישוב ישיר ארוך.

⑥ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – גזירה ברציפות מספיק פעמים.

$$\phi(t) = f(t,t^2,t^3)$$

$\boxed{\phi(0)=f(0,0,0)}$ רוצים: טור טיילור מסדר 3 של ϕ ב- $t=0$.

– לפי חוק השרשרת:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = f_x(t,t^2,t^3)\cdot(t)' + f_y(t,t^2,t^3)(t^2)' + f_z(t,t^2,t^3)(t^3)' =$$

$$= f_x(\dots)\cdot 1 + f_y(\dots)2t + f_z(\dots)3t^2$$

$$\boxed{\phi'(0) = f_x(0,0,0)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi(t) - \cancel{f_{xx}(\dots)}\ 0 + f_y(\dots)2 + f_z(\dots)6t$$

$$+ f_{xx}(\dots)\cdot 1 \quad + f_{yx}(\dots)2t \quad + f_{zx}(\dots)3t^2$$
$$+ f_{xy}(\dots)2t \quad + f_{yy}(\dots)(2t)(2t) \quad + f_{zy}(\dots)(2t)3t^2$$
$$+ f_{xz}(\dots)3t^2 \quad + f_{yz}(\dots)(3t^2)(2t) \quad + f_{zz}(\dots)(3t^2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi''(0) = 2f_y(0,0,0) + f_{xx}(0,0,0)}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\phi(t) = f_{yx}(\dots)2 + f_z(\dots)6 + f_{xxx}(\dots) + 2f_{yx}(\dots) + 2f_{yx}(\dots)$$

$$+ t(\text{משהו.})$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi'''(0) = 6f_{xy}(0,0,0) + 6f_z(0,0,0) + f_{xxx}(0,0,0).}$$

~~ושוב~~ טיילור זה כמו רמ"ז:
ופולינום מסדר 3

$$\phi(t) \sim \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{\phi''(0)}{2}t^2 + \frac{\phi'''(0)}{3!}t^3$$

הערה: אפשר לפתור את התרגיל גם
[illegible]

$$f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$ 8

* ל-f אין מכסימום גלובאלי כי

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} (3x - x^3) = +\infty$$

*

$$\nabla F = 0 \iff \begin{cases} \partial^x f = 0 \\ \partial^y f = 0 \end{cases}$$

$$\partial^x f = 3e^y - 3x^2$$

$$\partial^y f = 3xe^y - 3e^{3y}$$

$$\begin{rmatrix} \partial^x f = 0 \\ \partial^y f = 0 \end{rmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \partial^x f = 0 \\ \partial^y f = 0 \end{matrix}\right\} \iff \begin{matrix} e^y = x^2 \\ x = \cancel{3}e^{2y} \end{matrix} \iff \begin{matrix} t = x^2 \\ x = t^2 \end{matrix}$$

נסמן $0 < e^y = t$

10 $x, t \neq 0$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x = t = 1}$$

$(x,y) = (1,0)$

ע"כ הפתרון היחיד הוא

נבדוק שיש שם מינימום מקומי:

$$(\partial^x)^2 f = -3 \cdot 2x$$

$$(\partial^{xy}) f = 3e^y$$

$$(\partial^y)^2 f = 3xe^y - 9e^{3y}$$

בנק' $(1,0)$ מקבלים:

$$(\partial^x)^2 f(1,0) = -6$$

$$(\partial^{xy}) f(1,0) = 3$$

$$(\partial^y)^2 f(1,0) = 3 - 9 = -6$$

בסה"כ:

$$H_{(1,0)}(f) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

יש

$$\det = 36 - 9 > 0$$
$$\text{trace} = -12 < 0$$

⇐ התבנית מוגדרת שלילית. ⇐ מקסימום מקומי.

או שאפשר לבדוק $(\partial^x)^2 f(1,0) < 0$

$$\left(\partial^{xy} f(1,0)\right)^2 < \left((\partial^x)^2 f(1,0)\right)\left((\partial^y)^2 f(1,0)\right).$$

---

⑨ $f(x,y)=(y-ax^2)(y-bx^2)$

אפשר להניח כי $a<b$.

— $(0,0)$ כיון לא נק' מינימום מקומי כי בקווים מסוג $y=\lambda x^2$

$f(x,\lambda x^2)\begin{cases}<0 & a<\lambda<b\\ >0 & \lambda<a \text{ או } \lambda>b\end{cases}$ $(x\neq 0)$. ויש נקודות מכל אחד מן הקווים בכל סביבה של $(0,0)$.

— בכל קו ישר: $\begin{matrix}x=0\\ y=0\end{matrix}$ או $\underset{\lambda\neq 0}{y=\lambda x}$ נקבל:

$f(0,y)=y^2$ – מינימום מקומי. $y=0$

$f(x,0)=(ab)x^4$ – מינימום מקומי $x=0$

$\varphi(x)=f(x,\lambda x)=(\lambda x-ax^2)(\lambda x-bx^2)=\lambda^2x^2\underbrace{-\lambda(a+b)x^3+abx^4}_{\text{סדרים גבוהים ב-}x}$

$\lambda\neq 0$

$\varphi'(0)=0$

$\varphi''(0)=2\lambda^2 \underset{0}{\vee}$ $\underline{\text{אין תרומה מהסדרים הגבוהים}}$

$\Longrightarrow$ יש מינימום מקומי.

---

⑩ $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$

$\mathbb{R}^3\supset\{\overset{*}{\boxed{x\le y\le z}},\ 2(x+y)+z\le 100\}=D$
$z,y,x\geq 0$.

נפח $V(x,y,z)=xyz$

* היות והפונקציה V היא סימטרית ב- x,y,z את התנאי *
ניתן להשמיט. נשארים עם התחום $F=\left\{\begin{matrix}2(x+y)+z\le 100\\ x,y,z\geq 0\end{matrix}\right\}$
(ולקבל אותם המקסימום)

אם הייתה נקודת מקסימום פנימית $m \in int(F)$ אז היה $\nabla V(m) = 0$

$$\nabla V = (\partial^x V, \partial^y V, \partial^z V) = (yz, xz, xy) \neq \vec{0}$$

בפנים התחום, כי הוא

$$int(F) = \left\{ \begin{array}{c} 2(x+y)+z < 100 \\ x,y,z > 0 \end{array} \right\}$$

לכן המקסימום מתקבל בשפה.

כאשר אחת הקואורדינטות מתאפסת, $V=0$

לכן נתבונן במרכיב $B = \left\{ \begin{array}{c} 2(x+y)+z = 100 \\ x,y,z \geq 0 \end{array} \right\}$ של השפה.

מכאן אפשר להמשיך בשיטת כופלי לגרנז' (ראו ערך: הדג"א 3)

או ושירות רק: ב- B: $z = 100 - 2(x+y)$

$G = \{x,y \geq 0,\ x+y \leq 50\}$

$$\boxed{V(x,y,z) = xy\,(100 - 2(x+y))} =: W(x,y).$$

לכן מספיק למצוא מכסימום של W בתחום G כ- $\mathbb{R}^2$.

בשפת התחום $W=0$. מכסימום בפנים מתקבל בנקודה $m = (a,b)$

$intG = \left\{ \begin{array}{c} x,y>0 \\ x+y<50 \end{array} \right\}$

אם $\nabla W(a,b) = 0$

$$\nabla W = (y(100-2x-2y) - 2xy,\ x(100-2x-2y) - 2xy)$$

$$\nabla W_{(a,b)} = 0 \iff b(100 - 4a - 2b) = 0 \quad \& \quad a(100 - 2a - 4b) = 0 \overset{a,b>0}{\iff} \begin{array}{l} 100 - 4a - 2b = 0 \\ 100 - 2a - 4b = 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$ $a=b$ ·

$200-6(a+b)=0 \Longleftrightarrow (a,b)=\left(16\tfrac{2}{3},\,16\tfrac{2}{3}\right)$

$100-2\left(16\tfrac{2}{3}+16\tfrac{2}{3}\right)=33\tfrac{1}{3}$ חישובי עזר

$V\left(16\tfrac{2}{3},16\tfrac{2}{3},33\tfrac{1}{3}\right)=W\left(16\tfrac{2}{3},16\tfrac{2}{3}\right)=\left(16\tfrac{2}{3}\right)^2\left(33\tfrac{1}{3}\right)>0$

לסיכום: קיבלנו שעל שפת G, $W\equiv 0$

ובפנים יש נק' קריטית יחידה שבה $W>0$.

$\Leftarrow$ בנק' הקריטית מתקבל מקסימום.

מהשיקולים הקודמים, זהו גם המקסימום של V בתחום המקורי: אז הנפח המקסימלי הוא $\left(16\tfrac{2}{3}\right)^2\cdot 33\tfrac{1}{3}\approx 2315$ סמ"ק

---

(17) $f(x)=ax+b$

$$D(a,b):=\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i\right)^2$$

נחשוב על הביטוי שרוצים להביא למינימום כעל פונק' של a ו-b.

— עקב פתיחת סוגריים ניתן למצוא ש-D היא פונק' ריבועית של a,b

— $D\geq 0$ בכל $\mathbb{R}^2$.

בנקודה קריטית $\nabla D \Leftrightarrow \begin{matrix} \partial^a D = 0 \\ \partial^b D = 0 \end{matrix}$

$$\partial^a D = 2\left(\sum x_i\,(ax_i + b - y_i)\right) = 2\left(a\sum x_i^2 + b\sum x_i - \sum x_i y_i\right)$$

$$\partial^b D = 2\left(\sum (ax_i + b - y_i)\right) = 2\left(a\sum x_i + b\cdot n - \sum y_i\right)$$

לכן $\nabla D = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + b\cdot n = \sum y_i \end{matrix}$

זאת מערכת לינארית ב- 2 נעלמים, ויש לה פתרון יחיד

כי

$$\det\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 > 0$$

לפי אי-שוויון קושי שוורץ

עבור 2 הווקטורים:

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$\vec{1} = (1, \dots, 1)$

נוסחה להפיכת מטריצה 2x2:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det A = ad - bc \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

והפתרון הוא

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\begin{pmatrix} n & -\sum x_i \\ -\sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

ז"א

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{-(\sum x_i)(\sum x_i y_i) - (\sum y_i)(\sum x_i^2)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

נבדוק שזה מינימום מקומי:

$$(\partial^a)^2 D = 2\sum x_i^2$$

$$\partial^{ab} D = 2\sum x_i$$

$$(\partial^b)^2 D = 2n$$

$$\Rightarrow H(D) = \begin{pmatrix} 2\sum x_i^2 & 2\sum x_i \\ 2\sum x_i & 2n \end{pmatrix}$$

שימו לב כי במקרה המסוים שלנו בכל הנקודות יש את אותה המטריצה!

וזאת מטריצה סימטרית מוגדרת חיובית כי יש לה:

$$\det = 4\left(n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right) > 0$$

$$\mathrm{trace} = 2\left(\sum x_i^2 + n\right) > 0$$

וכן

לכן זה מינימום מקומי. (באופן שקול אפשר לבדוק כי $(\partial^{ab})^2 < (\partial^a)^2 D\,(\partial^b)^2 D$ וכי $(\partial^a)^2 D > 0$)

---

(12) רעיון: נניח לרגע כי $f \neq 0$ בכל נק' במישור.

אז $\forall x \quad g(x) \neq 0$

$\forall y \quad h(y) \neq 0$

לכן $g''(x)h(y) + h''(y)g(x) = 0 \Leftarrow f_{xx} + f_{yy} = 0$

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = -\frac{h''(y)}{h(y)} \quad \Leftarrow$$

פונק' של x בלבד — פונק' של y בלבד

$\Leftarrow$ אלה הן פונ' קבועות.

נקרא לקבוע α. ואז נקבל

את המשוואות הרצויות

$$\begin{cases} g'' = \alpha g \\ h'' = -\alpha h \end{cases}.$$

כאן החלפתי
בין השמות של h ו-g
לנוחיות הכתיבה

$h(x_0)\neq 0$
$g(y_0)\neq 0$.

ומה אם יש ל- f אפסים?

- הפונק' הקבועה $f\equiv 0$ היא כמובן פתרון.
- אחרת יש נק' (x_0,y_0) כך ש- $f(x_0,y_0)\neq 0$ כלומר $f(x_0,y_0) = h(x_0)g(y_0)$

נתבונן ב- $f_{xx}+f_{yy}=0$

כלומר $h''(x)g(y)+h(x)g''(y)=0$

נבחר $y=y_0$ $\quad h''(x)g(y_0)+h(x)g''(y_0)=0$

כי $g(y_0)\neq 0$

① אם $h(x)=0$, נקבל ש- $h''(x)=0$ ואז השוויון הרצוי מתקיים
בנק' כאלה לכל קבוע α. (ש"נקבע ע"י נק' אחרות).

ובאופן דומה, ע"י בחירת x_0, נקבל שאם $g(y)=0 \Leftarrow g''(y)=0$.

לכן מספיק להתבונן בנקודות בהן $h(x)\neq 0$ וגם $g(y)\neq 0$.

② אם x_1,x_2 שתי נק' כך ש- $h(x_1)\neq 0$, $h(x_2)\neq 0$ $\Leftarrow$

$$\frac{h''(x_1)}{h(x_1)}=-\frac{g''(y_0)}{g(y_0)}$$

$$\frac{h''(x_2)}{h(x_2)}=-\frac{g''(y_0)}{g(y_0)}$$

$\Leftarrow$ $\frac{h''(x)}{h(x)}=$ קבוע $=:\cancel{\alpha}\ \beta$ $\quad (x\neq 0)$.

באופן דומה $\frac{g''(y)}{g(y)}=$ קבוע $=:\cancel{\beta}\ \alpha$ $\quad (y\neq 0)$

וע"י בחירה $x=x_0$, $y=y_0$ נקבל $\beta=\frac{h''(x_0)}{h(x_0)}=-\frac{g''(y_0)}{g(y_0)}=-\alpha$

בסיכום: $h''(x)=-\alpha h(x)$, $g''(y)=\alpha g(y)$ (כש- $h(x)=0$ לפי השיקול הראשון, וכש- $h(x)\neq 0$ - לפי השיקול השני)

הפתרונות מהצורה הנתונה הם $g(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}$

(הנחנו $\alpha = a^2$, כי אחרת $a>0$ g ו-h פשוט מחליפים תפקידים)

$$h(x) = C\cos(ax) + D\sin(ax)$$

ועבור $\alpha = 0$

$$g(x) = Ax + B$$
$$h(x) = Cx + D$$

(ראו ערך "משוואות דיפרנציאליות רגילות")