חדו"א 2

תרגול 5

1. ריול: אורך של מסילות $\gamma(t)=(x(t),y(t))$

עבור מסילה $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ שהיא גזירה ברציפות,

$$\text{length}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

1c $\quad \gamma(t)=(t,\ln(\cos t)) \qquad [a,b]=[0,\frac{\pi}{6}]$

$x(t)=t\ ,\ x'(t)=1$

$y(t)=\ln(\cos t)\ ,\ y'(t)=\frac{1}{\cos t}\cdot(-\sin t)=-\tan t$

$$\text{אורך}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1^2+(-\tan t)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\,dt=$$

$1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$

$$\doteq\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\cos t}=\ldots=$$

כי $\cos>0$ בתחום האינטגרציה

חישוב עם הצבה $u=\sin t$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}\right|\right)=\frac{1}{2}\ln 3$$

(2)

$$\gamma(t) = \big(A(t)\cos(t),\ A(t)\sin(t)\big)$$

$$A(t) = 1+\cos t\ ,\quad A'(t) = -\sin t$$

$$x(t) = A(t)\cos(t)$$

$$x'(t) = -\sin t\cos t + (1+\cos t)(-\sin t) =$$

$$= -2\sin t\cos t - \sin t = -\sin 2t - \sin t$$

(סימון מקוצר:
$c := \cos(\cdot)$
$s := \sin(\cdot)$

$$y(t) = A(t)\sin t$$

$$y'(t) = -\sin t\sin t + (1+\cos t)\cos t =$$

$$= \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t = \cos t + \cos 2t$$

$$\text{length} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(s(t)+s(2t))^2 + (c(t)+c(2t))^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{s^2(t)}_{1} + 2s(t)s(2t) + \underbrace{s^2(2t)}_{1} + \underbrace{c^2(t)}_{} + 2c(t)c(2t) + \underbrace{c^2(2t)}_{}}\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cdot 2s^2(t)c(t) + 2c(t)(1-2s^2(t))}\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2c(t)}\ dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+c(t)}\ dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos(t)}\ dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u=\cos(t) \\ du = -\sin(t)dt = \\ \quad = -\sqrt{1-\cos^2(t)}\,dt \\ \quad = -\sqrt{1-u^2}\,dt \end{array} \quad dt = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right| = -2\sqrt{2}\int \sqrt{1+u}\,\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

(נציב גבולות בסוף)

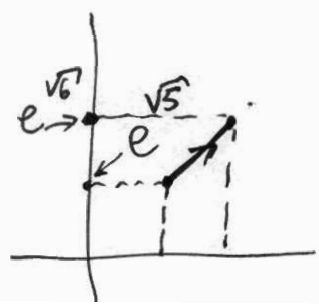
כאן חשוב ש- $0\le t\le \pi$

$$= -2\sqrt{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u}}\,du = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{1-u}}{\frac{1}{2}}\right)\Big| =$$

$$= 4\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos t}\,\Big|_0^{\pi} = 4\sqrt{2}\,\sqrt{2} = 8.$$

מציבים גבולות

③ כאן אפשר שוב להשתמש בנוסחא, אבל יש דרך ציורית יותר: המסלול הוא



לכן אורכו:

$$\sqrt{2}\left(e^{\sqrt{6}} - e^{\sqrt{5}}\right)$$

(כאורך אלכסון של ריבוע עם צלע $e^{\sqrt{6}} - e^{\sqrt{5}}$)

לפי הנוסחא:

$$\text{אורך} = \int_0^1 \sqrt{\left(\left(\sqrt{t+5}\right)' e^{\sqrt{t+5}}\right)^2 + \left(\left(\sqrt{t+5}\right)' e^{\sqrt{t+5}}\right)^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \left(\sqrt{t+5}\right)' e^{\sqrt{t+5}}\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 e^{\sqrt{t+5}}\,d\left(\sqrt{t+5}\right) = \sqrt{2}\left(e^{\sqrt{6}} - e^{\sqrt{5}}\right).$$

② f - רציפה.

$$F(u) := \int_0^u f(t)\,dt$$

* היות ו-f רציפה, F גזירה ו- $F'(u) = f(u)$

(לפי משפט ניוטון לייבניץ)

* $F(0) = 0$

נחשב אגף ימין בחלקים:

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x (x-u)\,d\big(F(u)\big) =$$

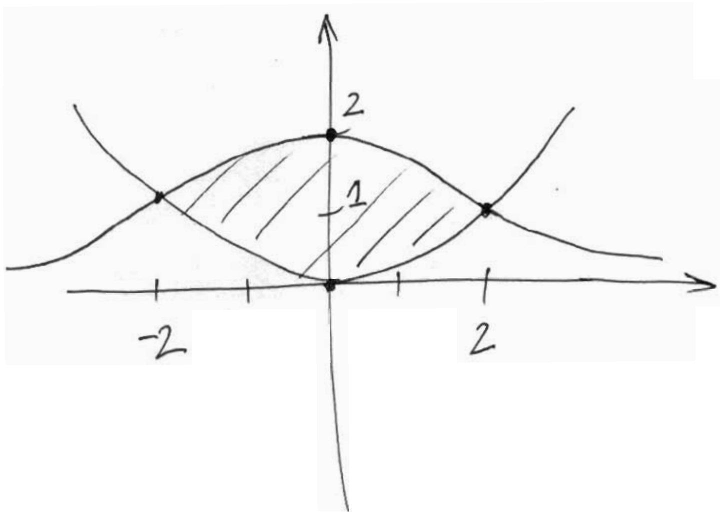
$$= (x-u)F(u)\Big|_0^x - \int_0^x F(u)\,d(x-u) =$$

$$= 0 - 0 + \int_0^x F(u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,du\right) dt$$

נשנה שמות $u \leftrightarrow t$

3. (א)

$$y = \frac{8}{4+x^2} \quad , \quad y = \frac{x^2}{4}$$



התחום הוא

$$\text{שטח} = \int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{4+x^2} - \frac{x^2}{4}\right)dx = 4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{12}\Big|_{-2}^{2} =$$

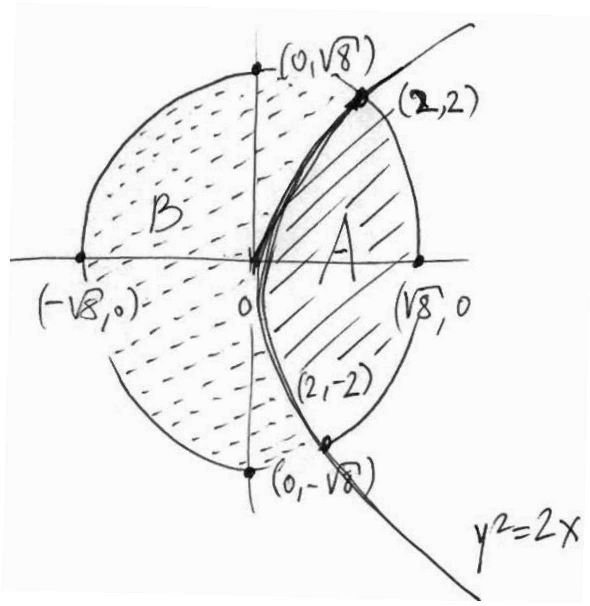
$$= 8\,\mathrm{Arctan}(1) - \frac{8}{6} = 2\pi - \frac{4}{3}$$

(ב)

$$x^2 + y^2 = 8 \quad , \quad y^2 = 2x$$

בעמוד הבא.

$$x^2+y^2=8 \quad , \quad y^2=2x$$



כדי לחשב שטח A נוח
ביותר להביע את x כפונק
של y:

$$y^2=2x \iff x=\frac{y^2}{2}$$

$$x^2+y^2=8 \iff x=\sqrt{8-y^2}$$

$2\le x\le\sqrt{8}$
$-2\le y\le 2$

$-2\le y\le 2$

$$\text{A שטח} = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)dy = \left(\frac{y}{2}\sqrt{8-y^2}+4\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{y}{\sqrt{8}}\right)-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

שימוש בתרגיל 1, שאלה 14f

$$=\frac{4}{3}+2\pi$$

$$\text{B שטח} = \pi\left(\sqrt{8}\right)^2-(\text{A שטח}) = 8\pi-2\pi-\frac{4}{3}=6\pi-\frac{4}{3}.$$

שטח העיגול עם
רדיוס $\sqrt{8}$

(פונקצית גאמא) $\Gamma(a) := \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt$.$a>0$ (4)

א) האינטגרל מתכנס, כי ליד 0, $\dfrac{t^{a-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^{1-a}}} = e^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

והאינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-a}}\,dt$ מתכנס ל- $a>0$.

ליד "∞": $\dfrac{t^{a-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{(2+a-1)}e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

ו- $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ מתכנס.

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^{(a+1)-1}e^{-t}\,dt = -\int_0^\infty t^a\, d(e^{-t}) =$$

סימון ל- $\lim_{R\to\infty}\left(R^a e^{-R} - 0^a e^{-0}\right) = 0$

$$= -\left(t^a e^{-t}\Big|_0^{"\infty"} - \int_0^\infty e^{-t}\, d(t^a)\right) =$$

$$= a\int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt = a\,\Gamma(a).$$

ב) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!$

$\boxed{\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1 \quad \text{אבל}}$

ג) $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac12 - 1}e^{-t}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$

$u=\sqrt{t}$, $t=u^2$

$du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}dt \geq \int_n^\infty t^n e^{-t}dt \geq \int_n^\infty n^n e^{-t}dt = \quad ③$$

האינטגרנד הוא פונקציה חיובית

$$= n^n(-e^{-t})\Big|_n^\infty = n^n e^{-n}$$

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \Leftarrow \quad \text{כדרוש.} \quad \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ גזירה וחיובית. ⑤

ⓒ $\exists \lim_{x\to\infty}(\log f)'(x) = L<0$. נוכיח כי $\int_0^\infty f$ מתכנס.

היות ו- $(\log f)'(x)\xrightarrow[x\to\infty]{} L<0$, $(\log f)'(x) < \overbrace{L+\varepsilon}^{<0}<0$ החל

ממקום מסוים R_0. | ליתר נוחות נסמן $L_0=-M_0$ $M_0>0$
$L=-M$ $M>0$

אז

$$(\log f)'(x) < -M_0 \quad \forall x\geq R_0$$

$$\Leftarrow \quad \log(f)(x) \leq \log f(R_0) - M_0 x \quad \forall x\geq R_0$$

ממונוטוניות האינטגרל

$$\Leftarrow \quad 0< f(x) \leq f(R_0)e^{-M_0x} \quad \forall x\geq R_0$$

הפונקי חיובית.

$y\mapsto e^y$ פונק' עולה

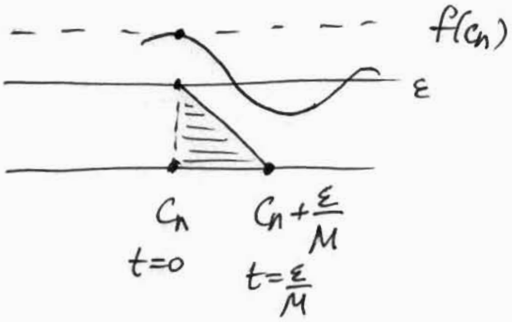
$\int_{R_0}^\infty f(x)dx$ מתכנס $\Leftarrow$

היות ו- $\int_{R_0}^\infty f(R_0)e^{-M_0x}dx$ מתכנס, והפונק' הן חיוביות

$\Leftarrow$ $\int_0^\infty f$ מתכנס כדרוש.

(ב) $\int_0^\infty f$ מתכנס, $|f'|<M$. נוכיח ש- $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

אם זה לא כך, קיימת סדרה $c_n \nearrow \infty$ ו- $\varepsilon>0$ כך ש-
$\forall n \quad f(c_n)\geq\varepsilon$



נתבונן ב- c_n+t:

$t>0$

אז $f(c_n+t) = f(c_n) + \int_{c_n}^{c_n+t} f'(x)dx \geq$

$\geq f(c_n) - M\cdot t > \varepsilon - Mt.$

– $|f'|<M \iff \underbrace{-M<f'}_{\text{ניקח את זה}}<M$

– מונוטוניות האינטגרל

ולכן $\forall n \quad \int_{c_n}^{\infty} f \geq \frac{\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{M}}{2}$ (שטח המשולש המקווקו.)

וזאת בסתירה לכך ש- $\int_R^\infty f \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

(במקרה ש- $\int_0^\infty f$ מתכנס).

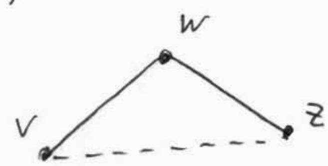
(6) (א) (סקיצה) לשני מספרים $V=(c,d)$ נגדיר: $\|(c,d)\| = \sqrt{c^2+d^2}$

<u>טענה</u>: $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

לכל $v,w \in \mathbb{R}^2$.

(הוכחה ע"י העלאה בריבוע ופתיחת סוגריים מספיק פעמים)

<u>מסקנה</u>: אם $d(v,w) := \|v-w\|$ (פונקציית המרחק)

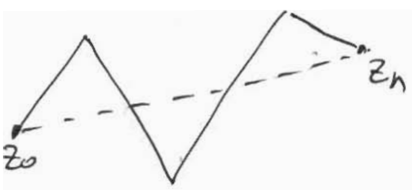


אז $d(v,w) + d(w,z) \geqslant d(v,z)$

(מכאן השם - אי-שיוויון המשולש).

<u>מסקנה</u>: באינדוקציה, אם $z_0,\dots,z_n \in \mathbb{R}^2$ אז

$$d(z_0,z_1) + d(z_1,z_2) + \dots + d(z_{n-1},z_n) \geqslant d(z_0,z_n)$$



ומכאן הטענה נובעת ישירות מהגדרת אורך קו.

(ב) $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ - עולה, על, גזירה ברציפות.

נוכיח שאורך $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$, $\alpha \leq s \leq \beta$ שווה לאורך $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$.

$$\text{אורך } \tilde{\gamma} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x(\varphi(s))'\right)^2 + \left(y(\varphi(s))'\right)^2}\, ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(\varphi(s))\right)^2 (\varphi'(s))^2 + y'(\varphi(s))(\varphi'(s))^2}\, ds$$

נסמן: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(\varphi(s))\right)^2 + \left(y'(\varphi(s))\right)^2}\ \varphi'(s)\, ds \overset{\boxed{t=\varphi(s),\, dt=\varphi'(s)ds}}{=} \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$\blacksquare$

7 (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\log(n)$$

זה טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה. נשווה עם הטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

באמת,

$$\frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\log(n)}{\frac{1}{n^2}\cdot\sqrt{n}} \longrightarrow 1\cdot 0 = 0$$

$\Leftarrow$ הטור מתכנס.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\tfrac{1}{n}\right) - \frac{a}{n}$$

נבדוק סימן המחוברים:

$$\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)-\frac{a}{n} = \frac{1}{n}\left(\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}-a\right)$$

לכן אם $a>1$:

$\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{a}{n} < 0$

החל ממקום מסוים

ואם $a<1$:

$\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{a}{n} > 0$

החל ממקום מסוים.

ואם $a=1$:

$\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n} < 0$

כי $\sin(x) < x$.

לכל $x>0$.

בכ"מ, זה טור עם מקדמים מסימן קבוע.

במקרים $a>1$, $a<1$ נשווה עם הטור המתבדר $\sum \frac{1}{n}$:

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{a}{n}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1-a \neq 0$$

לכן הטור מתבדר.

במקרה $a=1$: טיילור מסדר 2: $\sin(x) = x + \bar{\bar{o}}(x^2)$, $x \to 0$

$$\Leftarrow \quad \frac{\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

והטור $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס. לכן גם הטור שלפני

$\sum \sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$ מתכנס.

ⓒ $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x\sin(x)}{x^3+1}dx$ - זה טור חיובי. (כי הפונק' $\frac{x\cdot\sin x}{x^3+1} \geq 0$ בתחום $[0,1]$)

ולכל $\frac{x\sin(x)}{x^3+1} \leq x$

לכל $x \in [0,1]$

$$\Leftarrow \quad \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x\sin(x)}{x^3+1}dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} x\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

והטור $\sum \frac{1}{2n^2}$ מתכנס.

$\Leftarrow$ גם הטור שלפני $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x\sin(x)}{x^3+1}dx$

מתכנס.

(d) $h_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$; זה הטור ההרמוני ; $h_n \nearrow +\infty$

$h_n > 0$.

הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} a^{h_n}$

$a \ge 0$ (אחרת אין משמעות לטור
כשמדובר בפונק' מעריכית)

אם: $a \ge 1$: המחובר הכללי $a^{h_n} \not\to 0$.

⇐ הטור מתבדר.

$0 \le a < 1$: היות ו- $h_n \nearrow +\infty$, $\underset{0}{\overset{\vee}{a^{h_n}}} \searrow 0$

לכן ניתן להשתמש במבחן העיבוי של קושי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{h_n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a^{h_{2^n}}$$

כאן נשתמש במבחן השורש של קושי:

$$\sqrt[n]{2^n a^{h_{2^n}}} = 2a^{\frac{h_{2^n}}{n}} \longrightarrow 2a^{\ln(2)} \begin{cases} <1 \iff a<\frac{1}{e} \\ =1 \iff a=\frac{1}{e} \\ >1 \iff 1>a>\frac{1}{e} \end{cases}$$

$\boxed{\frac{h_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ היות ו- }}$

לכן עבור $0 \le a < \frac{1}{e}$
הטור שלנו מתכנס ;
עבור $1 > a > \frac{1}{e}$ הטור שלנו מתבדר. נשאר לבדוק
$a = \frac{1}{e}$:

במקרה הזה:

$$2^n a^{h_{2^n}} = \frac{2^n}{e^{h_{2^n} - \ln(2)\cdot n + \ln(2)n}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}^n}{e^{h_{2^n} - \ln(2^n)} \cdot \cancel{2}^n} = \frac{1}{e^{h_{2^n} - \ln(2^n)}} \longrightarrow \frac{1}{e^{\gamma}} \neq 0$$

$\gamma = \lim_{m \to \infty} h_m - \ln(m)$ קבוע Euler-Mascheroni.

כלומר האיבר הכללי $\not\to 0$ ולכן הטור מתבדר.

ולכן גם הטור שלנו מתבדר.

ⓔ בהחלט הטור מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 n}}$$ (f)

היות ו- $\log_2 n \nearrow \infty$, $0 \searrow \frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 n}} > 0$.

לכן ניתן להשתמש במבחן הכווץ של קושי:

$$\sum \frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 n}} \sim \sum 2^n \frac{1}{(\log_2(2^n))^{(\log_2(2^n))}} =$$

$$= \sum 2^n \frac{1}{n^n}$$ — מתכנס

לפי מבחן השורש של קושי: $\sqrt[n]{2^n \cdot \frac{1}{n^n}} = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$

⟸ הטור שלנו

$$\sum \frac{1}{(\log_2(n))^{(\log_2(n))}}$$

מתכנס.

(g) גם כאן $\log = \log_2$.

$$\sum_{n=10}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}}_{a_n}.$$ $0 < a_n \searrow 0$ ⟸ ניתן להשתמש במבחן קושי (כווץ):

$$\sum \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}} \sim \sum 2^n \frac{1}{(\log(2^n))^{\log\log(2^n)}} =$$

$$= \sum 2^n \frac{1}{\cancel{\log}\, n^{\log n}} =$$

$$= \sum 2^n \frac{1}{2^{(\log n)^2}} = \sum 2^{n-(\log n)^2}$$

אבל $n-(\log n)^2 \to +\infty$ ולכן $2^{n-(\log n)^2} \to +\infty \neq 0$.

ז"א, האיבר הכללי $\not\to 0$.

ולכן הטור מתבדר. ולכן גם הטור שלנו

$$\sum \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$$ מתבדר

8) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

$$P_n := \prod_{k=1}^{n} a_k$$

הגדרה: "$\prod_{k=1}^{\infty} a_k$" "מתכנסת" $\iff \exists \lim_{n\to\infty} P_n =: P \neq 0$.

א) אם $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנסת, אז $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \longrightarrow \frac{P}{P} = 1$.

ב) ($a_n > 0$ לכל n) במקרה זה $P_n > 0$ לכל n,

ו- $P > 0$ במקרה שהמכפלה מתכנסת.

השקילויות נובעות ישירות מהנוסחאות:

1) $\ln(P_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = S_n$

$\Downarrow$

2) $P_n = e^{S_n}$

סכום חלקי של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$

ולכן אם $P_n \to P > 0$ אז

$S_n \longrightarrow \ln(P)$ לפי רציפות $\ln(x)$

ואם $S_n \longrightarrow S$ אז

ג) (קצת יותר מורכב) סוג $c_n \geq 0$, $a_n = 1 + c_n$. במקרה זה $\boxed{0 \leq \ln(a_n) \leq c_n}$ (*)

לכן, אם $\sum c_n$ מתכנס, אז $\sum \ln(a_n)$ מתכנס $\Leftarrow$ $\prod a_n$ מתכנס.

וכן $\boxed{\ln(a_n) \geq c - \frac{1}{2}c^2}$ (**)

לכן, אם $\sum \ln(a_n)$ מתכנס אז:

$$\ln(a_n) \to 0 \Rightarrow 1 + c_n = e^{\ln(a_n)} \to 1$$

$$\Rightarrow c_n \to 0$$

$$\Rightarrow \underline{\ln(a_n) \geq c_n - \tfrac{1}{2}c_n^2} \geq \underline{\tfrac{1}{2}c_n \geq 0}$$

n_0 החל ממקום מסוים (**)

לפי קריטריון ההשוואה $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2}c_n$ מתכנס $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס.

<u>הוכחה של (*), (**)</u>: לפי פיתוח טיילור

מסדר ראשון עם שארית לגרנז':

$$\ln(1+c) = c - \frac{1}{2(1+d)^2}c^2 \quad \begin{cases} \leq c \\ \geq c - \frac{1}{2}c^2 \end{cases}$$

כש- $0 < d < c$

---

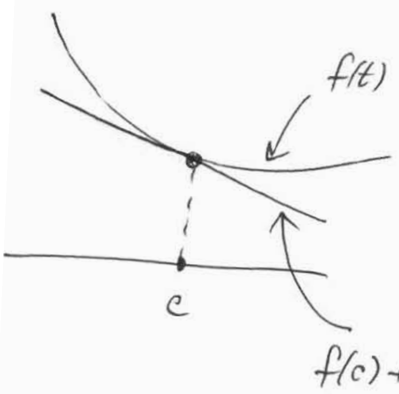
(9) כאן הייתה שגיאה בכיוון אי השוויון.

f - קמורה וגזירה.

g - רציפה.

נוכיח

$$f\left(\int_0^1 g(x)dx\right) \le \int_0^1 f(g(x))dx$$



$$c := \int_0^1 g(x)dx$$

$$f(t) \ge f(c) + f'(c)(t-c) \quad \Longleftarrow$$ לפי קמירות

$$f(c) \le f(t) - f'(c)(t-c) \quad \Longleftarrow$$

$$f(c) = \int_0^1 f(c)dx \le \int_0^1 f(g(x))dx - 0 \quad \Longleftarrow$$

$$f\left(\int_0^1 g(x)dx\right) \le \int_0^1 f(g(x))dx \quad \Longleftarrow$$

לפי מונוטוניות האינטגרל. $\left(\int_0^1\right)$ & $t=g(x)$ & הגדרת c

הסבר:

$$f(c) \le f(g(x)) - f'(c)(g(x)-c)$$

$$\int_0^1 f(c)dx \le \int_0^1 f(g(x))dx - f'(c)\underbrace{\left(\int_0^1 g(x) - c\right)}_{0}$$

(I) חישוב הפונקציות הגבוליות.

(10) (א) $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$, תחום $[0,\infty)$.

$\underline{0\le x\le 1}$: $1\le f_n(x)\le \sqrt[n]{1+1^n}=\sqrt[n]{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

$\Leftarrow$ $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

$\underline{x>1}$: $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}=x\underbrace{\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}$

כמו פעם קודמת

$\Leftarrow$

$f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}x$

$\Leftarrow$ $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1 & x\le 1\\ x & x\ge 1\end{cases}$ היא הפונקציה הגבולית.

(ב) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$, תחום $[0,1]$

$\underline{x=0}$: $f_n(0)=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\underline{0<x\le 1}$: $f_n(x)=\frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\Leftarrow$ $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\equiv 0$.

(ג) $f_n(x)=\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n$

$f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-x^2}$

$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=e^{-x^2}$.

(II) התכנסות במ"ש.

א) ב- $[0,1]$

$$f_n(x)-1 = \sqrt[n]{1+x^n} - 1 =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{(1+x_1^n)^{\frac{n-1}{n}}} x^n \leq \frac{1}{n}$$

לגרנז'

$x \leq x_1 \leq 1$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

ב- $[1,\infty)$

$$f_n(x)-x = \sqrt[n]{1+x^n} - x =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{(1+x_1^n)^{\frac{n-1}{n}}} \cdot 1 \leq \frac{1}{n}$$

לגרנז'

$1 \leq x_1 \leq x$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ יש התכנסות במ"ש.

ב) חישבנו: $f(x) \equiv 0$.

אין התכנסות במ"ש, כי לכל n, עבור $x_n = \frac{1}{n}$

$$f_n(x_n) = \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+(n\cdot\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow \forall n \quad \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \geq \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$ זה לא שואף ל- 0.

③ ב- $\mathbb{R}$ אין התכנסות במ"ש, מפני ש- $f(x)=e^{-x^2}$
חסומה ($0<f\leq 1$) בעוד ש- $f_n(x)$ לא חסומה
לכל n. (כפולינומים ממעלה >0).

לכן $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = +\infty$.
וזה בטח לא שואף ל- 0.

ב- $[-A,A]$: $x\in[-A,A] \Leftrightarrow |x|\leq A \Leftrightarrow x^2\leq A^2$.

טענה: החל מ- $n_0=[A^2]+1$ הסדרה $f_n(x)$
היא סדרה עולה של פונקציות רציפות חיוביות ב- $[-A,A]$.

הוכחה: * $n\geq n_0 \Rightarrow n>A^2 \Rightarrow \frac{x^2}{n}<1 \;\; \forall x\in[-A,A] \Rightarrow 1-\frac{x^2}{n}>0$

$\Rightarrow f_n(x)=(1-\frac{x^2}{n})^n>0$, וגם רציפות כי הן
פולינומים.

* עולה: $f_n(x)=e^{n\ln(1-\frac{x^2}{n})}$

עולה $\Leftrightarrow n\ln(1-\frac{x^2}{n})$ עולה. אבל:

$n\uparrow \Rightarrow \frac{x^2}{n}\downarrow \Rightarrow -\frac{x^2}{n}\uparrow \Rightarrow \ln(1-\frac{x^2}{n})\uparrow \Rightarrow n\ln(1-\frac{x^2}{n})\uparrow$
מ.ש.ל.

לכן, לפי הטענה, מתקיימים תנאי משפט דיני, ומכאן
יש התכנסות במ"ש.

הערה: אפשר לפתור שאלה זו ישירות ע"י פיתוח טיילור של $\ln(1+y)$

(Take 2) 7e

הוכחנו שהטור $\sum (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sin(\frac{1}{n})$ לא מתכנס בהחלט.

<u>טענה:</u> הטור מתכנס בתנאי.

<u>רדוקציה #1:</u> מספיק להוכיח שהטור $\sum (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{n}$ מתכנס.

<u>הוכחה:</u> לפי פיתוח טיילור מסדר 2: $\sin(x) = x + \alpha(x)$

$$\alpha(x) = \bar{\bar{o}}(x^2)$$

$$\Leftarrow \quad \sum_{n=1}^{M} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sin(\tfrac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{M} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{n} + \underbrace{\sum_{n=1}^{M} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\alpha(\tfrac{1}{n})}$$

מתכנס בהחלט, ע"י השוואה עם $\sum\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{|\alpha(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Leftarrow \quad \sum (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{n} \sim \sum (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sin(\tfrac{1}{n})$$

(מתכנסים ומתבדרים ביחד)

<u>רדוקציה #2:</u> מספיק להוכיח שהסדרה $\sum_{n=1}^{K^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{n} = S_{K^2-1}$ מתכנסת.

<u>הוכחה:</u>

$$\underset{\sum_{1}^{M}\cdots}{S_M} = \underset{\sum_{1}^{K^2-1}\cdots,\ K=\lfloor\sqrt{M}\rfloor}{S_{(\lfloor\sqrt{M}\rfloor)^2-1}} + \underbrace{\sum_{n=\lfloor\sqrt{M}\rfloor^2}^{M} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{n}}_{\overset{!!}{T_M}}$$

$$|T_M| \leqslant \sum_{n=\lfloor\sqrt{M}\rfloor^2}^{M} \frac{1}{n} \leqslant \frac{2\lfloor\sqrt{M}\rfloor+1}{\lfloor\sqrt{M}\rfloor^2} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$$

$$\lfloor\sqrt{M}\rfloor^2 \leqslant M < (\lfloor\sqrt{M}\rfloor+1)^2 = \lfloor\sqrt{M}\rfloor^2+2\lfloor\sqrt{M}\rfloor+1$$

(כי $\lfloor\sqrt{M}\rfloor \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$)

לכן אם $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_{k^2-1} = S$

אז $\exists \lim\limits_{M\to\infty} S_M = S$.

נוכיח ש- S_{k^2-1} מתכנסת: נגדיר $A_n = \sum\limits_{R=0}^{2n} \frac{1}{n^2+R}$

אז $S_{(k+1)^2-1} = \sum\limits_{n=1}^{K} (-1)^n A_n$

לדוגמה $\left(S_8 = \underbrace{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{-A_1} + \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{A_2}\right)$

$$\left(A_n = \frac{2}{n} + R_n \qquad |R_n| \leqslant \frac{5}{n^2}\right)$$

למה: (הוכחה בהמשך)

מהלמה נובע ש-

$$S_{(k+1)^2-1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{K} (-1)^n \frac{2}{n}}_{\text{מתכנס לפי לייבניץ: } \searrow \frac{2}{n} > 0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{K} (-1)^n R_n}_{\text{מתכנס בהחלט, ע"י השוואה עם } \sum \frac{5}{n^2}}$$

ולכן הסדרה $S_{(k+1)^2-1}$ מתכנסת

הוכחת הלמה:

$$R_n := A_n - \frac{2}{n} = \left(\sum_{R=0}^{2n} \frac{1}{n^2+R}\right) - \frac{2n}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2} + \sum_{R=1}^{2n}\left(\frac{1}{n^2+R} - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$\boxed{\frac{2n}{n^2} = \sum_{R=1}^{2n}\frac{1}{n^2}\,!}$$

$$= \frac{1}{n^2} + \sum_{R=1}^{2n} \frac{n^2-n^2-R}{(n^2+R)n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2} - \sum_{R=1}^{2n} \frac{R}{(n^2+R)n^2}$$

$$\Longrightarrow |R_n| \leq \frac{1}{n^2} + \sum_{R=1}^{2n} \frac{R}{(n^2+R)n^2} \leq \frac{1}{n^2} + \sum_{R=1}^{2n} \frac{2n}{(n^2+0)n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{(2n)^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} = \frac{5}{n^2}.$$

מ.ש.ל.