Note Title 25/04/2009

פתרון תרגיל 6 :

1) א) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ מתכנס במ"ש ב- $[-q,q]$ לכל $0<q<1$. מכיוון שרדיוס ההתכנסות הינו:

$R=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$ וידוע שטור חזקות

מתכנס במ"ש בכל קטע סגור בתחום ההתכנסות.

ג) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\cdot \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

נשים לב כי לכל n בנפרד הפונק'

$f_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ מקבלת מקסימום ב- $x^2=\frac{1}{n-1}$

(הסבר: $f_n'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^n}-n\cdot(1+x^2)^{-n-1}\cdot 2x\cdot x^2=0 \quad / :2x$ כי ב- $x=0$ אין מקסימום ופותרים כנ"ל.)

ולכן $|f_n(x)|\le \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n}$ ולכן המשאר

של הטור (טור לייבניץ) $|R_n(x)|\le \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n}$ שואף

במ"ש ל- 0 ולכן הטור מתכנס במ"ש ב- $\mathbb{R}$.

ב) כאן כבר יש בעיה.

נחשב במפורש -

$$R_n(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^k}=$$

$$=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^l}=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$$

ואם נציב למשל ש- $x_n^2=\frac{1}{n-1}$ נקבל כי

$R_n(x_n)\approx\frac{1}{e}$ ולכן השארית אינה שואפת במ"ש ל-0.

ב) הנ"ל ו- $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-|x-n|}$ בקטע $[0,\infty)$.

$$S(x)=\underbrace{S_n(x)}_{\text{סכום חלקי}}+\underbrace{R_n(x)}_{\text{שארית}}$$

ושוב, כל הטור הזה מתכנס במ"ש היינו נקבל

כי $R_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל-0.

אך לכל $n\in\mathbb{N}$ אם נבחר ב- $x_n=n+1$

נקבל כי $R_n(x_n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}e^{-|x_n-k|}\geq\frac{1}{e}$

ולכן לא מתכנס במ"ש ל-0.

ג) א) צ"ל: $\sup f_n(E)\xrightarrow[n\to\infty]{}\sup f(E)$ $\left(f_n\xrightarrow[\text{במ"ש}]{}\overset{\text{כאשר!}}{f}\right)$

הוכחה: נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. כלומר-

קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $n\geq N$

כך ש- $\left|\sup f_n(E)-\sup f(E)\right|\geq\varepsilon$. (*)

כמו כן, מהתכנסות במ"ש של הסדרה

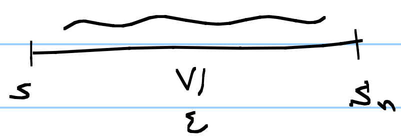
נניח שעבור ב-$\varepsilon>0$ הנ"ל קיים N_ε

כך שלכל $n \ge N$ ולכל $x\in E$: $|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

יהי $n \ge N$ כמו ב-$(*)$.

נניח לשם נוחות כי $s_n := \sup f_n(E) > \sup f(E) =: s$

לפי ההנחה -



יהי $x\in E$ המקיים $s+\frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) \le s_n$

($s+\frac{\varepsilon}{2}<s_n$ ולכן אינו חסם מלעיל של $(f_n(E))$.

כמו כן - $f(x)\le s$ (כי $s=\sup f(E)$)

ולכן - $f(x) \le s < s+\frac{\varepsilon}{2} < f_n(x)$, כלומר -

$|f_n(x)-f(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ סתירה. ☒

ב) באופן דומה.

3) מופיע בסיכום של התרגול. (בתיקייה שבה התרגולים שם

נמצא בגישה - אתר כללי - (www.tau.ac.il/~ferberas-ל).

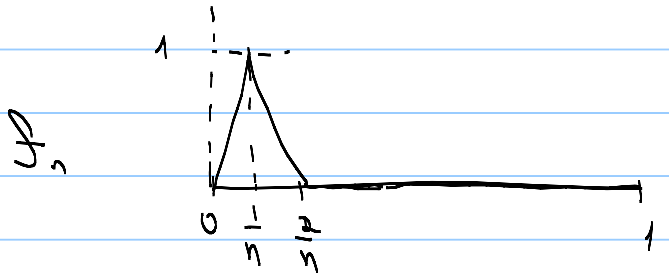
4) א) פונק' לא רציפה שמתכנסת במ"ש לפונק' רציפה:

$f_n(x) = \frac{1}{n}\cdot D(x)$ בקטע $[0,1]$.

פונק' דיריכלה.

$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} 0$ אך אף אחת מהן אינה רציפה.

ב) לדוגמא:



f_n רציפות. $f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} 0$

ולא במ"ש כי תמיד ניתן למצוא x_n כך ש- $f_n(x_n)=1$.

5) א) $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, $x\in[0,1]$.

צ"ל: $\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt$

פתרון: $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} = 1 - \frac{1}{1+nx}$

ולכן $\int_0^x f_n(t)\,dt = x - \frac{\ln(1+nx)}{n}$

ונקבל כי- $\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{\ln(1+nx)}{n}\right)$

$= \underline{\underline{x}}$

ב) נשים לב כי $(f_n(x))' = \left(\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right)'$

$$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^4}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}} \le \frac{1}{n^2}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן $\sum (f_n(x))'$ מתכנס

במ"ש ב-$\mathbb{R}$ (לפי ויירשטראס).

ולכן גם $\sum \int_0^x (f_n(t))'dt$ מתכנס

במ"ש ב-$\mathbb{R}$ ולכן מותר לגזור איבר איבר.

6) יהי $\{f_n\}$ סדרת פונק' גזירות ב-$I=[a,b]$ המתכנסת

נקודתית ל-f ב-I.

נניח קיים $0<M$: $\sup_n \sup_I |f_n'(x)| \le M$

צ"ל: $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$.

הוכחה: ראשית נשים לב שלכל $x_0\in I$ ולכל $x\in I$

ולכל $n\in\mathbb{N}$: $(*)$ $|f_n(x)-f_n(x_0)| \le M\cdot|x-x_0|$

(נתון + לגראנז').

עתה, נראה ש-f רציפה ב-I: יהי $x_0\in I$.

ויהי $0<\varepsilon$. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{3M}$ ונקבל כי

לכל $x\in N_\delta(x_0)$:

$$|f(x)-f(x_0)| \le \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{1} + \underbrace{|f_n(x)-f_n(x_0)|}_{2} + \underbrace{|f_n(x_0)-f(x_0)|}_{3}$$

וכמו כן נוכל לבחור n מספיק גדול כך ש- ③, ①

אז קטנים מ- $\frac{\varepsilon}{3}$ ואילו $② < \frac{\varepsilon}{3}$ ישירות

מ- (*).

ולכן לכל $x \in N_r(x_0)$: $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

ולכן f רציפה ב- x_0.

עתה נניח בשלילה ש- $f_n \xrightarrow[\text{במ"ש}]{} \!\!\!\!\!\!/\;\; f$.

כלומר קיימת $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ סדרה של (אינדקסים)

וקיים $0<\varepsilon_0$ כך ש- $|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \ge \varepsilon_0$

לכל k.

$\{x_{n_k}\} \subseteq I$ חסומה ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת.

בה"כ נניח $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$.

נראה סתירה ע"י כך שנמצא k עבורו:

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| < \varepsilon_0 .$$

נשים לב כי- (לכל k)

$$\varepsilon_0 \le |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \le |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_0)| +$$

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_{n_k})|$$

נשים עבור $k\in$ מספיק גדול כך ש- $|x_{n_k}-x_0|<\frac{\varepsilon_0}{3M}$

ו- $|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ (התכנסות נקודתית)

וש- $|f(x_0)-f(x_{n_k})|<\frac{\varepsilon}{3}$ (רציפות f) קיבלנו סתירה $\boxtimes$

7) א) צ"ל: $\int_0^1 x^n\ln^m(x)\,dx=\frac{(-1)^m\cdot m!}{(n+1)^{n+1}}$ לכל $m,n>0$.

הוכחה: נסמן- $I_{n,m}=\int_0^1 x^n\ln^m(x)\,dx$

$$I_{n,m}=\left[\begin{matrix} f'(x)=x^n \longrightarrow f(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ g(x)=\ln^m(x)\longrightarrow g'(x)=m\ln^{m-1}(x)\cdot\frac{1}{x}\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^m(x)\Big|_0^1-\frac{m}{n+1}\int x^n\cdot\ln^{m-1}(x)=-\frac{m}{n+1}\cdot I_{n,m-1}=\frac{(-1)\cdot m}{n+1}\cdot\frac{(-1)\cdot(m-1)}{n+1}I_{n,m-2}\dots$$

אינד'

נשים לב כי- $I_{n,0}=\frac{1}{n+1}$ ולכן- $I_{n,m}=(-1)^m\cdot\frac{m!}{(n+1)^{n+1}}$.

ב) צ"ל כי- $\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}$

רמז- $\left(x^{-x}=e^{-x\ln(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^n\ln^n(x)\right)$

פיתרון: הטור באגף ימין של הרמז מתכנס

במ"ש ב- $[0,1]$ $\left(0=nx^{n-1}\ln^n(x)+nx^{n-1}\ln^{n-1}(x)\right.$

$\Leftarrow 0=\ln(x)+1$

$\Leftarrow x=\frac{1}{e}$

ולכן ניתן לבצע אינטגרציה

איבר איבר ונקבל כי: לפי- ויירשטראס מניח א' המקסימום).

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\cdot \int_0^1 x^n \ln^n(x)\,dx =$$

$$\underset{\text{סע' א'}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\cdot (-1)^n \cdot \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

$\boxed{\times}$

9) א) תהי- $\{P_n(x)\}$ סדרת פולינומים המתכנסת במ"ש לפונק' $P(x)$ ב- $\mathbb{R}$.

נרצה להוכיח כי- $P(x)$ פולינום.

פתרון: $P_n(x) \xrightarrow[\text{במ"ש}]{} P(x)$ ולכן לפי קריטריון קושי- לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,n \geq N$ ולכל x ממשי: $|P_m(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$.

אך- $P_m(x) - P_n(x)$ - פולינום לכל m,n

ולכן נסיק שלכל $m,n \geq N$: $P_m(x) - P_n(x) = \text{const}$

(אם פולינום חסום ב- $\mathbb{R}$ אזי הוא בהכרח קבוע!)

ולכן נסיק שהחל מה- N הנ"ל כל 2 פולינומים נבדלים זה מזה בקבוע.

כלומר- $P_n(x) = P_N(x) + a_n$ לכל $n \geq N$

אך מכיוון שהסדרה $\{P_N(x)+a_n\}_{n=N}^{\infty}$ מתכנסת

מ״ש נכון כי $\{a_n\}$ סדרה מתכנסת

ולכן $P(x) = P_N(x) + \lim_{n\to\infty} a_n$ = פולינ׳. ☒

8) נסמן $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f_n^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$

(הצגה, ע״י מספר n של $f_n(x) = \left[(n+1)\binom{2n+1}{n}\right]^{-1}(1+x)^{2n+1}$)

נראה תחילה כי $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\cdot R_n(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\pi}$

נחשב: $f_n^{(n+1)}(t) = \frac{(2n+1)!}{n!}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot\binom{2n+1}{n}}\cdot(1+t)^n$

$$= \frac{\cancel{(2n+1)!}}{\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}\cdot(n+1)!}{\cancel{(2n+1)!}\,(n+1)}\cdot(1+t)^n = n!\,(1+t)^n$$

או יש תיקון של טעם קטלני או קטלני במרכזי אני
אך מעניין שהרעיון כבר בכיוון.

ולכן כי $R_n(1) = \frac{1}{n!}\int_0^1 n!\,(1+t)^n(1-t)^n\,dt$

$$= \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt = \begin{bmatrix} t = \frac{x}{\sqrt{n}} \\ \sqrt{n}\,dt = dx \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dt$$

ולכן מ״ש לכן כי

$$\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}R_n(1) = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dt \longrightarrow \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$$

הערה: נכון מכיוון ש- $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n < e^{-x^2}$

עבור חלק $x<$ והאינטגרל הוא אמיתי $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ קיים

ולכן e^{-x^2} מצורתה של סדרת הפונק' עם אינטגרל

סופי ולכן נסיק את המבוקש ממשפט ההתכנסות

הנשלטת