

## 1 מבנה המבחן

הבחינה מורכבת מ-4 שאלות, משקל כל אחת 25 נקודות. אין להשתמש בכל חומר עזר, וגם לא במחשבון. בשאלה הראשונה תתבקשו להוכיח משפט שלמדנו בכיתה, ראו רשימה בסעיף הבא. השאלה השנייה תהיה לקוחה מתרגילי הבית, או משאלות שנפתרו בתרגול.

## 2 רשימת משפטים למבחן

בשאלה הראשונה בבחינה תתבקשו להוכיח משפט מהרשימה הבאה. הוכחנו בקורס גם משפטים נוספים (למשל, משפט Fubini, משפט הפירוק של לבג למידות בורל ב- $\mathbb{R}$ , פונקציות רציפות צפופות ב- $L^1$  וכו'), וחשוב לדעת לנסחם במדויק.

1. אוסף הקבוצות המדידות בריבוע היחידה הוא סיגמא-אלגברה.

2. בניית קבוצה לא מדידה.

3. סכום של פונקציות מדידות - מדיד.

4. גבול כב"מ של פונקציות מדידות - מדיד.

5. התכנסות כב"מ גוררת התכנסות במידה.

6. אם יש התכנסות במידה, אז יש תת-סדרה שמתכנסת כב"מ.

7. משפט Egorov.

8. אם  $f$  אינט' רימן, היא גם אינט' לבג עם אותו האינטגרל.

9. הלמה של Fatou.

10. משפט ההתכנסות המונוטונית.

11. רציפות בהחלט של האינטגרל.

12. משפט ההתכנסות הנשלטת.

13. המרחב  $L^1(\mu)$  שלם.

14. אי-שוויון הפונקציה המקסימלית.

15. משפט הגזירה של לבג: אם  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , אז כמעט לכל  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\lim_{\substack{x \in B \\ m(B) \rightarrow 0}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dm(y) = 0.$$

16. פונקציה בעלת השתנות חסומה היא הפרש של פונקציות עולות.

17. למת הכיסוי של Vitali.

18. פונקציה רציפה בהחלט שמקיימת  $f'(x) = 0$  כמעט לכל  $x$  היא קבועה.

19. אם  $f$  עולה בקטע  $[0, 1]$ ,  $a < b$  מספרים ממשיים ו-

$$A = \left\{ x; \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < a < b < \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}$$

אז  $m(A) = 0$ . (בתשובתכם, תוכלו להסתמך על כך ש- $A$  מדידה.)

### 3 שאלות לדוגמא

שאלות 3 ו-4 תהיינה דומות לתרגילים שניתנו במבחנים בשנים קודמות. ראו, למשל, בחינות של פרופ' אולבסקי ופרופ' גלוסקין. תרגילים לדוגמא:

1. תהי  $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  מנייה של הרציונלים. הוכיחו ש- $\sum_n \frac{1}{n} 1_{[q_n-1/n, q_n+1/n]}$  מתכנס כ"ת.

2. נתון כי  $f$  רציפה בהחלט ב- $[0, 1]$ . הוכיחו שגם  $f^2$  רציפה בהחלט.

3. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מדידה עם מחזור 1. נתון ש- $\int_0^1 |f| < \infty$ . נסמן

$$f_n(x) = f(x - 1/n).$$

הוכיחו ש- $\int_{[0,1]} |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

4. תהי  $E \subset [0, 1]$  קבוצה מדידה אפס. הראו שגם לקבוצה  $f(E)$  יש מידה אפס, עבור  $f(x) = \sqrt{x}$ .

5. תהי  $f_n$  סדרה של פונקציות מדידות בקטע  $[0, 1]$ , שמקיימות

$$0 \leq f_n(x) \leq 3 \quad \forall n, x.$$

נתון ש- $f_n$  מתכנסת ל- $f$  במידה. האם בהכרח  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ ? הוכיחו את תשובתכם.

6. עבור אילו ערכי  $\alpha$  הפונקציה  $f(x) = x^\alpha \sin(1/x)$  רציפה בהחלט ב- $[0, 1]$ ?