חדו"א 2 - פתרונות לתרגיל 4

1 נסמן $I_{k,n}=\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$. ($0\le k\le n$ שלמים)

נמצא לאינטגרל נוסחה רקורסיבית ע"י אינטגרציה בחלקים:

$$I_{k,n}=\begin{bmatrix} u=(1-x)^{n-k} & dv=x^k dx \\ du=(n-k)(1-x)^{n-k-1}\cdot(-1)dx & v=\frac{x^{k+1}}{k+1}\end{bmatrix}=$$

$$=(1-x)^{n-k}\cdot\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1-\int_0^1\left(-\frac{n-k}{k+1}\right)\cdot x^{k+1}\cdot(1-x)^{n-k-1}dx$$

$$=(0-0)+\frac{n-k}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}dx=\frac{n-k}{k+1}I_{k+1,n}.$$

נשים לב ש- $I_{n,n}=\int_0^1 x^n\cancel{(1-x)^0}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$.

נשתמש בנוסחת הנסיגה שמצאנו כדי לבטא את $I_{k,n}$ בעזרת $I_{n,n}$:

$$I_{k,n}=\frac{n-k}{k+1}I_{k+1,n}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{n-(k+1)}{k+2}I_{k+2,n}=\dots$$

$$\dots=\frac{(n-k)(n-(k+1))\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(n)}\cdot I_{n,n}=$$

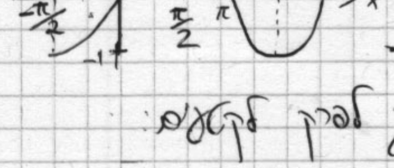
$$=\frac{(n-k)!}{(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{k!}{k!}I_{n,n}=\frac{(n-k)!\,k!}{n!}I_{n,n}$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{k}}I_{n,n}=\frac{1}{\binom{n}{k}}\cdot\frac{1}{n+1}$$

ולכן: $\boxed{(n+1)I_{k,n}=\binom{n}{k}^{-1}}$

---

2 שימו לב כי $\arcsin(x)$ מחזירה זווית בטווח $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.



לכן ההצבה $t=\sin x$ אינה גוררת $x=\arcsin(t)$ כאשר x מחוץ לטווח ההצבה.

כדי לחשב את האינטגרל עם הצבה זו צריך לפרק לקטעים:

(ראו ציור של sin)

מהצבה אחנו $t=\sin x$:

$$\left.\begin{aligned}
x\in[0,\tfrac{\pi}{2}] &\longrightarrow x=\arcsin t\\
x\in[\tfrac{\pi}{2},\pi] &\longrightarrow x=\pi-\arcsin t\\
x\in[\pi,\tfrac{3\pi}{2}] &\longrightarrow x=\pi-\arcsin t\\
x\in[\tfrac{3\pi}{2},2\pi] &\longrightarrow x=\arcsin t+2\pi
\end{aligned}\right\}\ (*)$$

לכן האינטגרציה נראית כך:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=\left[\begin{array}{ll} t=\sin x & dt=\cos x\,dx\\ x=(*)\ \text{נפרק לפי} & \end{array}\right]$$

$$=\int_0^{\pi/2} f(x)\cos x\,dx+\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\cos x\,dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=$$

$$\underset{\text{הצבות בנפרד}}{=}\int_0^1 f(\arcsin t)\cdot dt+\int_1^{-1} f(\pi-\arcsin t)\,dt+\int_{-1}^{0} f(\arcsin t+2\pi)\,dt$$

---

3 א. נבצע החלפת משתנים:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f(nx)\,dx=\left[\begin{array}{ll} t=nx & x=0\to t=0\\ dt=n\,dx & x=2\to t=2n\end{array}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2n} f(t)\cdot\frac{1}{n}\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2n} f(t)\,dt$$

אם הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^{2x} f(t)\,dt$ קיים $(x\in\mathbb{R})$, אז הוא שווה לגבול שלנו.

<u>מקרה 1</u>: $\int_0^{2x} f(t)\,dt\xrightarrow{x\to\infty}\infty\ (-\infty)$. מקרה זה יתכן רק כאשר $L\neq 0$ (כנזכר, $L=\lim_{t\to\infty} f(t)$) - חשוב מאוד. זה עשוי לקרות גם אם $L=0$, למשל $f(t)=\frac{1}{t}$. מכל מקום, נכתוב כך:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^{2x} f(t)\,dt}{x}\underset{\text{לפי לופיטל}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^{2x} f(t)\,dt\right)'}{1}=\lim_{x\to\infty} f(2x)\cdot 2=\boxed{2\cdot L}$$

<u>מקרה 2</u>: $\left|\int_0^{2x} f(t)\,dt\right|\le B$ לכל $0<x$, אז:

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\int_0^{2x} f(t)\,dt}{x}\right|\le\lim_{x\to\infty}\frac{B}{x}=0$$

והגבול שלנו הוא $\boxed{0}$

<u>מקרה 3:</u> הגבול $\lim_{x\to\infty}\int_0^{2x} f(t)\,dt$ לא קיים, וגם $\int_0^{2x} f(t)\,dt$ לא חסום.

על-אף שמקרה זה יתכן במציאות (למשל, $f(x)=x\sin x$), בתנאי התרגיל הוא בלתי-אפשרי, כי ידוע שקיים הגבול $\exists \lim_{t\to\infty} f(t)=L$
[השלם את הפרטים.]

ב. בדומה לסעיף א, נחליף משתנים ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx = [t=nx] = \lim_{n\to\infty}\int_0^n f(t)\cdot\frac{1}{n}\,dt =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} \ \leq$$

כעת, $B(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ היא פונקציה מונוטונית עולה וחסומה ע"י $\int_0^\infty f(t)\,dt$ (שמתכנס), לכן:

$$\leq \ \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^\infty f(t)\,dt\right)}{x} = 0$$

4 (a) מתבדר,

$\sin 5x = 0 \Leftrightarrow x = x_k = \frac{\pi k}{5}$ עבור k טבעי.

לכל x_k נבחר (נמצא) y_k קרוב אליו כך שבקטע $[x_k, y_k]$,

$$\frac{1}{1+(x\sin 5x)^2} = f(x) > \frac{1}{2}$$

כלומר נרצה ש- $(x \sin 5x)^2 < 1 \quad \forall x \in [x_k, y_k]$

זה מתקיים אם נקח $|y_k - x_k| = \frac{1}{5(x_k+1)}$

(הסבר: $\left((x \sin 5x)^2 \le y_k^2 \sin^2 5y_k < y_k^2 \cdot (5(y_k - x_k))^2 < 1\right)$

כעת

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{\infty} \min_{[x_k, y_k]} f \cdot |y_k - x_k|$$

סכום רק על $[x_k, y_k]$, (דרבו תחתון) בשאר המקומות $f(x) \ge 0$

$$\ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5(x_k+1)} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi k}{5}+1} = \infty$$

(b) הנקודות הבעייתיות הן $0, 1, \infty$. אך:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(\ln x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{\ln^2 x} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-1/x^2}{2\ln x \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{\ln x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-1/x^2}{1/x} = \infty$$

וקל לראות שגם ליד $x=1$ הפונ' לא חסומה.

נפרק $\int_0^\infty = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{1} + \int_1^2 + \int_2^\infty$. הטיפול בכולם דומה.

למשל נקח $\int_1^2$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x & x=1 \to t=0 \\ dt = \frac{1}{x}dx & x=2 \to t=\ln 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{1}{t^2}\,dt \to \text{מתבדר}$$

לכן האינטגרל כולו מתבדר.

(c) מתכנס; החלפת משתנים $t = x^3$.

(d) מתבדר; $x=0$ לא בעייתי, ליד $x=1$ נשווה עם $\frac{1}{x-1}$.

(e) מתכנס; השוואה עם $\frac{1}{x^{3/2}} = \sqrt{\frac{x}{x^4}}$.

(f) מתבדר; $\frac{|\sin x|}{2x} \ge \frac{\sin^2 x}{2x} = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right) \ge 0$$

$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה

$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתבדר; לכן מסה"כ האינטגרל שלנו גדול מאינטגרל מתבדר:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{2x}dx \ge \frac{1}{4}\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x}dx}_{=\infty} - \frac{1}{4}\underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx}_{=C<\infty} = \infty$$

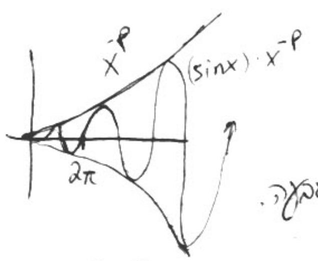
(g) מתכנס; $\int_0^\infty \sin(5x^3)dx = [t=5x^3] = \int_0^\infty \frac{1}{15}\frac{\sin t}{t^{2/3}}dt$

זה מתכנס לפי מבחן דיריכלה: $\frac{1}{t^{2/3}}$ מונוטונית יורדת ל-0

ו- $\sin t$ בעלת פונקציה קדומה חסומה.

(h) לנו בעיות: $0,\infty$. נכתוב $\int_0^1 + \int_1^\infty$.

אם $p<0$, אז $\int_1^\infty x^{-p}\sin x\,dx$ מתבדר



הסבר: נראה ש- $\int_{2\pi}^\infty$ מתבדר במקרה זה.

נגדיר: $I(n) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x^{-p}\sin x\,dx$, $(n\ge2)$ ·שטח גבעה.

נשים לב ש- $|I(n+1)|>|I(n)|$ (שטח הגבעות בערך מוחלט עולים).

האינטגרל כולו הוא $\int_{2\pi}^\infty \cdot = \int_{2\pi}^{3\pi} + \int_{3\pi}^{4\pi} + \dots = \sum_{n=2}^\infty I(n)$

נשים לב ש- $I(2k)>0$; $I(2k+1)<0$ לכל $k\ge1$ טבעי.

$$S_{2k+1} = \underbrace{\left(I(2)+\overset{<0}{I(3)}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(I(4)+I(5)\right)}_{<0} + \dots + \underbrace{\left(I(2k)+I(2k+1)\right)}_{<0}$$ אז

$$S_{2k} = I(2) + \underbrace{\left(I(3)+\overset{>0}{I(4)}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(I(5)+I(6)\right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left(I(2k-1)+I(2k)\right)}_{>0}$$

לכן $\begin{cases} S_{2k+1} < 0 \\ S_{2k} \geq I(2) > 0 \end{cases}$ לכל $k \geq 1$ טבעי.

כלומר לא קיים $\lim_{n\to\infty} S_n$ (גבול זה צריך להיות קטן מ-0 וגדול מ- $I(2)>0$, סתירה).

אם $\underline{p>0}$ אז $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ מתכנס (מבחן דיריכלה).

כעת נעשה החלפת משתנים עבור $\int_0^1$:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx = \left[t = 1/x\right] = \int_1^\infty \frac{\sin 1/t}{t^{2-p}}\,dt$$

כפי שראינו, זה מתכנס $\Leftrightarrow$ $2-p>0$ (מה שהוכחנו בתחילת התרגיל).

לכן $\int_0^1, \int_1^\infty$ מתכנסים $\Leftrightarrow$ $p>0$ וגם $2-p>0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{0<p<2}$.

(i) מתכנס;

$$\int_0^\infty x\sin(e^{2x})\,dx = \left[t=e^{2x}\right] = \int_1^\infty \frac{1}{4}\cdot \underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\text{מונוטונית יורדת ל-0}} \underbrace{\sin t}_{\text{בעלת קדומה חסומה}}\,dt$$

האינטגרל מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

(j) מתבדר; ליד 0 להשוות עם $\frac{1}{x}$
ליד 1 להשוות עם $\frac{1}{1-x}$.

(k) מתכנס עבור $1<p<2$.

<u>הסבר:</u> יש שתי נקודות בעייתיות - $0,\infty$.

נפרק:

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

עבור $\int_0$, נשווה עם $\frac{1}{x^{p-1}}$ ונקבל בגבול ($x\to 0$) של המנה 1.
לכן בקטע זה האינטגרל מתכנס אמ"מ $p-1<1 \iff \underline{p<2}$.

עבור $\int_1^\infty$, נשווה עם $\frac{1}{x^{p-\alpha}}$ ונקבל בגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases}\infty, & \alpha\le 0\\ 0, & \alpha>0\end{cases}$

כאשר $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x^p}$, $g(x)=\frac{1}{x^{p-\alpha}}$.

אם $0<\alpha$, התכנסות $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{p-\alpha}}$ גוררת התכנסות האינטגרל שלנו $\int_1^\infty f(x)dx$, כלומר אם $1<p-\alpha$, או $p>\alpha+1>1$ יש התכנסות.

אם $0\ge\alpha$, התבדרות $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{p-\alpha}}$ גוררת התבדרות $\int_1^\infty f(x)dx$
כלומר אם $p-\alpha\le 1$ או $p\le 1+\alpha\le 1$ יש התבדרות.

לכן $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס $\iff \underline{p>1}$.
בסה"כ, צריך $1<p<2$.

(5) בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \begin{bmatrix} u=\cos x & dv=\frac{1}{1+x}dx \\ du=-\sin x & v=-\frac{1}{(1+x)^2}\end{bmatrix} =$$

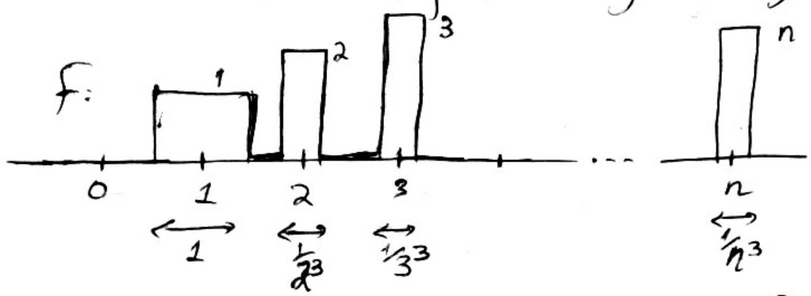
$$-\frac{\cos x}{(1+x)^2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx = 1 + \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$$

תיקון לבדק

בדומה לתרגיל (4)(f), מראים ש $\int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{1+x}\right|dx$ מתבדר.
$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx$ מתכנס (מ. דיריכלה), לכן מתכנס בתנאי.

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$ מתכנס בהחלט.

(6) (א)+(ב): התשובה בשניהם היא לא. לדוגמה:



מדרגה כללית של f:

$$f(x)=\begin{cases} n, & |x-n|<\frac{1}{2n^3} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז $f\geq 0$ רציפה,

$\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}\cdot n = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$ - מתכנס.

אבל f לא חסומה, וגם לא קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

---

(7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, f'(x)\,dx = \begin{bmatrix} u=x & dv=f(x)f'(x)dx \\ du=dx & v=\frac{1}{2}(f(x))^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}x\,f(x)^2}_{=0} - \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x\,f(x)^2}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx}_{=1} = -\frac{1}{2}$$

מהנתון:

---

(8) $f^{(k)}$ פונקציה יורדת. אם f אינה חסומה מלמטה, אז $\exists \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

ולכן בוודאי $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתבדר.

אם f חסומה מלמטה, אז $\exists \lim_{x\to\infty} f(x)=L$, L סופי.

אם $L\neq 0$, נניח בלי הגבלת הכלליות $L>0$ ($L<0$ דומה).

אז $f(x)\geq L$ לכל $a\leq x<\infty$, ולכן:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \geq \int_a^\infty L\,dx = \infty$$

לכן בהכרח $L=0$.

(ב) $\sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty \Leftarrow$ מתכנס $\int_0^\infty f(x)\,dx$ (כי f מונוטונית יורדת ל-0!)
משפט...

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty f(2^n)\cdot 2^n<\infty$ (קריטריון להתכנסות טורים)

כעת ל-x גדול, $2^n \le x < 2^{n+1}$ ל-n מסוים

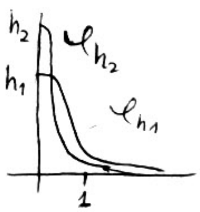
ולכן $0 \le x f(x) < 2^{n+1} f(2^n)$

$\lim_{x\to\infty} x f(x) \le 2 \lim_{n\to\infty} 2^n f(2^n) = 0$.

---

⑨ נסמן $\varphi_h(x) = h e^{-hx}$, ונשים לב לתכונות הבאות:

• לכל $x \ne 0$, $\lim_{h\to\infty} \varphi_h(x) = 0$. גבול זה הוא במידה שווה בקטע מהצורה $[a,\infty)$, $a>0$ (כי φ_h מונוטונית יורדת).



• ל-$x=0$, $\lim_{h\to\infty} \varphi_h(0) = \infty$.

• לכל h, $\int_0^\infty \varphi_h(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$.

מהנתון $\exists A,\ |f| \le A$.

יהי $0<\varepsilon$. נבחר h גדול מספיק כך ש- $\int_\varepsilon^\infty \varphi_h(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{A}$.

(זה אפשרי, כי $\int_\varepsilon^\infty \varphi_h(x)\,dx = \int_{\varepsilon h}^\infty e^{-t}\,dt = e^{-h\varepsilon} \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$)

כעת נפרק $\int_0^\infty f\cdot\varphi_h = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty$.

$$\left|\int_\varepsilon^\infty \varphi_h \cdot f\right| \le \int_\varepsilon^\infty \varphi_h \cdot |f| \le A\cdot \int_\varepsilon^\infty \varphi_h < A\cdot\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$$

עבור $\int_0^\varepsilon$, קיים $c \in [0,\varepsilon]$ כך ש- $\int_0^\varepsilon \varphi_h f = f(c)\cdot\int_0^\varepsilon \varphi_h$

אך $\int_0^\varepsilon \varphi_h + \underbrace{\int_\varepsilon^\infty \varphi_h}_{<\varepsilon/A} = \int_0^\infty \varphi_h = 1 \Rightarrow 1 \ge \int_0^\varepsilon \varphi_h > 1 - \frac{\varepsilon}{A}$

לכן $1\cdot f(c) \ge \int_0^\varepsilon \varphi_h f = f(c)\int_0^\varepsilon \varphi_h \ge \left(1-\frac{\varepsilon}{A}\right) f(c)$

כאשר $\varepsilon \to 0$, $c \to 0$: $f(c) \to f(0)$, $\left(1-\frac{\varepsilon}{A}\right) \to 1$, $f(c) \to f(0)$, כלומר $1\cdot f(0)$.

נבחר מראש δ קטן מספיק כך שאם $|c|<\delta \Rightarrow |f(c)-f(0)|<\varepsilon$ ל-ε נתון. (נקטין את δ אם צריך כדי ש- $\delta<\varepsilon$).

$$f(0)+\varepsilon \ge \int_0^\delta \varphi_h f \ge \left(1-\frac{\varepsilon}{A}\right)(f(0)-\varepsilon)$$

בסה"כ,

$$f(0)+2\varepsilon \geq \int_0^\infty \varphi_h f = \int_0^\delta \varphi_h f + \underbrace{\int_\delta^\infty \varphi_h f}_{\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \geq (1-\frac{\varepsilon}{A})(f(0)-\varepsilon)-\varepsilon$$

כאשר $\varepsilon\to 0$, שני התחומים שואפים ל- $f(0)$.

---

(10) (א) החלפת משתנים $t=x$ ... $x=\sqrt{n}\,t$.

(ב) תרגיל בחדו"א 1 (מצא מינימום לפונקציה $(e^t-(1+t)$).

(ג)

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \begin{bmatrix} x=\cos t \\ dx=-\sin t \\ x=0\to t=\pi/2 \\ x=1\to t=0 \end{bmatrix} = -\int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 t)^n \sin t\, dt$$

$$=\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\, dt$$

בדומה, נציב $x=\cot(t)$ באינטגרל השני.

(ד) בדרך שבה הוכחנו את נוסחת Wallis בכיתה, ראינו ש-

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

מ-(ב)+(ג) נקבל כי

$$\underbrace{\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n dx}_{\downarrow \ \sqrt{\pi}/2} \leq \underbrace{\sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nx^2} dx}_{P} \leq \underbrace{\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\, dt}_{\downarrow \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$