חדו"א 2 – תרגיל מס' 9

פתרון

(1) א.-ג. – חישוב ישיר.
(סקיצה)

ד. – אינטגרציה בחלקים.

ה. – נובע מ- ד. והלמה של רימן לבג.

(2) א. – נובע מהמשפט על התכנסות נקודתית של טור פורייה
(סקיצה)

(כי 0 היא פונקציית ליפשיץ)

ב. – א. לפונקציה $d=f-g$.

(3) חדו"א 1. (המשך)

(4) חדו"א 1. (נובע מ-(3) לפי משפט לגרנז')
(סקיצה)

(5) בהמשך.

בדקו:

(6) $f*g$ – רציפות, 2π מחזוריות. ($\Leftarrow$ רציפות במ"ש)

(ח) $$(f*g)(x)-(f*g)(y) = \int_0^{2\pi}\left[f(x-t)-f(y-t)\right]g(t)\,\frac{dt}{2\pi}$$

נקבע $\varepsilon>0$. נקח $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon'$.

לפי חישוב (ח) נקבל ש-

(חח) $$|(f*g)(x)-(f*g)(y)| \le \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(x-t)-f(y-t)|}_{<\varepsilon'}\,|g(t)|\,\frac{dt}{2\pi} < \varepsilon'\int_0^{2\pi}|g(t)|\,\frac{dt}{2\pi}$$

כי $(x-t)-(y-t)=x-y$

אם $g\equiv 0$ אז $f*g\equiv 0$ שאז רציפה.

אחרת $M=\int|g(t)|\frac{dt}{2\pi}>0$. אז נבחר $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{M}$.

ואז לפי חישוב (תה)

$$|(f*g)(x)-(f*g)(y)|<\varepsilon$$

עבור כל $|x-y|<\delta$. צ"ל הקונבולוציה רציפה במ"ש. (ובפרט רציפה).

(7) בהמשך.

(8) $$\cot(\pi t)-\frac{1}{\pi t}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{t^2-n^2}$$

<u>כ"ל:</u> $$\int_0^{\pi x}\left(\cot(t)-\frac{1}{t}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

$0\le x<1$

נשים לב שהאינטגרל משמאל הוא אינטגרל רימן רגיל, כי $\cot(t)-\frac{1}{t}=\frac{1}{\tan t}-\frac{1}{t}\xrightarrow[t\to 0]{}0$ (מחשבים בעזרת טיילור למשל).

(א) <u>טענה:</u> עבור $0\le x<1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{t^2-n^2}$ (של פונקציות) מתכנס במידה שווה בתחום $\{0\le t\le x\}$.

ובשוואת $\left|\frac{t}{t^2-n^2}\right|\le\left|\frac{x}{x^2-n^2}\right|$ בתחום, כי $\left|\frac{t}{t^2-n^2}\right|=\frac{t}{n^2-t^2}$ $(0\le t<1)$ פונקציה עולה. (לכל n) ו- $\left|\frac{x}{x^2-n^2}\right|=\frac{x}{n^2-x^2}\ge 0$ (כש-x קבוע!) | בדקו! |

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2-x^2}$ מתכנס ע"י השוואה עם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

היות וכל המחוברים $u_n(t)=\frac{t}{t^2-n^2}$ הם רציפים (ולכן אינט'),
מהתכנסות במ"ש נובע שניתן לעשות אינטגרציה איבר-איבר.

ואז:

$$\int_0^{\pi x}\left(\cot(t)-\frac{1}{t}\right)dt \underset{t=\pi s}{=} \pi\int_0^{x}\left(\cot(\pi s)-\frac{1}{\pi s}\right)ds =$$

$$= \cancel{\pi}\cdot\frac{2}{\cancel{\pi}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{x}\frac{s}{s^2-n^2}\,ds \underset{\substack{r=s^2\\ s\,ds=\frac{1}{2}dr}}{=} 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{x^2}\frac{1}{r-n^2}\,dr =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\ln|r-n^2|\Big|_0^{x^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2-x^2}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

כפי שרצינו.

ב) מ-(c)

$$\int_0^{x}\left(\cot(t)-\frac{1}{t}\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

בדקנו!

$\int_\varepsilon^x \dots$ קחו והשאיפו $\varepsilon\to 0$, למשל

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right) = \lim_{N\to\infty}\ln\left(\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)\right)$$

⟸ ניקח אקספוננט:

$$\frac{\sin x}{x} = e^{\lim_{N\to\infty}\ln\left(\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)$$

לפי רציפות האקספוננט.

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)$$

כדרוש.

עבור $x=\frac{\pi}{2}$ מקבלים את נוסחת Wallis (בדקו).

9) הצבנו $z=e^{it}$ ב- $P_{n,k}(z)=z^k(1-z)^{n-k}$ לקבלת הפולינום

הטריגונומטרי; המשיכו כמו בהוכחת משפט ברנשטיין.

---

5) א)

$f(x)=x$

$x\in[0,2\pi)$

$$\hat{f}(n)=\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\frac{dx}{2\pi}$$

$$\hat{f}(0)=\int_0^{2\pi} x\,\frac{dx}{2\pi}=\pi$$

$$\underset{n\neq 0}{\hat{f}(n)}=\int_0^{2\pi} x e^{-inx}\,\frac{dx}{2\pi}=\frac{xe^{-inx}}{(2\pi)(-in)}\Bigg|_0^{2\pi}-\cancel{\int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{in}\,\frac{dx}{2\pi}}^{\,0}=\frac{i}{n}$$

ההתכנסות היא לא במ"ש, כי f לא רציפה.

התכנסות נקודתית יש בכל נק' $\notin 2\pi\mathbb{Z}$, כי f ליפשיץ-מקומית

בסביבות כל נק' כנ"ל. אין התכ' נקודתית בנק' מהצורה $x_k=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. אך

אלא, $S_N f(x_k)\xrightarrow[N\to\infty]{}\frac{2\pi+0}{2}=\pi$ בנק' אלה. אין התכ' גם בממוצע.

(בדקו)

ב)

$f(x)=x$

$x\in[-\pi,\pi)$

$$\hat{f}(0)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{dx}{2\pi}=0$$

$$\underset{n\neq 0}{\hat{f}(n)}=\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx}\,\frac{dx}{2\pi}=2\,\frac{\pi e^{-i\pi n}}{(2\pi)(-in)}=\frac{(-1)^{n}i}{n}$$

ההתכנסות לא במ"ש כי f לא רציפה.

התכ' נק' בכל $x\notin \pi+2\pi\mathbb{Z}$, כי f ליפשיץ מקומית שם.

אין התכ' נקודתית בנקודות $\{x_k=\pi+2\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. בהן ההתכ' היא ל- $\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0$

$f(x)=(1-\frac{x}{\pi})^2$ ②

$x\in[0,2\pi)$

$$\hat{f}(0)=\int_0^{2\pi}(1-\frac{x}{\pi})^2\frac{dx}{2\pi}=\frac{1}{3}$$

$$\hat{f}(n)=\int_0^{2\pi}(1-\frac{x}{\pi})^2e^{-inx}\frac{dx}{2\pi}=\cancel{\frac{(1-\frac{x}{\pi})^2}{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{2\pi}}^{\,0}-$$

$$-\int_0^{2\pi}2(-\frac{1}{\pi})(1-\frac{x}{\pi})\frac{e^{-inx}}{-in}\frac{dx}{2\pi}=$$

$$=+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-in}\left(\cancel{\int_0^{2\pi}e^{-inx}dx}^{\,0}-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xe^{-inx}dx\right)=$$

$$=+\frac{2}{\pi^2 n i}\left(\frac{i}{n}\right)$$ מהחישוב הקודם $$=\frac{2}{\pi^2n^2}$$

ההתכנסות היא במ"ש, כי $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|<\infty$ וכן, יש (ובהחלט)
התכנסות נקודתית, כי הפונק' היא ליפשיץ מקומית בכל
התחום (בדוק).

$f(x)=\mathrm{sign}(x)$ ③

$x\in[-\pi,\pi)$

$$\hat{f}(0)=\int_{-\pi}^{0}(-1)\frac{dx}{2\pi}+\int_0^{\pi}1\,\frac{dx}{2\pi}=0$$

$$\underset{n\neq 0}{\hat{f}(n)}=\int_{-\pi}^{0}-e^{-inx}\frac{dx}{2\pi}+\int_0^{\pi}e^{-inx}\frac{dx}{2\pi}=-\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1-(-1)^n}{-in}+\frac{(-1)^n-1}{-in}\right)=\frac{2((-1)^n-1)}{2\pi in}=\frac{(-1)^n-1}{\pi in}=\frac{(-1)^n-1}{\pi in}.$$

התכנסות נק' לכל $x\notin\pi\mathbb{Z}$. אין התכ' בהחלט.
אין התכנסות במ"ש.

$f(x) = |x|$ ה

$x \in [-\pi, \pi)$

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \frac{dx}{2\pi}$$

$$\hat{f}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \frac{dx}{2\pi} = 2\int_{0}^{\pi} x \frac{dx}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} = \int_{-\pi}^{0} |x| e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} + \int_{0}^{\pi} |x| e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} =$$

$n \neq 0$

$$= -\int_{-\pi}^{0} x e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} + \int_{0}^{\pi} x e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} =$$

אינט' בחלקים כמו בסעיפים קודמים.

$$= -\left(\frac{x}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} - \frac{e^{-inx}}{2\pi (in)^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}$$

$$+ \left(\frac{x}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} - \frac{e^{-inx}}{2\pi (in)^2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= -\left(\cancel{+\frac{1}{2\pi n^2}} + \cancel{\frac{1}{2} \frac{e^{in\pi}}{-in}} + \frac{e^{in\pi}}{2\pi (in)^2}\right)$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{2} \frac{e^{-in\pi}}{-in}} - \frac{e^{-in\pi}}{2\pi (in)^2} - \cancel{\frac{1}{2\pi (in)^2}}\right)$$

$e^{in\pi} = (-1)^n$

$e^{-in\pi}$

$$= 2 \frac{(-1)^n}{2\pi n^2} = \boxed{\frac{(-1)^n}{\pi n^2}}$$

יש התכנסות במ"ש (ובהחלט) בכל $\mathbb{R}$, כי $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ (ויש התכנסות נקודתית לפונק' כי הפונק' היא ליפשיץ מקומית בכל $x \in \mathbb{R}$).

(7) לפי נוסחאות המעבר: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\cos nx + B_n \sin nx)$

$$A_n = a_n + a_{-n}$$
$$B_n = i(a_n - a_{-n}) \qquad n\geq 1$$

נקבל: $a_n = \hat{f}(n) = \frac{2}{\pi^2 n^2}$, $a_0 = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad A_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}, \quad B_n = 0$$

הערה: זה שוו
שיוויון כי ההתכנס
הייתה אפילו במי

ולכן $\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2}\frac{\cos(nx)}{n^2}$

$0\leq x\leq 2\pi$

$2\pi t = x$ $\qquad (1-2t)^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n2\pi t)}{n^2}$

$0\leq t<1$

נציב $t=0$: $\quad 1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

---

(3) זה תרגיל מתרגול 1: נניח $f:[a,c]\to\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ליפשיץ עם קבוע K $\boxed{a\leq b\leq c}$

$f:[b,c]\to\mathbb{R}$ ליפשיץ עם קבוע L

טענה: $\forall x,y\in[a,c]$

$$|f(x)-f(y)| \leq \max\{K,L\}\,|x-y|$$

(צ"ל f ליפשיץ עם הקבוע לכל היותר $\max\{K,L\}$)

הוכחה: אם $x,y\in[a,b]$ או $x,y\in[b,c]$, זה נובע מהנתון.
אחרת (עד כדי שינוי שמות אם צריך) $x\in[a,b]$, $y\in[b,c]$ ולכן

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(b)| + |f(y)-f(b)| \overset{\text{נתון}}{\leq} K|b-x| + L|y-b| \leq \max\{K,L\}\,|x-y|$$

צריך
$b\geq x$ $\quad y\geq x$
$y\geq b$
$\Downarrow$
$|b-x|+|y-b| = b-x+y-b = y-x = |x-y|$