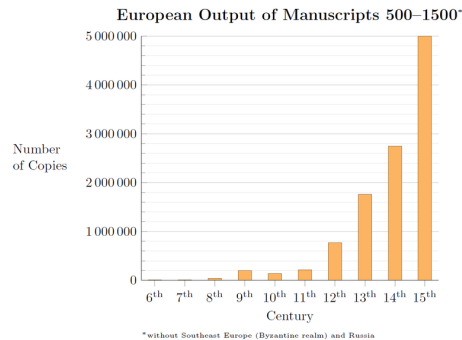


הרנסאנס

והמהפכה המדעית

נאסף ונערך בעברית ע"י פרופ' צבי קם



RENAISSANCE

הרנסאנס (התחיה) המהפיכה המדעית

תוכן הנושאים:

* אמנות הרנסאנס אטליה, הולנד, ספרד, גרמניה
* אסטרונומיה

* ליאונרדו דה וינצ'י 1486–1513

* קופרניקוס 1473–1543

* טיכו ברהה 1546–1601

* יוהנס קפלר 1571–1630

* גלילאו גליליי 1564–1642

* טלסקופים ומיקרוסקופים

* שעונים

* טכנולוגיות מלחמה, תעופה

* רפואה

* מתמטיקה

* כימיה. ואקום

שייקספיר 1564–1616

אליזבת הראשונה – תור הזהב באנגליה

1533–1603

השמדת הארמדה הספרדית 1588

1450 גוטנברג – דפוס



רקע היסטורי

ימי הביניים – נקראים החשוכים, אך הכשירו את הרקע לרנסאנס (לידה מחדש) היסטוריונים אוהבים לסמן אירועים במהפיכות למשל "המהפיכה המדעית": מקופרניקוס עד ניוטון. למעשה יש בהסטוריה מגמות שינוי הדרגתיות המכילות רקע. בלי רקע כזה לא היו השינויים (או המהפיכות) יכולים להתממש. לנו חשוב לכן להבין גם את הרקע המדעי שאיפשר לגאוני הרנסאנס כמו קופרניקוס וגלילאו להנחיל לנו את תוצרי גאונותם.

מסעות הצלב – (ראשון עד התשיעי) 1096–1272 יצרו קשר (לא תמיד נחמד) בין אירופה החשוכה של ימי הביניים והמזרח הפתוח יותר (למדו בניית מבצרים, חרבות, ספנות, אך גם נחשפו לתרבות הקלאסית מאלכסנדריה שנלמדה במרכזי חכמה בבגדד אך אבדה במחשכי המנזרים).

ספרד – אימפריה ימית ויבשתית נפלה מגדולתה ברנסאנס – ראה להלן.
איטליה וגרמניה: נסיכויות שהתחרו ולחמו זו בזו.

צרפת ואנגליה: ממלכות מאוחדות. נאבקות על השליטה בואטיקן ובעולם. מפתחות גאווה לאומית (אולי "שליטת") שגרמה לעשייה באמנות, בטכנולוגיה (אולי השימוש הצבאי) ובמדע. סימני התחיה (מתמטיקה) הופסקו בגלל **המגיפה השחורה** (דבר, אבעבועות?) 1346–52 אך התאוששו בגלל הקמת אוניברסיטאות – תחת הכנסיה, בעיקר לימודי דת (תיאולוגיה) אך גם הפצה של תרגומים ללטינית גם של כתבים יוניים מקוריים וגם דרך התרגומים לערבית – שהביאו לשחזור המדעים הקלאסיים: אריסטו, אפלטון, ארכימדס, אוקלידס. המגיפה השחורה גם גרמה לאובדן כחצי מכח העבודה בכפרים של איכרים, חרשי מתכת ועץ, והביאה לשיפור מעמדם ולאבדן מרות הכנסיה (שהציעה "פתרונות דתיים" שלא הביאו לעצירת המגיפה), ולשרשי הרפורמציה הפרוטסטנטית.

תקופת הרנסאנס שהחלה באיטליה במאה ה-14, הייתה תקופה של תחייה והתחדשות בכל ענפי התרבות, הרוח והמדע. המהפכה המדעית הייתה בראש ובראשונה מהפכה בשיטת המחקר המדעי: ביסוס המדע על ניסוי ועל תורות מתמטיות. בתחום הפיזיקה, חל שינוי בתפישת העולם; תנועת הכוכבים הוסברה בעזרת מודל לפיו כדור הארץ סובב את השמש (המודל הגיאוצנטרי) ולא ההפך (המודל ההליוצנטרי). עבודותיהם של גלילאו גליליי ואייזק ניוטון ביססו את המכניקה והדינמיקה; נוסדה האופטיקה המודרנית, בעיקר בזכות עבודותיהם של יוהנס קפלר, ניוטון וכריסטיאן הויגנס; הומצאו המצאות רבות, ביניהן הטלסקופ, המיקרוסקופ, שעון המטוטלת, שלהן תהיה השפעה רבה על התפתחות הפיזיקה, אך גם על נוטי ימי; כמו כן, חלו התפתחויות בשאר תחומי המדע – הביולוגיה, הכימיה, האלכימיה ומדעי הרפואה, שלהם תהיינה השפעות עקיפות אך משמעותיות על התפתחות הפיזיקה.

חופש הפעולה של מדענים גדל כשהחלו להיות נתמכים ע"י שליטים נאורים (גם בשל היוקרה וגם לתועלת בבניה ובטכנולוגיות נווט, מלחמה והגנה). למרות שאנגליה וצרפת היו מדינות גדולות ועשירות יותר, הרנסאנס החל דוקא במדינות עיר האיטלקיות. המדע נתמך ע"י סוחרים עשירים ששלטו בוונציה ובפירנצה, אך הנבטים נבעו ללא ספק מקישרי המסחר של וונציה עם המזרח, ומנפילת קונסטנטינופול ממנה ברחו לוונציה גם בעלי מלאכה, וגם חכמי דת ומדע. הירושה של המדע האיסלאמי היתה גם בהפצת ספרות ערבית (מתורגמת מיוונית ומקורית) וגם בגישה הניסיונית (במקום הגישה הפילוסופית ולימוד מתוך הסיפורות). המדענים, בעזרת כלי מדידה וטכנולוגיות שלא היו בידי היוונים (אופטיקה, מדי זווית מדוייקים, שעונים, אסטרונומים – נוקטורנל ומכאניים – מטוטלות וגלגלי שיניים) יכלו לבדוק מחדש את חוקי הטבע, איששו אך גם אזרו אומץ להזים את החוקים שלמדו מהספרות הקלאסית (אריסטו, תלמאי, גלן).

מה עודד את הפריחה המדעית לקראת הרנסאנס:

ערי איטליה, בעיקר פירנצה וונציה – היו במגע עם סוחרים ערביים – ספגו וגם העשירו ידע מדעי.

בימי הביניים באירופה הלימוד המדעי התבסס בעיקר על למידה במנזרים של כתביהם של הפילוסופים של יוון העתיקה, ובראשותם אריסטו, ועל תיאור ניסויי מחשבה המבוססים על הסקה לוגית המבוססת על עקרונות דתיים, ועל התרשמות יומיומית. לעומתם מדענים איסלמיים, ובראשם איבן אל-חייתם טענו שיש להשתמש במדידות נסיוניות על מנת לבסס תפיסות מדעיות. זו הירושה החשובה ביותר של הערבים למדע. בניגוד לנזירים, היו החכמים המוסלמים פחות דוגמאטיים, ויותר ביקורתיים כלפי הירושה הקלאסית. אפילו תרגומי הספרות הקלאסית מיוונית לערבית היו תרגומים חפשיים בהם התערבו פסוקי התרגום בתוספות של המתרגם-המדען.

הרומאים כזכור שימרו את התרבות והספרות הקלאסית, והתוספות שלהם היו בעיקרון יישומים פרקטיים הנדסיים וטכנולוגיים, ואיסוף אנציקלופדיסטי של הידע.

עם נפילת האימפריה הרומית עבר מרכז הדת וההשכלה מרומא לביזנטיון (קונסטנטינופול). כשנפלה זו בידי העות'מאנים (1453) היתה נהירה של מלומדים לערי צפון איטליה. נהירה זו נקשרת לרוח שהביאה את הרנסאנס-התחיה.

סטיבן גרינבלט בסיפרו "התפנית הולדת המודרניות"

מייחס את התפנית של הרנסאנס לארוע מכונן: הפצתה מחדש של פואמה קלאסית בשם "על טבע היקום" שנכתבה במאה החמישית ע"י לוקרטיוס הרומאי והתגלתה אלף שנים אח"כ ע"י ההומניסט האיטלקי פוג'ו ברצ'וליני פוג'ו, שהיה פקיד של ממסד האפיפיור, חיפש כל חייו ספרים שנעלמו והעתיק אותם כדי שיפיצו את התרבות הקלאסית והספרות הלטינית. הוא מצא את "על טבע היקום" במנזר נידח בפולדה, גרמניה ב-1417 והפיץ עשרות העתקים ממנו לכל סיפריות העולם. סיכום קצר של עיקרי הרעיונות בפואמה יסביר את פריצת הדרך הקשורה בגילוייה מחדש:



כל הדברים עשויים מחלקיקים בלתי נראים
חלקיקי היסוד של החומר ("זרעי החומר") הם ניצחיים
אף שמספרם אינסופי, מספר הצורות והגדלים שלהם מוגבל
כל החלקיקים שרויים בתנועה בריק אינסופי
אין ליקום בורא או מתכנן
כל הדברים מתהווים כתוצאה מתפנית
התפנית היא מקור הרצון החפשי
הטבע אינו מפסיק להתנסות
היקום לא נברא עבור בני האדם ולא נסוב סביבם
לבני האדם אין שום ייחוד
ראשית החברה האנושית לא היה תור זהב של שלווה ושפע אלא מלחמת השרדות פרימיטיבית
הנפש היא בת תמותה. אין עולם הבא. המוות אינו קיים מבחינתנו
כל הדתות הממוסדות הן אשליות שמקורן באמונות טפלות
כל הדתות אכזריות. אין בעולם מלאכים שדים ורוחות.
תכלית החיים העליונה היא הגברת ההנאה והפחתת הכאב, והמכשול הוא האשליה העצמית
הבנת הטבע מביאה פליאה גדולה

בחנו את הרעיונות האלה אחד לאחד מול הידע שלנו כיום

[

הרפורמציה הפרוטסטנטית הביאה לעידוד גישה ביקורתית על
אמיתות הכנסיה הקתולית:

מרטין לותר 1483-1546 Martin Luther
פירסם ב- **1517** את 95 התיזות.



ז'אן קלווין, 1509–1564 John Calvin



למרות שהרפורמה הפרוטסטנטית ערערה את ההגמוניה של האפיפיור, ונתנה אפשרויות למחשבה עצמאית הפורצת ממוסכמות הכנסיה הקטולית, לא צריך להגזים בהערכת הפתיחות של הרפורמטורים. למשל לותר קרא לקופרניקוס "אידיוט שהופך את התנ"ך, כי הרי יהושע קרא לשמש לעמוד, לא לארץ" (...)



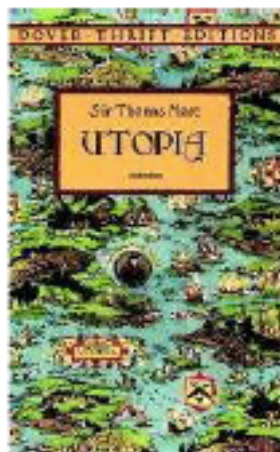
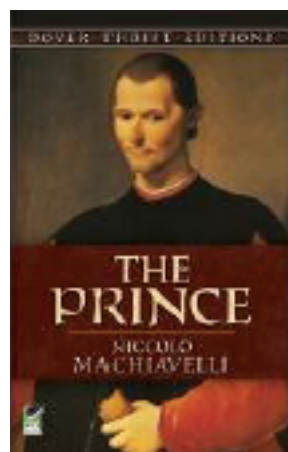
רוחות חדשות גם בפוליטיקה – עירור סמכותו האלוהית של המלך.

1516 – **מקיאווולי** באיטליה מפרסם את "הנסיך"

Niccolò di Bernardo dei Machiavelli 1469–1527

ותומאס מור באנגליה מפרסם את "אוטופיה" 1516 Utopia

Sir Thomas More 1478–1535



הוצאות מודרניות של "אוטופיה" ו"הנסיך"
ספרים שנשארו best sellers עד היום

ספרד היא דוגמא להחמצה גדולה...

בספרד כמה מלכויות: קטלוניה (ברצלונה, טראגון), אראגון (ולנסיה, סרגוסה), נבארה (פמפלונה, סן סבסטיאן), ארץ הבסקים, קסטיליה וליאון (סגוביה, מדריד, טולדו), אסטוריה, גליסיה (נבלעו בקסטיליה בסוף ימי הביניים) ובדרום תחת שלטון בית אומיה המוסלמית: אנדלוסיה (קורדובה, גרנדה, מלגה, סביליה)

בספרד המורית – פריחה תרבותית ומדעית (רפואה) וחופש וסובלנות דתית. הפריחה הופסקה עם הכיבוש הנוצרי. האינקוויזיציה נוסדה ע"י פרדיננט השני מאראגון ואיזבלה הראשונה מקסטיליה ב-1478 – כדי להשליט את הנצרות על מוסלמים ויהודים. גירוש יהודי ספרד ב-1483 וכיבוש גרנדה, מעוזם האחרון של המאורים בדרום ספרד (רקונקויסטה) ב-1492 השליטו את הנצרות הקיצונית בכל חצי האי האיברי ומנעו מספרד להשתתף ברנסאנס.

התרחבות הניווט במרחבי האוקיינוס בעקבות שימוש במצפן ובספינות עם מפרש משולש המסוגלות לנוע נגד הרוח ובסערות, הביאו לחיפוש דרכי ים למזרח הרחוק גם דרך האוקיינוס האטלנטי, מתוך הבנה שהארץ עגולה. קולומבוס ניסה לממן את מסעותיו בוונציה, מלכת הימים של אז, שהחזיקה ציי ספינות מסחר – אך נכשל, אולי כי וסקודה גמה מוונציה מתכנן דרך יותר בטוחה למזרח ומגיע ב-1498 להודו דרך הים בעקיפת אפריקה. קולומבוס לבסוף יצא בשליחות איזבלה ופרננדו מלכי ספרד המאוחדת. 1492 גילוי אמריקה (למעשה האיים הקריביים) ע"י כריסטופר קולומבוס היתה באותה שנה של הרקונקויסטה והתחזקות האינקוויזיציה. גילוי אמריקה היה יכול לתרום לחיזוק האימפריה הספרדית, אך הקיצוניות הדתית חנקה כל אפשרות לפריצת דרך של הרניסאנס. השמרנות הביאה גם לנפילה סופית של ספרד כאימפריה עם השמדת הארמדה ב-1588 ע"י האנגלים, שפיתחו טכנולוגיות שיט ואסטרטגיות מלחמה ימית חדשות. ספרד היתה הקרובה ביותר למזרח אך מחקה את מורשתה האיסלאמית ונשארה מאחור.

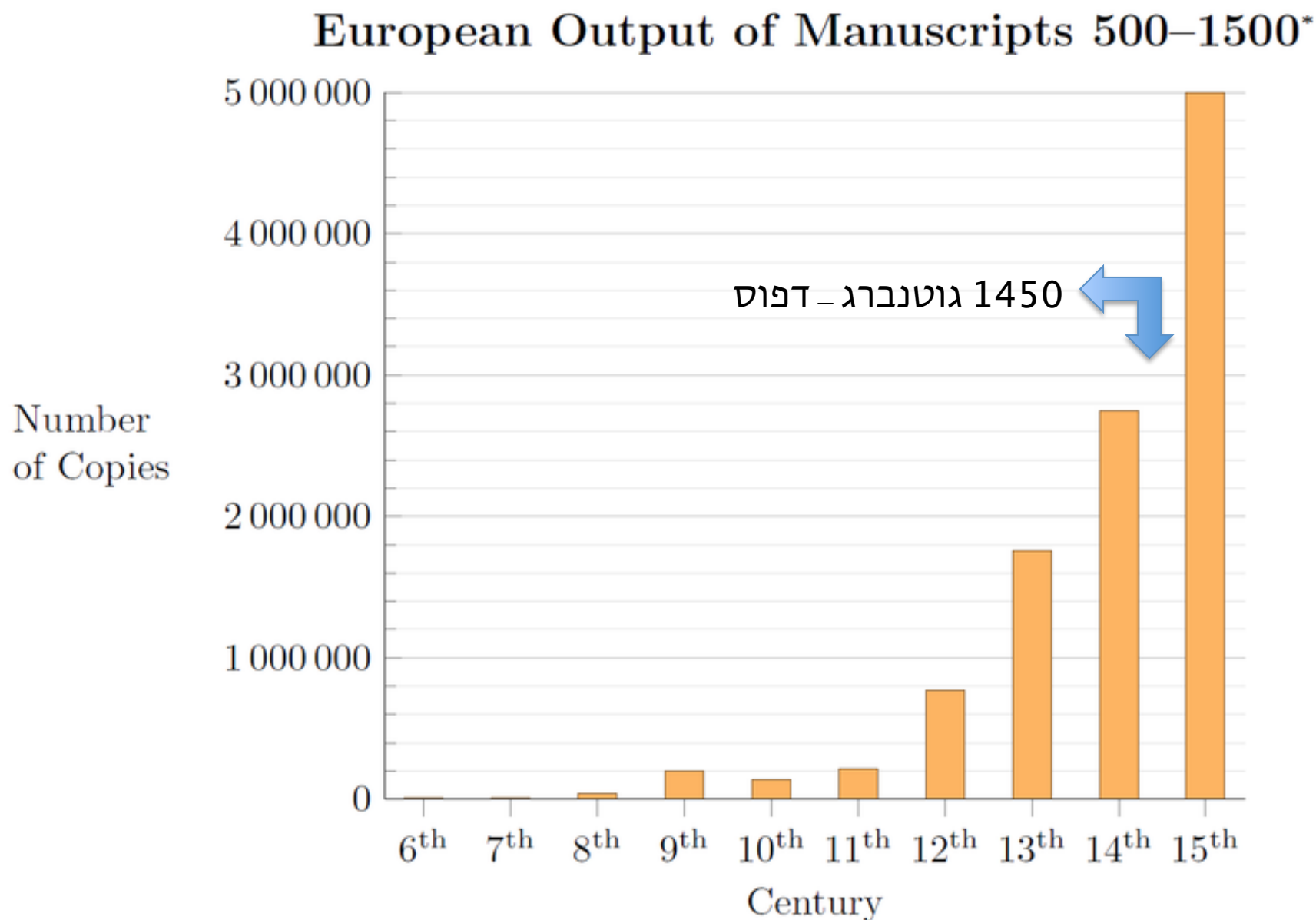


1450 – מכונת הדפוס של גוטנברג (Johann Gutenberg) (ייבוא הטכנולוגיה מסין) גרם להפצה ודמוקרטיזציה של השכלה: ספריות לא רק במחשכי המנזרים. אמנם התנ"ך היה הספר הראשון שהודפס, אך בעקבותיו הגילויים מחדש של תלמי (אסטרונומיה), גאלן (רפואה) ואריסטו (פיזיקה) חשפו את ההתאמות של תורותיהם לתיאורים, מדידות ומודלים עכשוויים, עודדו גישה ספקנית וביקורתית במדע, ופיתחו מדע ניסיוני בניגוד למדע פילוסופי של הקלאסיקנים.

בכל רחבי אירופה, החל מראשית המאה ה-16, היה מפץ של פעילות אינטלקטואלית. מכבש הדפוס הכפיל את מספרם ואת המגוון של ספרים בתפוצה כללית. אנשים יכלו כעת ללמוד ממקור ראשון יותר טקסטים מאשר אי פעם. הפרסום מחדש בוונציה של הספרים המקוריים של ארכימדס עורר גל חדש של מחקר מתמטי. מעתה והלאה עבודותיהם של חוקרים הודפסו במספר העתקים והיו נגישות לעמיתיהם בארצות אחרות תוך מספר חודשים. הדפוס יצר שינוי ניכר ביותר ביעילות של התקשורת המדעית. אנשים שגרו במקומות רחוקים זה מזה יכלו מעתה לשתף פעולה. לפני 1500, גם אם הושגו הישגים מדעיים ומתמטיים הם לא הפכו לנחלת הכלל ולכן אבדו, אך החל מ-1550 לערך, החל תהליך של האחדת הידע וחוקר בתחום מסוים בתקופה זו קרא את החומר הרלוונטי לעבודתו שפורסם על ידי אחרים, דבר שאפשר לו להמשיך את מחקריו מעמדה עדכנית, ולא להתחיל מאפס או כמעט מאפס.



מה לדעתכם גרם למה: עליה בצריכת ספרים דחפה את הדפוס, או הדפוס הקל על הפצת ידע?



מכשירי כתיבה.

מ-5000 לפה"ס טיבוע כתב יתדות בחרסים וחציבה באבני גיר רכות.

מ-3000 לפה"ס שימוש בנוצות לכתיבה בדיו העשוי מתערובת מינרלים כהים וחומרי דבק (לרוב שומנים מהחי). כתיבה על עורות ופפירוסים.

איזה תכונות צריך דיו?

צמיגות, מתח פנים (נימיות), ייבוש, דהיית צבע בייבוש ובזמן.

973 מעאד אל מואיז כליף המגרב מתאר עט נובע. Ma'ād al-Mu'izz

1495 התחלת שימוש באותיות קטנות בכתב יד Aldus Manutius of Venice

1565 גסנר מתאר עיפרון (השם: ליבת הגרפיט דמתה לעופרת) Conrad Gessner 1516–1565

1636 דניאל שוונטר הגרמני: עט נובע מנוצה בתוך נוצה Daniel Schwente

1858 גוזף רקנדורפר האמריקאי רושם פטנט על עיפרון עם מחק. Reckendorfer

ציפורן וכסת דיו היו בשימוש עד להמצאת העט הכדורי. בבית הספר שלי היו עדין

ב"מכתבות" (שולחנות התלמידים) ב-1949 חורים עם קסתות לדיו לטבילת "ציפורן" הכתיבה.

1938 לסלו בירו László Bíró משווק בארגנטינה את עט ה"בירו".

1954 לפרקר ההצלחה בשווקו עט כדורי עם חוד כתיבה דק ורישום רצוף.



כלכלה

1530 בפירנצה הלוטו מממן הוצאות ממלכתיות.

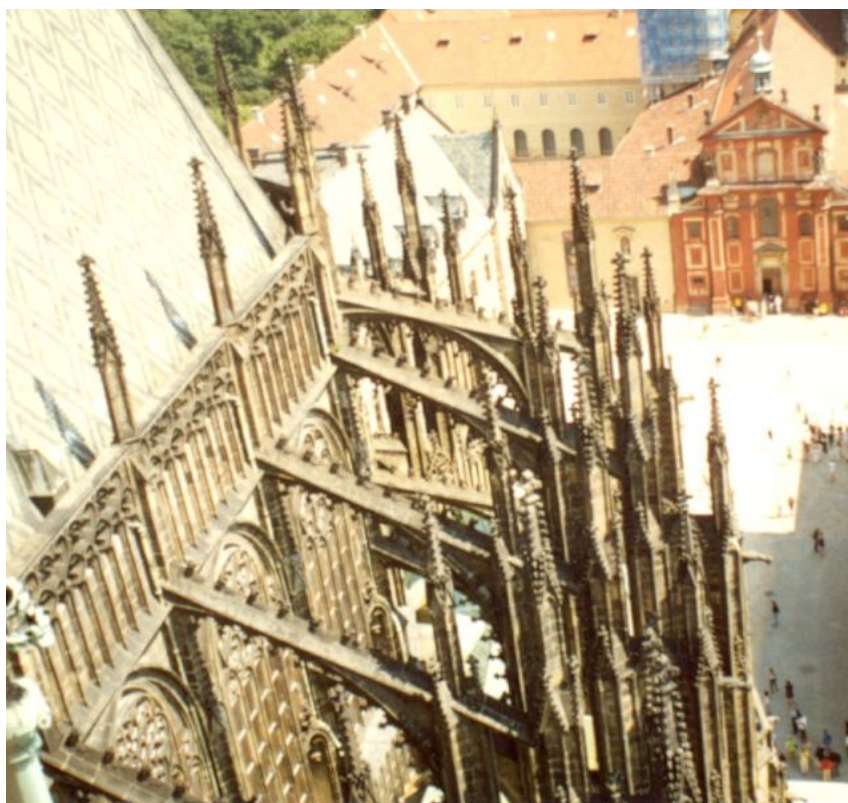
1589 **ויליאם לי** האנגלי ממציא מכונת תפירה לגרביים. תעשית טכסטיל פורחת במאה ה-16.

אמנות הרנסאנס

ארכיטקטורה

מבנה של כיפות כנסיה גדולות, איה סופיה בביזנטיון, 550, מודל. כיפת קתדרלת פירנצה-ברונולסקי, כיפת בזיליקת פטרוס הקדוש בוותיקן - דונאטו ברמנטה 1444-1514 (Donato Bramante) ההמצאה בתמיכת צלעות עמודים ובמקום קירות עבים - קירות דקים וחלונות גדולים עם ויטראז"ים בקתדרלות הגותית .

בזיליקת פטרוס הקדוש בוותיקן
אדריכל ראשי: מיקלאנג'לו



איה סופיה, איסטמבול



קתדרלת פירנצה

אמנות

הרנסאנס באטליה, הולנד, ספרד, גרמניה:

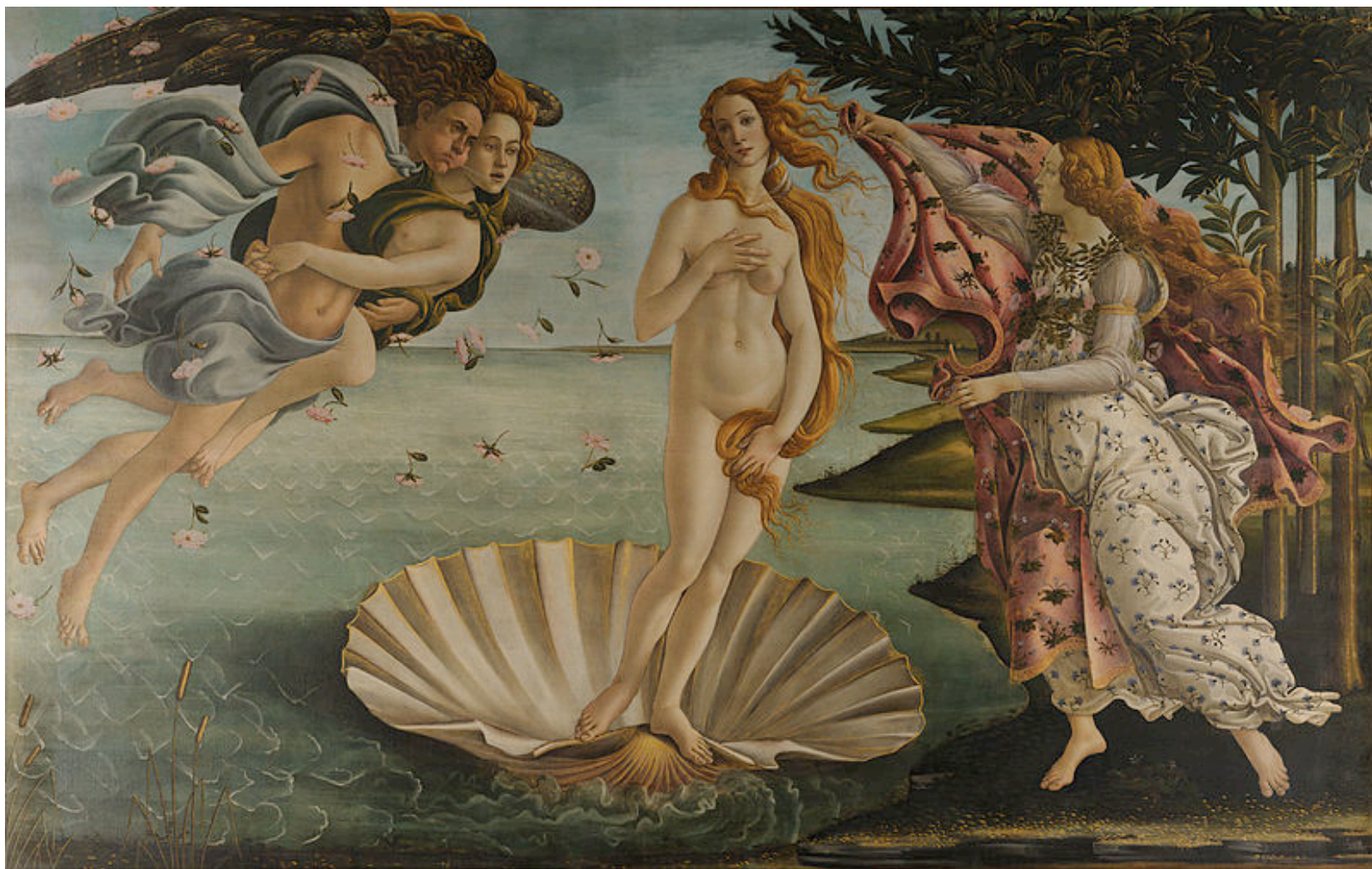
פרספקטיבה

תאורה: שימוש באור וצל בציור,

מעבר מציור סימלי להצגה מדויקת: דיוק אנטומי של אנשים, סוסים
פרסקו, צבעי שמן על בד, רשומים על ניר

נושאי הציור והפיסול באיטליה דתיים, כי האמנים מומנו ע"י הכנסייה, אך גם תמונות מספורי
המיתולוגיות היוניות והלאומיות, ודיוקנות של שליטים ובני משפחות עשירות.
בהולנד ובגרמניה יש גם תאורים של חיי יומיום (בוש וברויגל) וציורי חיות (דירר).
ציורי ארועים היסטוריים (מהתנ"ך או המיתולוגיה) משקפים את נופי הארץ בה חי הצייר.
ציורי אנשים ברנסאנס האיטלקי נותנים תחושה תלת-ממדית (אפילו פיסולית קלאסית), בניגוד
לציורים הדו-ממדיים של ימי הביניים.
ציורי אל-גרקו והרונימוס בוש לדעתי חורגים מהתבנית הרגילה של ציורי רנסאנס: אל-גרקו
משרה אורה כמעט כמו ציור אקפרסיוניסטי, וציורי בוש סוריאליסטיים, כמעט כמו ציורי
סלואדור דאלי.

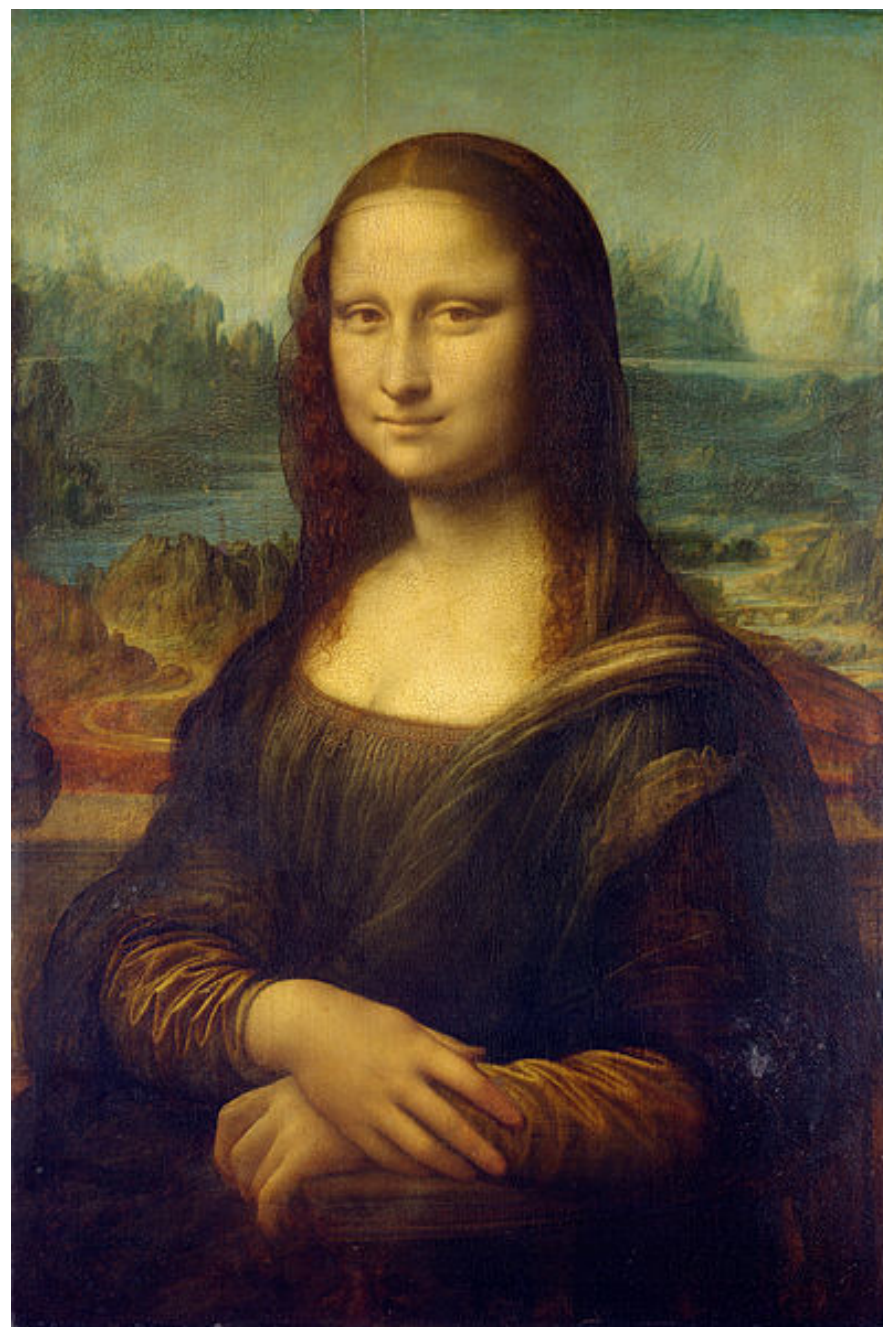
בוטיצ'לי לידת וינוס 1445-1510



רפאל 1483–1520



ליאונרדו דה וינצ'י 1452–1519





מיכל אנג'לו 1475-1565
בריאת האדם - קפלה סיסטינית וטיקו
דוד - פירנצה
משה - רומא
אדריכאל ראשי לבזיליקת פטרוס הקדוש



דוד של דונטלו, פירנצה 1386–1466



הסעודה האחרונה
טינטורטו, ונציה 1452–1519



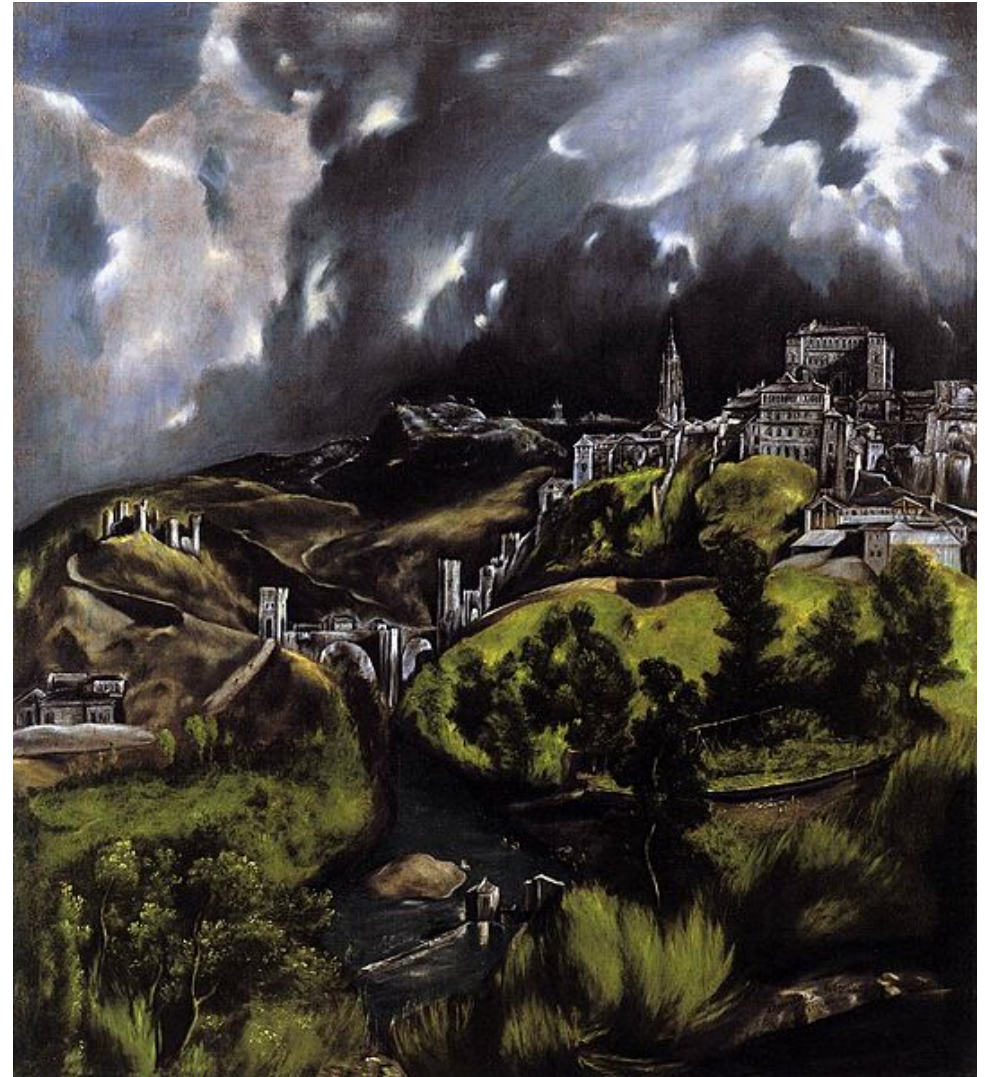
טיציאן בונציה 1490–1576



דון קישוט
פיקסו מול אל גרקו



אל גרקו, טולדו, ספרד 1452-1519

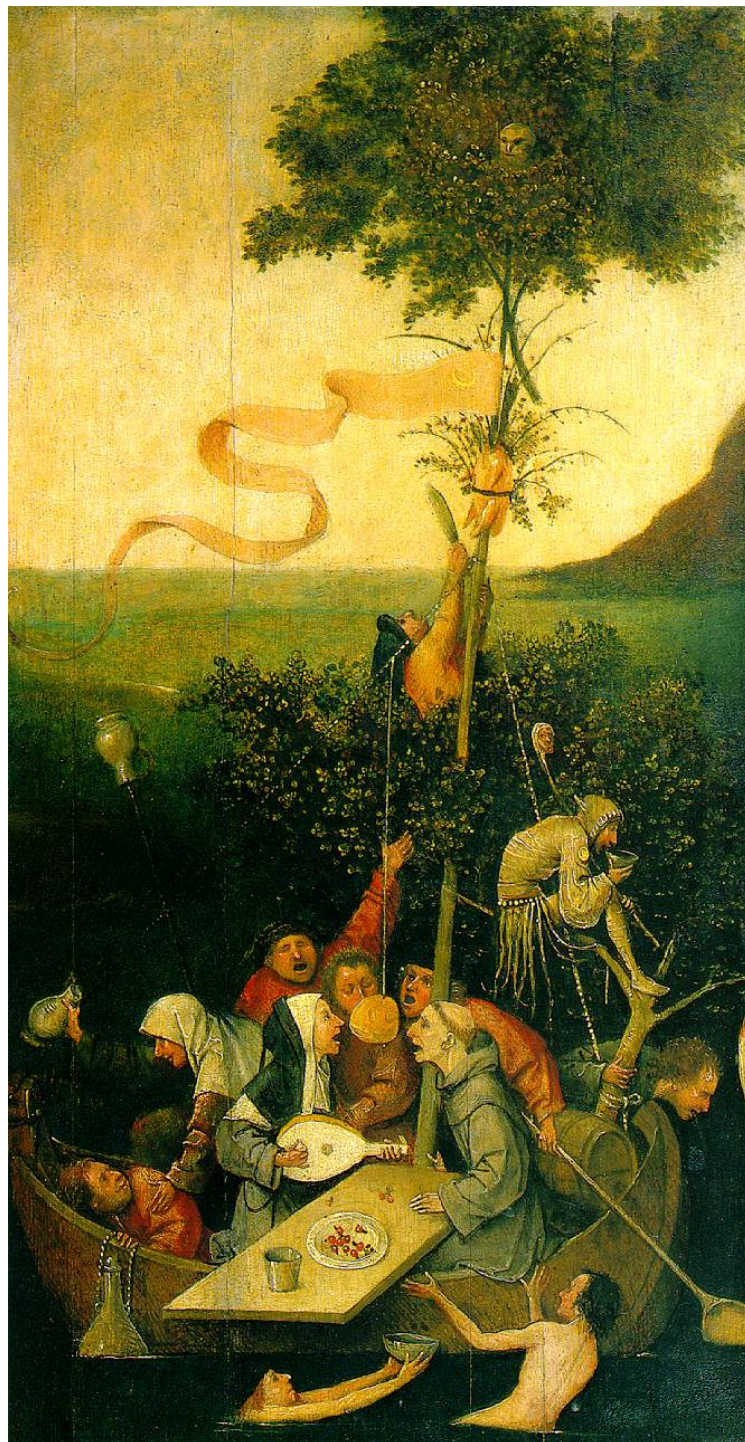




דירר,
Albrecht Dürer
נירנברג, גרמניה
1471-1578
ציור, תחריטי עץ, רישומים
חיות
פרספקטיבה ופרופורציות



הרונימוס בוש' הולנד
, Hieronymus, or Jerome,
Bosch
1450-1516 סוריאליסטי



פיטר ברויגל, האב
הולנד, Pieter Bruegel de Oude
1525-1569

סעודת אכרים
הברחה של איקרוס





ליאונרדו דה וינצי – Leonardo da Vinci 1513 – 1486

בן 15 עזב את בית אביו לפירנצה, שם החל כשוליה כצייר ופסל של

ורוצ'יו Andrea del Verrochio

ואח"כ פתח סדנה בעצמו. 1482 עבר למילאנו – שימש בחצר הדוכס Duke Ludovico Sforza לודויגו פורצה לאירגון פסטיבלים, לתכנון כלי נשק להגנת העיר (טנק, צוללת, מצנח, דאון הליקופטר ואוריטופטר – דאון עם משק כנפיים) כארכיטקט (כנסיות, מבנים, תעלות, ביצורים וגשרים – כולל גשר על הבוספורוס). וכחוקר גיאומטריה, מכאניקה ואנטומיה. תקופה זו מתועדת במחברותיו המאויירות, בהם כתב בכתב ראי. המחברות מאיירות את מגוון המצאותיו.

עם הכיבוש הצרפתי 1499 נדד באיטליה ומת בצרפת.

הוא עבד בשירות ציזרה בורג'יה כמהנדס צבאי, ופגש את מאקיבלי. בנה כלי מדידה (שעון, הידרומטר, מודד מרחק נסיעה, מד מהירות רוח) תאר אפקט הנימיות.

1513–16 עבד ברומא. האפיפיור אסר עליו לחקור אנטומיה מנתיחות

אדם לכן עבר לאנטומיה של חתולים, סוסים ודרקונים...

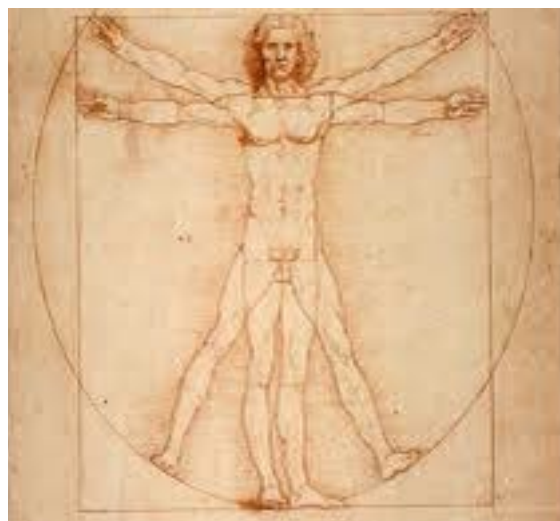
1516 פטרונו ז'וליאנו די מדיצ'י נפטר. הוא מקבל תאר צבע ראשי,

מהנדס וארכיטקט המלך פרנסיס ה-1 עם מלגה ומגורים ליד

הארמון באמבואז

royal chateau at Amboise

1 נפטר בצרפת בקלו Cloux



כמה מהשגיו של ליאונרדו:

מכאניקה:

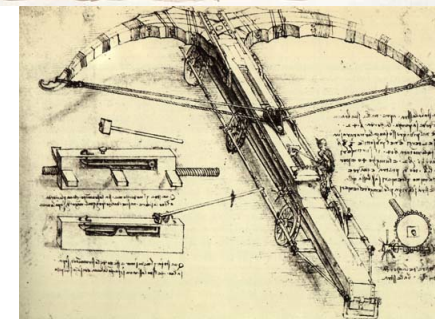
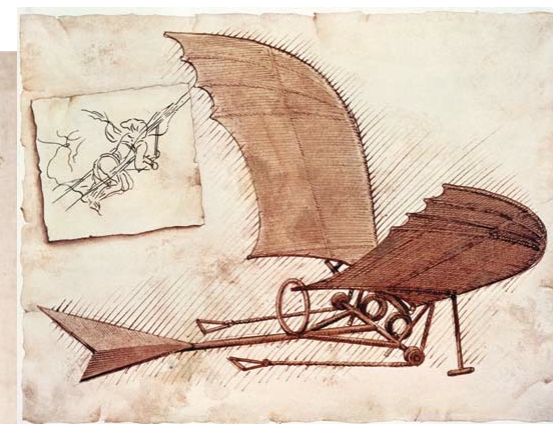
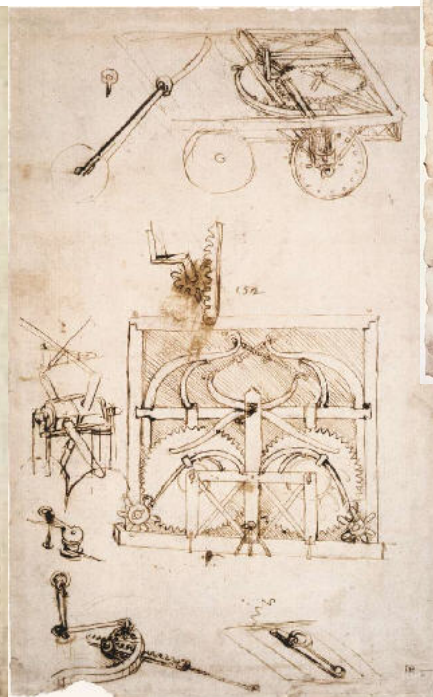
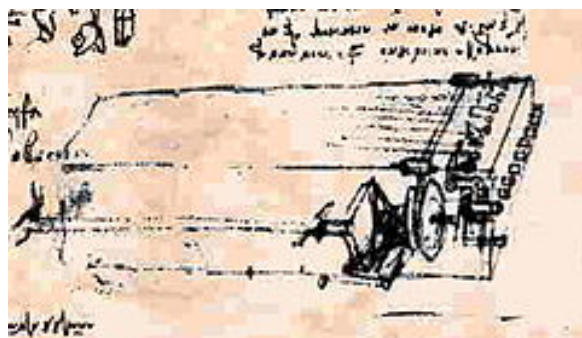
תנועה עד אינסוף אינה אפשרית.

בעקבות ארכימדס שדגל בהבנת הטבע ממדידות, בנה מכשירי מדידה: שעון, הידרומטר, מד לחות באטמוספירה בדומה לזה של קוזה (Cusa), מד מרחק נסיעה (לפי הירו Hero) ואנמומטר (מד רוח) בעזרתו מדד קוי זרימת אויר.

1490 חקר מים ותאר אפקט הנימיות (קפילאריות).

ביולוגיה/רפואה:

1482 החל ברישומי אנטומיה. במחברות 11-1510 רישומים מתוך ניתוחי גופות העתקי המחברות מופצים עם הערות על דינאמיקה וססטיקה, ורישומי מכונות.



פיזיקה
אסטרונומיה
ומדעי כדור הארץ

אסטרונומיה – ממשיך להיות מניע לכל המדעים: מתמטיקה, פיסיקה וטכנולוגיות מדידה (עדשות, טלסקופים, מדידת זוויות מדוייקות).
הכנסיה שלטה בכמרים. המדע סיפק ענין אינטלקטואלי לכמרים. היו גם מלומדים ואנשי מדע שניתמכו ע"י שליטים נאורים. הכנסיה אסרה על לימודי אנטומיה באמצעות נתיחת גופות, אך תמכה באסטרונומיה כדי להעזר בלוח השנה (מעבר מיוליאני לגריגוריאני). הבעיות בשנה היוליאנית ומעבר ללוח שנה גריגוריאני דרש מדידות שמימיות, ואיפשר חפש למדע ניסיוני זה. מפתחים מכשירים מדוייקים יותר למדידת זוויות. הכנסיה התערבה רק כשמרכזיות כדור הארץ התערעה.

1582 האפיפיור גריגוריוס ה-13 מנהיג לוח שנה גריגוריאני (ביטול הלוח היוליאני מאז 45 לספירה).

1583 זוזף סקליזה Joseph Scaliger מנהיג יום יוליאני לחישוב זמן אסטרונומי.

הלוח הרומי היה מבוסס ירח. בשנה 355 ימים ומידי פעם הוחלט על שנה מעוברת, בה נוסף חדש של 22-23 ימים בין פברואר למרץ.
בלוח היוליאני: שנה בת 365 ימים, ובכל שנה רביעית 366 ימים (יום נוסף, 29, לחדש פברואר) בתחילת המעבר ללוח היוליאני הוסיפו ימים נוספים מידי שלש שנים כדי לסגור על הפער שהצטבר בלוח הרומי, וזה יצר אי אחידות בתאריכים.
בלוח הגריגוריאני: מגיב למדידת אורך השנה בדיוק רב יותר: 365.2425 שנה מעוברת היא שנה שמספרה מתחלק ב-4 (כלומר, חלוקת המספר ב-4 נותנת מספר שלם ללא שארית), אבל לא ב-100, אלא אם כן השנה מתחלקת ב-400

אסטרונומיה ופיזיקה

המודל הגיאוצנטרי (הארץ במרכז היקום) של קלאודיוס תלמאי

Almagest by Claudius Ptolemy

מתורגם ללטינית במאה ה-12 ע"י גרר איש קרמונה

Gerard of Cremona

מופיעים מחקרים נוספים: הספירה העולמית-סקרובוסקו

De sphaera mundi of Johannes de Sacrobosco

טבלאות אסטרונומיות הכוללות מדידות של תלמאי ותוספות **Aflonsine Tables**

מודל חרדה? **trepidation** מודל הליוצנטרי המיוחס לתאבטי אבן קורה **Thabti ibn Qurra**

הרצאות באסטרונומיה – אוניברסיטת וינה **Georg Purbach 1423–1461**

תלמידיו אספו הרצאות **Regiomontanus 1436–1476**

שפורסמו ב-1470 בשם תיאורית העולם החדשה **Theoricae novae planetarum**

עריכה של **Eptiome of the Almagest**

עם נתונים של קרדינאל בסאריון מקונסטנטינופול **Cardinal Bessarion**



Nicolaus Copernicus 1473–1543 – קופרניקוס

Leonardo da Vinci 1486 – 1513 – דה-וינצ'י

Giordano Bruno 1548-1600 ג'ורדאנו ברונו

Tycho Brahe 1546-1601 – טיכו ברהה

Johannes Kepler 1571–1630 – יוהנס קפלר

Galileo Galilei 1564–1642 – גלילאו גליליי

William Shakespeare 1564-1616

שייקספיר היה מודע לתופעות אסטרונומיות, ומתאר אותן ברבים ממחזותיו, יחד עם לעג
לאסטרוולוגיה. דוגמאות: יוליוס קיסר –

stable as the north star,
Beware the ides of march

רומאו ויוליה –

swear not by the moon, ..the inconstant moon, that monthly changes in her circle orb
המלט –

Doubt thou the stars are fire; Doubt that the sun doth move;
Doubt truth to be a liar; But never doubt I love

סתירות במכאניקה - חץ העף באויר אחרי שיצא מהקשת סותר מכאניקה של אריסטו
הטוען שתנועה היא תחת השפעת כוח חיצוני ומצב טיבעי הוא במנוחה
המונח החדש: אינרציה – התמדה.

בנדטי 1585 Giovanni Battista Benedetti

התמדה – גוף שלא פועל עליו כוח נע בעצמו במרחב לזמן מה.
למד את כתבי ארכימדס והשתמש במתמטיקה.

סטבין 1586 Simon Stevin

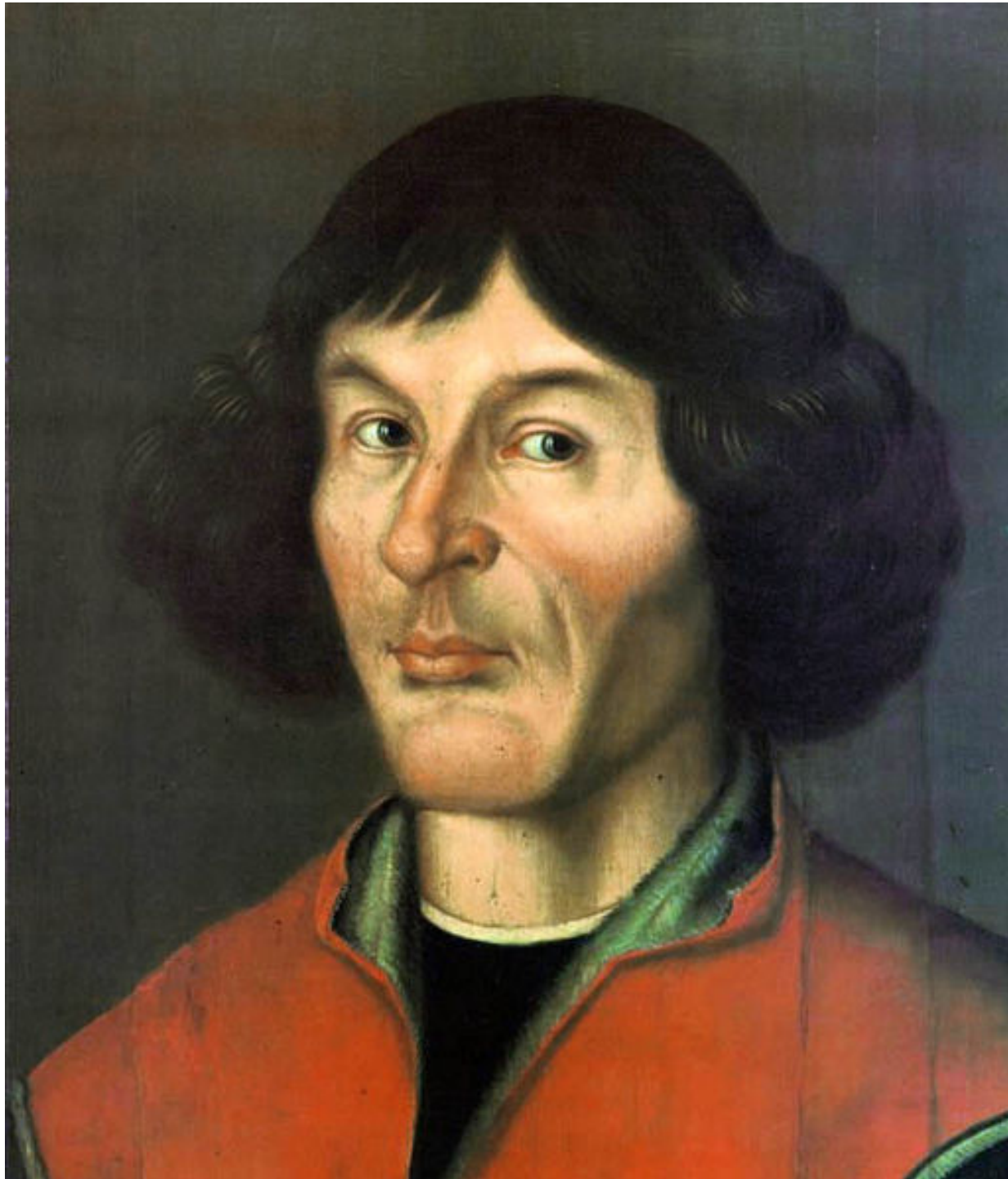
הידרוסטטיקה – תנועה איסופית לא תיתכן, לכן כל חלקי המים בשוי משקל – הלחץ
על קרקעית מיכל תלוי בעומק בלבד. הבין חוק המנוף, מרכז כובד של משולש על
החציון, וכן לחתכי פרבולה

קבאוס 1630 — Cabaeus

מוצא שיש שני סוגי מטענים חשמליים

דקארט 1637 — René Descartes

מחשב את זווית השבירה של קרני השמש בטיפות הגשם וקושר לזווית השמש והקשת



Nicolaus Copernicus 1473–1543

את ראשיתה של המהפכה המדעית
נהוג לראות בעבודותיו של ניקולאוס
קופרניקוס שהציע מודל לתנועת
כוכבי הלכת, לפיו השמש נמצאת
במרכזה של מערכת השמש, וכדור
הארץ ושאר כוכבי הלכת נעים
סביבה במעגלים. מודל זה נקרא
המודל ההליוצנטרי, לעומת
המודלים הגאוצנטרים שקבעו שכדור
הארץ נמצא במרכז היקום. ספרו של
קופרניקוס, "על תנועתם של גרמי
השמים" (De revolutionibus
orbium coelestium), התפרסם רק
לאחר מותו.

המודל ההליוצנטרי שהציע
קופרניקוס התבסס על מערכת
האפיציקלים שעליה היו מבוססים
המודלים הגאוצנטרים, ולמעשה
היה מסובך יותר מהם משום שהכיל
יותר אפיציקלים. השוני המהותי
מהמודלים הגאוצנטרים, בנוסף לכך
שהשמש הייתה במרכז ולא הארץ,
היה שכוכבי הלכת נעים תמיד סביב
מרכזו של מעגל – ולא נקודה אחרת
בתוך מעגל, מה שנתפס על ידי
קופרניקוס כהנחה לא תקינה.

קופרניקוס - 1491-5 למד בקרקוב, פולניה. 1496 למד משפט בבולוניה, שם פגש את דומיניקו מריה נובארה ושמע ממנו תיאוריות מהפכניות על תנועת כדור הארץ.

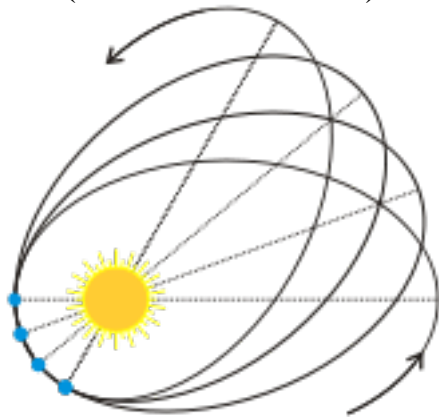
Domenico Maria Novara (1454-1504)

1501 דוקטורט במשפט מאוניברסיטת פרארה

1507 למד רפואה בפדואה, והפך רופאו האישי של הבישוף הפולני.

שימש כמודד ואדמיניסטרטור בפולניה למסדר פרומבורק **Chapter of Frombork** ששמרו אמונים למלך פולניה סיגיסמונדוס ה-1 **Sigismundus I**

ערך מדידות בעיקר כדי לתקן את לוח השנה הגריגוריאני, אותו שלח לרומא ב-1513 החל מ-1507 בדק את המודל ההליוצנטרי. תנועת השמש עקב סיבוב הארץ בכוון הפוך. במקום תנועות "אפיציקליות" של כוכבי הלכת, (מדד תנועת מרס-מאדים) שהוסברו כתנועה מעגלית סביב מעגל אחר סביב הארץ, הציע תנועות מעגליות סביב השמש. עדין האמין בשלמות של כדורים כבסיס לתנועה סביב השמש (קריסטלים): תנועת השמש באקליפס (רקע הכוכבים) בגלל סיבוב הארץ סביב השמש. תנועת השמים ממזרח למערב נובעים מסיבוב הפוך של כדור הארץ, בנוסף לסיבוב כוכבי הלכת סביב השמש.



1514 קנה בית ששימש כמצפה כוכבים. מצא שמסלול השמש סטה ב-30 מעלות מזמן תלמאי. לכן התכוון למדוד את השנה מהכוכבים ואת הנקיפה (פרצסיה) של ציר הסיבוב של הארץ. מצא שהמסלול אקסצנטרי ותכנן מודל מסובך שישמור על מסלולים מעגליים. 1517 מפרסם ספר *monetae cudendae ratione* הטוען שכסף מזויף עם תכולת זהב נמוכה גורם לעלית מחירים. האפקט נקרא אח"כ

"חוק גרשם" "Gresham's law"

1527 מודד אקסנטריות של מסלול סטורן (שבתאי) 1528 גם ליופיטר (צדק)

1530-2 מדידות ונוס (נוגה).

סיפרו "על סיבוביהם של גומי השמים" יצא בנירנברג ביום מותו, יום ב 24 במאי 1543.



מרטין לוטר אמר על קופרניקוס: "טיפש זה רוצה להפוך על ראשו את מדע האסטרונומיה, אך כמו שכתוב בתנ"ך יהשע אמר לשמש לעמוד בגבעון, לא לארץ".

1551 ארסמוס ריינהולד Erasmus Reinhold הגרמני מפרסם לוחות אסטרונומיים (הלוחות הפרוסים) המבוססים על קופרניקוס.
1576 תומס דיגס דוחה את הנחת קופרניקוס שקיימת ספרה אחת של כוכבי שבת – מאחר והם במרחקים שונים מאיתנו.

[חמה-מרקורי, נוגה-ונוס, כדור הארץ, מאדים-מרס, צדק-יופיטר, שבתאי-סטורן, אורנוס ונפטון](#)

Nocturnlab. 15th century

בלילה הכוכבים נראים סובבים סביב ציר הצפון כל 23 שעות ו-56 דקות, פיגור של 4 דקות יחסית לאורך היממה יוצר סטיה מצטברת של תמונת השמיים החוזרת לעצמה כעבור שנה. זה איפשר לבנות מכשיר שקובע את השעה בלילה – נוקטורנלב, כמו אסטרולב). מחייגים על צד אחד של הצלחת את התאריך ומכוונים את הידית (כשמישור הנוקטורלב אנכי) לכוכב הצפון (ע"י חריר). בדיסק שני מחייגים את כוון כוכב אחר בשמיים, כמו קדקד בעגלה הגדולה, והשעה היא מול התאריך.





Antonio Santucci's sphere. 1588

הדוכס הגדול פרדיננד ה-1 דה מדיצ'י הזמין מאנטוניו סנטוצ'י מודל היקום לפי אריסטו-תלמאי כשהארץ במרכז. המודל נתמך בטבעות וצירים מצופי זהב ואלהים צופה מעל בכדור. הביצוע הושלם ב-1593 ומוצג בחדר המתמטיקה במוזיאון אופיצ'י Uffizi בפירנצה.

"חבל" שמאמץ כזה הושקע במודל שכבר כשנבנה החל קפלר למוטט את בסיסו המדעי.

William Gilbert 1544–1603 ויליאם גילברט

1660 מפרסם "על המגנט, גופים מגנטיים והמגנט הגדול של הארץ"
מבדיל בין כוח חשמלי ומגנטי (שני קטבים)
הידרוסטטיקה – לחץ מים עולה בעומק.

Thoma Harriot 1592 תומס הריוט

האנגלי מודד זווית של $2^{\circ}56'$ בין כוכב הצפון והצפון המגנטי
מצא כי מנת השבירה אחידה לכל הזוויות.
חישב שטח משולש כדורי משלש זוויותיו – $4\pi(A+B+C-180)/360$

Marko Dominis 1611 מרקו דומיניס

חוקר את הקשת בענן

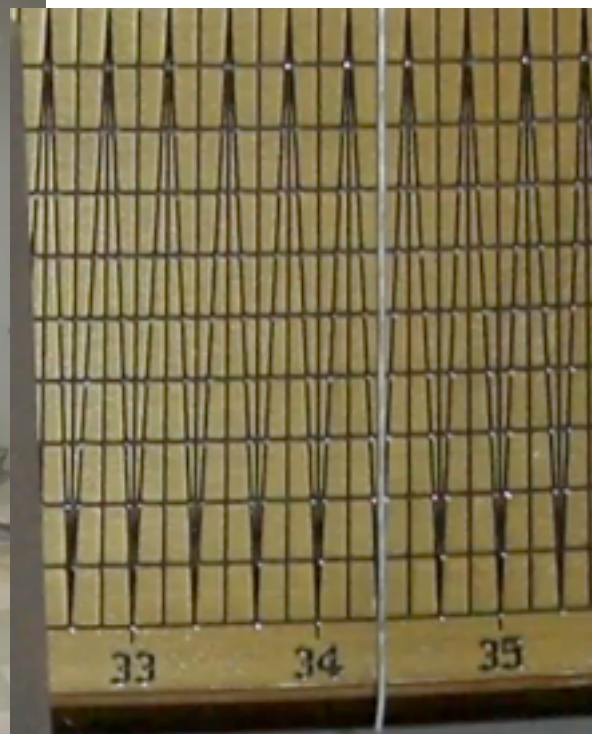
ג'ורדאנו ברונו 1548–1600 Giordano Bruno



ברונו היה נזיר דומיניקאני שנחשף לספרי אפלטון שנתגלו מחדש, ושטען כי התאוריות ההליוצנטרית של קופרניקוס סותרות את אלו של הספרות השמימיות הקבועות ומושלמות. תורתו האסטרונומית הציעה שהשמש היא כוכב, והארץ סובב אותה. ביקום הרבה כוכבים עם יצורים נבונים. ברונו החליף את המודל ההליוצנטרי, כמו במודל של פלוטינוס במאה השלישית לספירה ושל בלייז פסקל מאה שנים לאחר ברונו, במודל שבו מרכז היקום הוא בכל מקום וליקום עצמו אין גבול. ברונו נדד באירופה, לימד זמן מה בפדובה, אולם כעבור כשנה נמסרה מישרתו לגלילאו, והוא עבר לוונציה. כאשר רצה ברונו לעזוב את ונציה, הסגירו אותו לידי האינקוויזיציה. בדומה לגלילאו, לתמיכתו בקופרניקוס היה משקל רב במשפטו, אך בשונה מגלילאו, ברונו סירב לחזור בו מאמונותיו. עם הקראת גזר דינו אמר ברונו: "אולי חששכם בהטלת גזר דין זה גדול מחששי מגזר הדין המוטל עלי." ברונו הוכרז כופר והועלה על המוקד ב-17 בפברואר 1600 בקמפודי פיורי שברומא. האינקוויזיציה גילתה "רחמים" כלפי ברונו וקשרה שקית אבק שריפה לצווארו בעלותו על המוקד, כדי לקצר את ייסוריו. עם זאת, לשונו מוסמרה ללסתו כדי למנוע ממנו להמשיך ולדבר. אפרו פוזר על נהר הטיבר.

טיכו ברהה – 1546-1601

האסטרונום הגדול ביותר בתקופה שקדמה לטלסקופ



1572 גילה נובה חדשה (התפוצצות כוכב) בקבוצת כוכבי הקסיופיאה, וקבע כי מרחקם גדול בהרבה ממרחק הירח בגלל הפרלקסה הנמוכה. זה סתר תורת אריסטו שהאירועים החולפים בשמים הם אטמוספיריים. קבע לכן שגורמי השמים אינם נייחים וניצחיים.

תרגיל: מדידת פרלקסה

ברה האמין שהארץ נייחת, כי אבן נופלת אנכית למטה, ולא מערבה (הפוך לתנועת הארץ) 1577 עקב אחרי כוכב שביט. קבע כי מסלול השביט רחוק ממסלול הירח, הוא מעגלי סביב השמש, אך מהירות תנועתו לא אחידה.

פרדריק השני מלך דנמרק - King Frederick II 1534-1588 העניק לברה אי (Hven) שם הקים מצפה כוכבים Uraniborg ב-1580 ומצפה נוסף Stjerneborg ב-1584 עם מיכשור מדידה משוכלל (סקסטנט) מ-1576 במשך 20 שנים ערך מדידות של כוכבי הלכת וצבר טבלאות מדויקות של מיקום פלנטות וכוכבים. הוא לא פירסם אותן בחייו.

מצא שמרס (מאדים) כשהוא בתנועה הפוכה לשמש קרוב יותר לארץ מהשמש, וההפך כשהוא בתנועה עם השמש. מהעובדה שמסלולו חוצה את מסלול השמש הסיק שהשמים אינם עשויים כדורי גביש שהארץ במרכזם אלא השמיים נוזליים. השמש סובבת סביב הארץ, והכוכבים סובבים סביב השמש.

המשיך במדידות על תנועת כוכבי הלכת האחרים: מרקורי (כוכב חמה), יופיטר (צדק), ונוס (נוגה) וסטורן (שבתאי) ועדין האמין שגם הם סובבים את השמש שסובבת את הארץ.

Christen Srensen Longberg, Longomontanus 1562-1647

אסיסטנט של ברה שמדד וגילה את האנומאליות בתנועת הירח.

1597 עקב אי הסכמה עם המלך החדש של דנמרק קריסטיאן הרביעי Christian IV 1577-1648 עבר לפראג.

1599 ברה מתמטיקאי החצר של רודולף השני קיסר צכיה Emperor Rudolph II 1552-1612

1598 קפלר, האסיסטנט שלו פירסם קטלוג של 1004 כוכבים.

קפלר מפרסם את מחברות המדידות של טיכו ברה בפרג לאחר מותו.

יוהנס קפלר – Johannes Kepler 1571–1630

נולד בוירטנבורג, גרמניה Wurttemberg כפרוטסטנטי, ולמד באוניברסיטת טובינגן, Tubingen שם נחשף לתורת קופרניקוס ע"י מיכאל מסטלין

Michael Mastlin 1550-1631

ואח"כ בגרץ, ממנה ברח עקב הרפורמציה הקטולית להונגריה, אך חזר מבלי להיות קטולי. 1600 עבר לפראג, כדי לעבוד עם טיכו ברהה, וכשנפטר קיבל את כל מחברותיו.

עבר ללינץ Linz 1612 כשרודולף השני נפטר.

כדי לקבל תשלום פירסם "הלוחות הרודולפיות" לכבוד הקיסר רודולף- Emperor Rudolph שפורסמו ב-1627

1626 אימו הואשמה בכישוף וברחה Ulm לאולם

לסיגן Sagan 1628

1630 לריגנסבורג Regensburg ושם נפטר.

היה בקשר עם גלילאו.



כתב ניספחים לספרי האופטיקה החשובים של ימי הביניים:

John Peckham 1232-1292 מאה-13 Witelo

1604 עצמת הארה נופלת עם ריבוע המרחק מהמקור.

ראיה בגלל תמונה על הרטינה – הבין את הסיבה לליקויי ראיה (רחק וקרוב ראי): מתאר איך העין ממקדת אור

1604 קפלר מנסח חוק התפשטות האור בקווים ישרים

1611 גילה החזרה פנימית – (המקור לקשת בענן), ושבירה בזוויות קטנות: חוקי העדשות

הדקות. הבסיס לאופטיקה גיאומטרית.

1615 קפלר משתמש בשיטת המיצוי של קוזה Cusa להוכיח שנפח כדור בנוי ממספר איסופי של פירמידות שקדקדן במרכזו ובסיסיהן על פניו, ולכן שוה שליש מכפילת הרדיוס בשטח הפנים.

מכל הגלילים החסומים בכדור לזה בעל הנפח הגדול ביותר יחס קוטר לגובה $\sqrt{2}$

השתמש במושגים "בלתי ניתנים לחלוקה" indivisibles ומרווחים זעירים increments שהם הבסיס של חשבון אינפיניטסימאלי.

קפלר הושפע מקופרניקוס והציע מודל הליוצנטרי משלו. קפלר סבר שמסלולי כוכבי הלכת תואמים את חמשת הצורות הגיאומטריות המושלמות, אך לא הצליח ליישב השערה זו עם מדידות. לכן פנה אל טיכו ברהה שברשותו היו המדידות המדויקות ביותר.

1600 קפלר התקבל לחצרו של האסטרונום טיכו ברהה בפראג בחמימות, אך ברהה חשש לתת לקפלר גישה לנתונים במחברותיו מאחר וברהה לא האמין במודל הליוצנטרי. רק לאחר ויכוחים מרים הסכים טיכו ברהה לתת לקפלר גישה לנתונים על תנועת מרס (מאדים). על סמך המדידות שערך טיכו ברהה במשך 20 שנה ניסה קפלר לבנות תיאוריה לתנועת מרס. תחילה היכריז שיעשה זאת בחדשיים, אך המלאכה ארכה שבע שנים. קפלר השתמש בטבלאות הלוגריטמיות של נפייה לחישוביו.

הוא פיתח שיטה גאונית לקביעת תנועת הארץ ממדידות ברהה על המרס כל 687 ימים – השנה של המרס. משם חזר לחישוב תנועת מרס סביב השמש. הבדל של 8' בין מדידות ברהה וחישוביו הביאו אותו לחוק הראשון שהמסלול אינו מעגלי אלא אליפטי. קפלר כנראה הושפע מגילברט: הוא האמין שהכח שהשמש מפעילה על כוכבי הלכת הוא מגנטי, ויחסי הפוך למרחק. האליפסה נגרמה לדעתו בגלל משיכה אודחיה כל $\frac{1}{4}$ מסלול. הוא מצא ניסיונית את החוק הראשון: מסלולי הכוכבים הם אליפטיים, והשמש באחד ממוקדי האליפסה. בכך הזים את המודל הכדורי למבנה היקום. (וגם זנח את מודל המסלולים האפיציקליים).

החוק השני: זמן השלמת סיבובו של כוכב, T , תלויה בציר הארוך של האליפסה, A , ואינו תלוי בציר האליפסה הקטן. השטח ליחידת זמן שניפרש ע"י הקו בין הכוכב והשמש קבוע לכל המסלול. (לכן הכוכב נע מהר בקירבת הציר הקטן, ולאט ליד הציר הגדול)
החוק השלישי: $T^2 \sim A^3$ (ציור בגרף) קובע שככל שכוכב הלכת קרוב יותר לשמש מהירותו גדלה ושנתו מתקצרת.



חוקי קפלר הם אולי החוקים הראשונים בהסטוריה של הפיזיקה שנקבעו מתוך התאמה לסדרות ארוכות של מדידות נסיונות בדיוק רב. כל מדידות ברהה נעשו ללא טלסקופ. השימוש בטלסקופ אולי לא שיפר את דיוק מדידת מיקום כוכבי הלכת, אך איפשר לגלות את ירחי יופיטר (צדק), שחשיבותם בהצגת מערכת שאינה סובבת סביב הארץ, ושמדידת קטרי מסלולי הסיבוב ומחזורם היו קלים יותר לאישוש החוק השלישי של קפלר.

צריך להבין שהאקסצנטריות של מסלולי כוכבי הלכת שמדד ברהה ושקפלר התאים למדידותיו היא קטנה ביותר.

חצי ציר ארוך לאליפסה אקסצנטריות אורך השנה			
מרקורי (כוכב חמה)	0.3871	0.206	87.969 ימים
ונוס (נוגה)	0.7233	0.0068	224.70 ימים
הארץ	1.000	0.017	365.256 ימים
שמרס (מאדים)	1.5236	0.093	686.98 ימים
יופיטר (צדק)	5.2026	0.048	11.856 שנים
סטורן (שבתאי)	9.5719	0.053	29.369 שנים

האקסצנטריות של כ-10% למארס גרמה לאי התאמות של דקות מעלה בודדות, שנפתרה בהנחת מסלול אליפטי. המדידות נעשו יחסית למיקום כוכבי השבת, ודרשו תיקוני פרלקסה עקב תנועת הארץ.

Kepler's 1st law

חוק קפלר הראשון – הוכחה לפי חוק הגרויטציה של ניוטון

מסלולי הכוכבים הם אליפטיים, והשמש באחד ממוקדי האליפסה.

$$\underline{F} = m\underline{a} \quad \underline{F} = \underline{u} * GMm/r^2$$

$\underline{u}$ וקטור מהשמש לכוכב

$\underline{a}$ היטל התאוצה על הוקטור $\underline{u}$

$$ma = m d^2 r / dt^2 - m r \omega^2 \quad \omega = \text{מהירות זוויתית} = L / m r^2$$

$$M r \omega^2 \quad \text{כוח צנטריפוגאלי} \quad d^2 r / dt^2 = GM / r^2 + L^2 / m r^3$$

נציב $r = 1/s$ $t \Rightarrow \theta$ מאחר ו- $L = m r^2 \omega = m / s^2 d\theta / dt$ נקבל $d/dt = L s^2 / m d/d\theta$

$$dr/dt = -1/s^2 ds/dt = L/m ds/d\theta$$

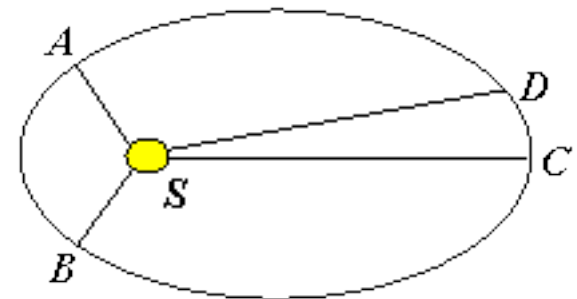
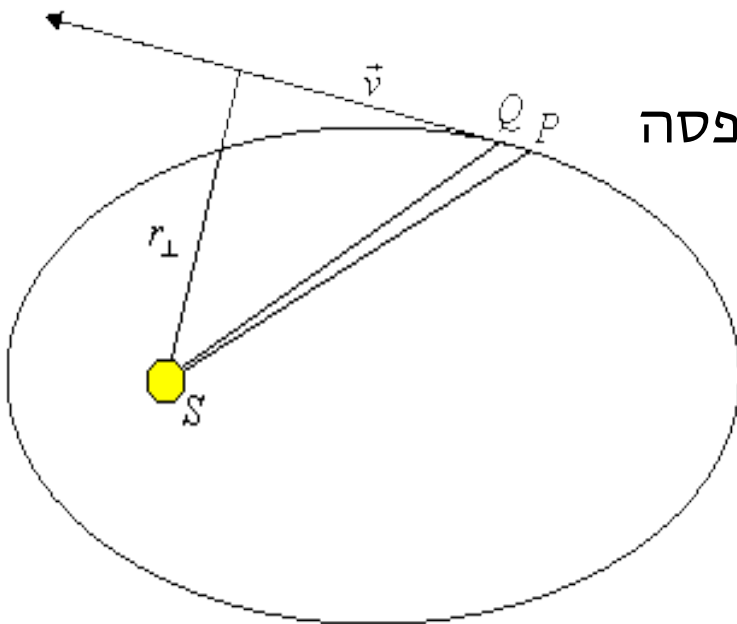
$$d^2 r / dt^2 = L^2 s^2 / m^2 d^2 s / d\theta^2$$

משוואת התנועה - $d^2 s / d\theta^2 + s = GMm^2 / L^2$

הפתרון - $s = 1/r = GMm^2 / L^2 + E' \cos \theta$

קבוע אינטגרציה - E' הוא האקסנטריות של האליפסה

$$A(1-E^2)/r = 1 + E \cos \theta \quad L^2 / GMm^2 = A(1-E^2)$$



Kepler's 2nd law חוק קפלר השני

$$r\dot{\phi} = \text{const}$$

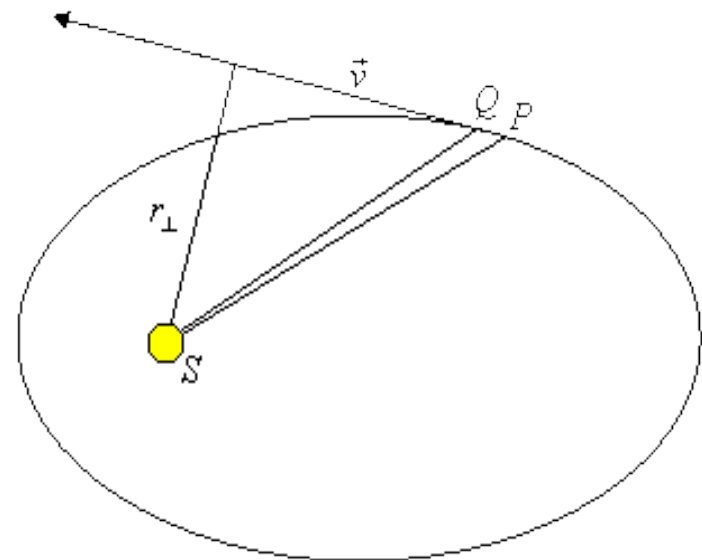
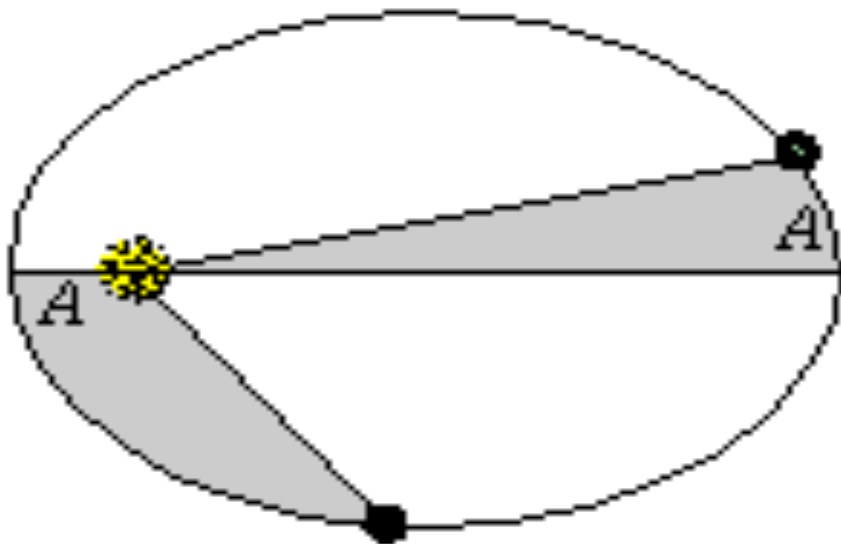
השטח ליחידת זמן המכוסה ע"י הקו בין הכוכב לשמש קבוע לכל המסלול

$$dS/dt = r\dot{\phi} = \text{const}$$

ויחסי לתנע הזוויתי, L

$$L = mvr_{\perp} \quad dS/dt = 1/2 r_{\perp} v = L/2m$$

התנע הזוויתי של כוכב סביב השמש נשמר קבוע לאורך המסלול, מאחר והכוח בין השמש לכוכב פועל לאורך הציר המחבר אותם ולכן הוא ללא מומנט זוויתי.



Kepler's 3rd law חוק קפלר השלישי

זמן השלמת סיבובו של כוכב, T, תלוייה בציר הארוך של האליפסה, A, ואינו תלוי בציר האליפסה הקטן.
 $T^2 \sim A^3$

אקסצנטריות E; הציר הקצר B; הציר הארוך של מסלולו האליפטי A; שנת הכוכב T

$$B^2 = A^2 (1 - E^2)$$

שטח אליפסה πAB

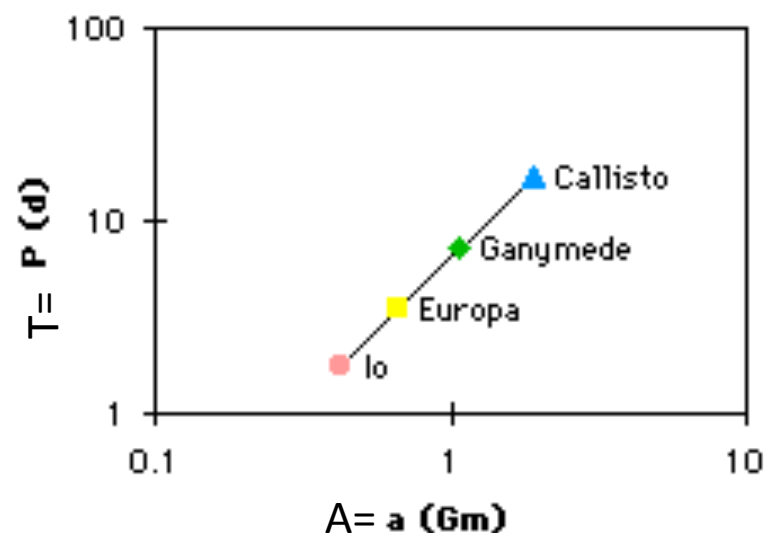
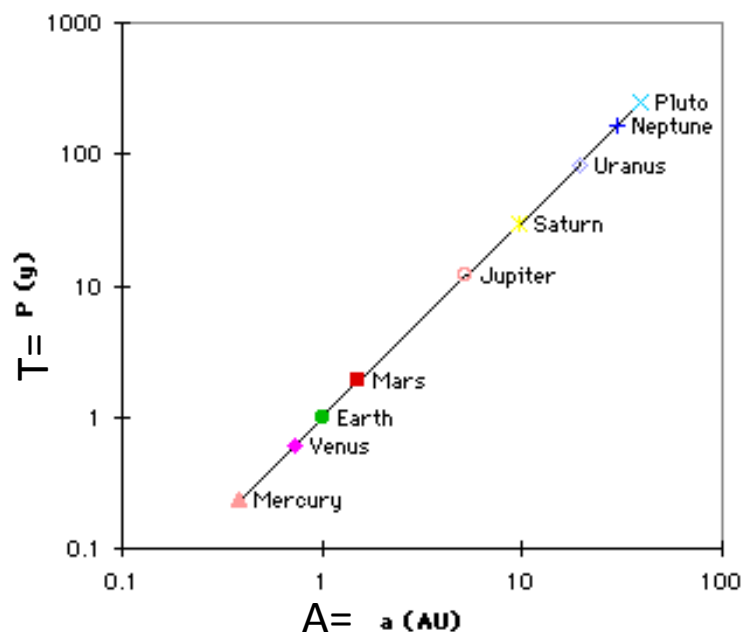
$$dS/dt = L/2m \Rightarrow T = \pi AB / [L/2m];$$

$$T^2 = (2m\pi AB/L)^2 = (2m\pi AB)^2 / (GMm^2 A (1 - E^2)) = (2m\pi AB)^2 / (GMm^2 A (B^2/A^2)) = 4\pi^2 A^3 / GM;$$

לא תלוי ב-E

נכון לכוכבי הלכת סביב השמש, ולירחי הצדק (שגילה קפלר בטלסקופ שלו)

קו ישר בציר $\log T - \log A$ עם שפוע 3/2



מערכת קואורדינטות לרקיע

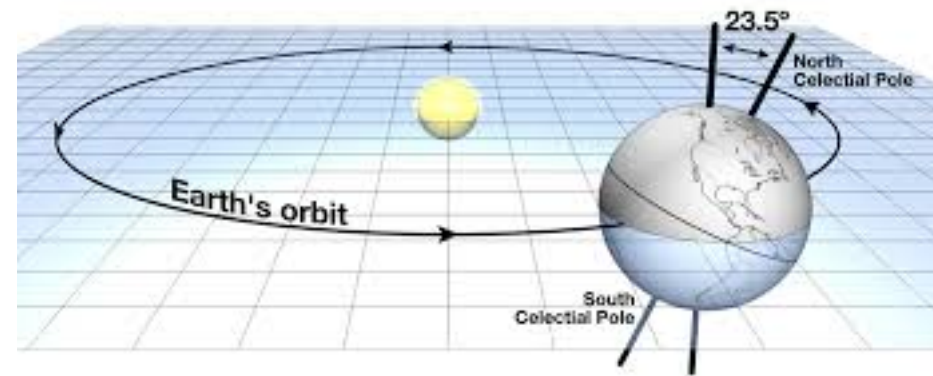
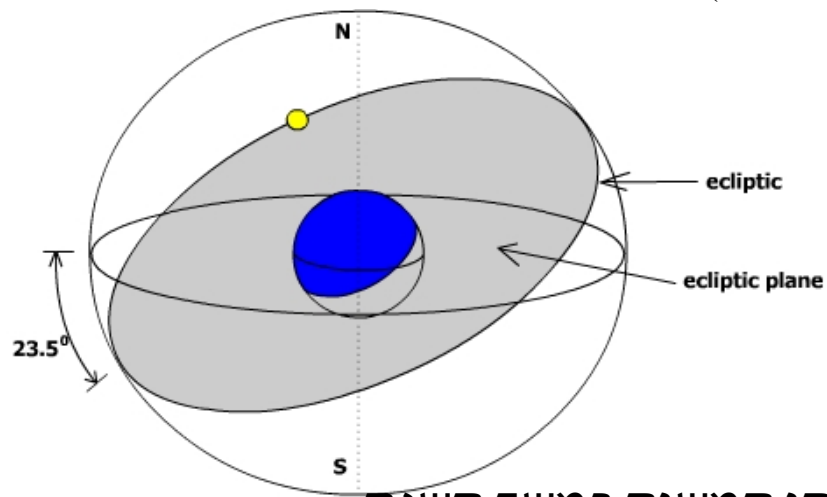
מבוססת על הציר הצפוני, והמעגל של מסלול השמש באביב בתאריך 21 במרץ, אורך היום והלילה שווים – equinox). זוית העילוי היא הזוית בין מעגל השעות של הכוכב והאקווינוקס. זוית ההטיה היא הזוית של הכוכב עם קו המשווה השמימי, האנכי לציר הצפוני).

במחזור של 26,000 שנים יש נקיפה (פרצסיה) של האקווינוקס כלפי המישור האקליפטי (ecliptic) מישור הסיבוב של השמש הירח והארץ, ונקרא כך כי מאפשר ליקויי ירח ושמש) הנקיפה ומזיזה את הציר הצפוני ביחס לכוכבי השבת, ולכן את קואורדינטות הכוכבים. חישוב התיקון קשה אפילו היום.

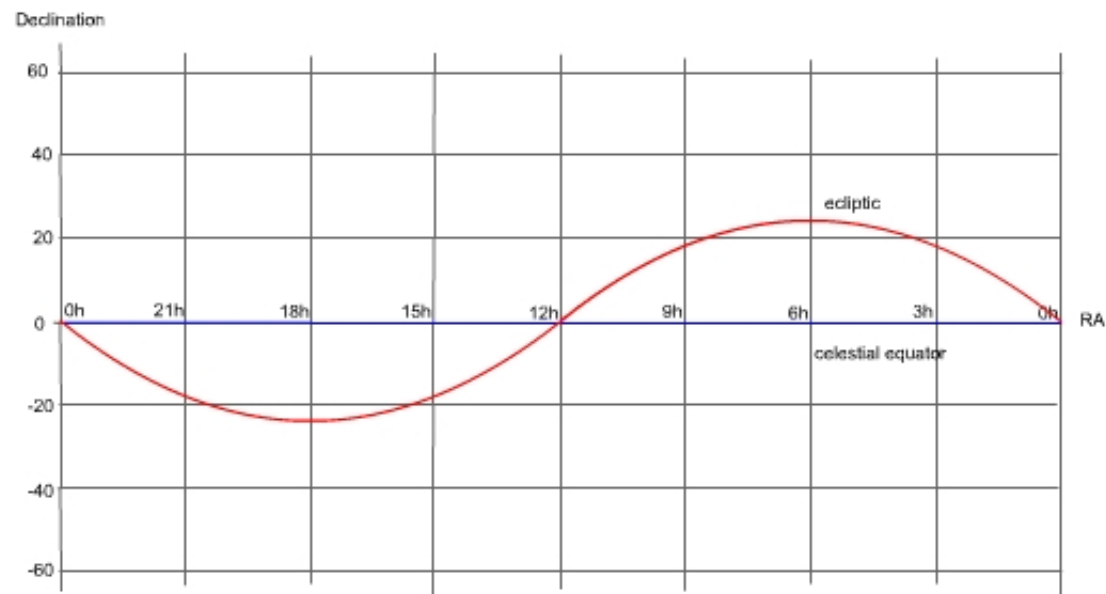
תלמאי והאסטרונומים הקדמונים ידעו על פרצסיה של הציר הצפוני והעדיפו להשתמש בקואורדינטות האקליפטיות: זוית העילוי היא בין קו הרוחב האקליפטי והאקווינוקס. זוית ההטיה היא הזוית בין הכוכב והמישור האקליפטית ורק היא משתנה בגלל הנקיפה, וניתנת לתיקון עם השנים.

The ecliptic is the angle that separates the body's ecliptic meridian from the spring equinox; the ecliptic latitude is the angle that separates the body from the ecliptic האסטרונומים הערביים השתמשו בזוית גובה altazimuth בין האופק והכוכב. האזימוט azimuth הוא הזוית של מסלול הכוכב עם ציר הצפון הגיאוגרפי, הגובה altitude הוא הזוית עם האופק. אך סיבוב השמים ב-24 שעות משנה את מיקום הכוכב יחסית לאופק, ולכן שימוש ב-altazimuth מחייב קביעת שעה מדויקת של המדידה.

מישור קו המשווה (האנכי לציר סיבוב הארץ סביב עצמה) נוטה כלפי מישור סיבוב הארץ סביב השמש



זוית השמש בחצות היום בקו המשווה במשך השנה



מדוע כל כך מסובך? מדוע לא כל הסיבובים במישור אחד?

גלילאו גליליי – Galileo Galilei 1564–1642



גלילאו – טבלת תאריכים

1543 **Nicolaus Copernicus**

מפרסם חלופה למודל האריסטולי – הארץ סובבת סביב השמש

1563 הורי גלילאו – וינצנצו גליליי וג'וליה אמנאטי נישאים

1564 גלילאו נולד בפיזה

1570~ – **Thomas Digges**

מפרסם תיאור טלסקופ שנבנה בשנים 1540–1559 ע"י אביו ליאונארד דיגס

1573 – **Tycho Brahe**

מפרסם "על הכוכב החדש" השולל תורת אריסטו לרקיע גבישי ובלתי משתנה ואתר סביב הירח

1576 – **Giuseppe Moletti**

קודמו של גלילאו במשרת הקטדרה למתמטיקה בפדואה, מדווח שגופים נופלים במהירות שווה בלי תלות בחומר ממנו הם עשויים (הינו משקלם).

1581 – **Vincenzo Galilei**

מנסח דיאלוג על מוסיקה עתיקה וחדשה – תיאוריה מוזיקאלית

1581 גלילאו נרשם כסטודנט לרפואה באוניברסיטת פיזה

1582 גלילאו בהרצאות המתמטיקה של ריצ'י Ostilio Ricci מחליט ללמוד מדעים ומתמטיקה

1585 עוזב אוניברסיטה ללא תואר, ועובד כמורה

1586 ממציא מאזניים הידרוסטטיות ומפרסם "המאזניים הקטנות"

1586 – **Simon Stevin**

מפרסם תוצאות זריקת משקלות עופרת מגובה 10 מטרים

1588 – **Tycho Brahe**

מפרסם עבודה על שביטים הכוללת תיאור אחר של היקום

1589 גלילאו מתמנה למחזיק הקטדרה למתמטיקה באוניברסיטת פיזה

1590 משלים חלקית חיבור "על התנועה" שלא פורסם

גליליאו – טבלת תאריכים (המשך 1)

- 1591 מות אביו של גליליאו, ויצנזו Vincenzo Galilei
- 1592 מתמנה פרופסור למתמטיקה באוניברסיטת פדואה, שם כיהן 18 שנים
- 1593 ממציא מדחום (מתברר כי הוא תלוי בטמפרטורה ובלחץ)
- 1595 ממציא חישוב בליסטי משופר, ומחוגה צבאית, בה השתמש אח"כ למדידת חלקות אזרחיות, ומשתכר ממכירת המחוגה ומהוראת השימוש בה
- 1597 כותב לקפלר על תמיכתו במודל הכוכבים שלו
- 1600 מפרסם "המכאניקה". נולדת ביתו הראשונה, וירג'יניה.
- פירסום "מגנטים", הארץ מגנט גדול, תמיכה במודל קופרניקוס ע"י גילברט **William Gilbert** ובאותה שנה האינקויזיציה ברומא דנה את ג'ורדאנו למות על תמיכה במודל קופרניקוס
- 1604 מודד מיקום ומרחק סופרנובה – לא תופעה אטמוספירית אלא רחוקה מהירח
- 1605 נתבע ע"י גיסיו על אי תשלום נדוניה
- 1606 נולד בנו, וינצ'נזו
- 1606 מפרסם מדריך לשימוש במחוגת החישוב שלו – calculating compass
- 1608 המצאת הטלסקופ העדשות ע"י ליפרשי **Hans Lippershey**
- 1609 ממציא טלסקופ משופר המבוסס על ליפרשי

גלילאו – טבלת תאריכים (המשך 2)

1609 – Kepler

מפרסם "אסטרונומיה חדשה" עם שני החוקים הראשונים שלו המחזקים את מודל קופרניקוס ולא מודל תלמאי לשימוש בספנות.

1609 – Thomas Harriot

משרטט תמונות ירח בטלסקופ 4 חדשים לפני גלילאו

1610 גלילאו מפרסם "שליח כוכבי" הרי הירח ומכתשיו, וארבעת ירחי יופיטר.

1610 - Martin Horky

מפרסם מאמר נגד תורת גלילאו

1610 – Kepler

מבקש מגלילאו טלסקופ או עדשות, אך גלילאו משיב שהוא עסוק מידי לבנות טלסקופ חדש ואין לו מיותרים.

1610 גלילאו מקבל מינוי לכל החיים כמתמטיקאי באוניברסיטת פדואה, וכמתמטיקאי

ופילוסוף בחצרו של קזימו השני, הדוכס הגדול של טוסקנה Cosimoll,

1611 גלילאו מגלה את מופעי הונוס, נפגש עם האפיפיור, ומתמנה חבר באקדמיה הלינציאית

Lincean שנוסדה ברומא ב- 1603 ע"י Federico Cesi 1585-1630 כמוסד פרטי למחקר ופירסומי מדע ומימן בהמשך את רוב פירסומי גלילאו

1611 – David Fabricius

מפרסם "כתמי שמש וסיבובם עם השמש" וקדם לפירסומים בתחום ע"י שיינר Christoph

Scheiner וגלילאו

1612 גלילאו מציע שירחי יופיטר יישמשו שעון אוניברסאלי לקביעת קו רוחב

1612~ – Francesco Sizzi

מגלה שינויים שנתיים בתנועת כתמי השמש

1613 גלילאו שולח מכתב "על כתמי השמש"

גלילאו – טבלת תאריכים (המשך 4)

- 1615 מכתב לדוכסית הגדולה כריסטינה שפורסם רק ב-1636
- 1616 מוזהר ע"י הכנסיה שלא להחזיק בתורת קופרניקוס, ומוסיפה את ספריו לרשימת הספרים האסורים הדורשים תיקון.
- 1616 במכתב פרטי דן בגאות ושפל
- 1617 עובר להתגורר ליד מנזר ביתו בפירנצה, צופה בצמד כוכבים Mizar in Ursa Major
- Kepler – 1619**
- פירסום "עולם הרמוני" המכיל את החוק השלישי
- 1619 גלילאו דן בשביטים
- 1623 Maffeo Barberini
- מתמנה לאפיפיור אורבן השמיני Urban VIII גלילאו מפרסם "המעריך" *The Assayer*
- 1624 ביקור האפיפיור שמשבח אותו. גלילאו מבין שהתיר פירסום השוואת קופרניקוס לתלמאי
- 1625 גלילאו משתמש במיקרוסקופ מורכב ומפרסם רישומי חרקים
- 1630 הצנזור הכנסייתי מאשר פירסום הדיאלוג בענין שני תאורי מערכות היקום, פורסם 1632
- 1633 נגזר ע"י האינקוויזיציה למעצר בית על הפרת ההזהרה מ-1616 והחיבור ברשימת הספרים האסורים
- 1638 "דיאלוג על שתי תורות מדעיות" פורסם
- 1642 מת בארצ'טרי
- Isaac Newton**
- 1668 בונה טלסקופ מראה
- 1687 פירסום "פרינסיפאה" המסיק חוקי קפלר מחוק הגראויטציה וחוקי התנועה

ביסוס המדע על ניסוי הוא אחד הרעיונות המרכזיים שהתקבלו במהלך המהפכה המדעית. הסמל המפורסם ביותר לשיטה זאת היה גלילאו גליליי.

גלילאו האמין בתיאור מתמטי של הטבע, ובמידות לאימות כמותי של חוקי הטבע. גליליי תמך בתורתו של קופרניקוס, לפיה כדור הארץ מסתובב סביב השמש ולא להפך, תאוריה שסתרה את עמדת הכנסייה. משום מה גליליאו לא הזכיר את מדידות טיכו ברהה וקפלר. אירוע נוסף שהיה חשוב לביסוסה של השיטה המדעית החדשה הוא הופעתם של כוכבים חדשים בשמים בשנים 1540 ו-1604. תופעה זאת, שמוסברת היום על ידי התפוצצות סופרנובות, הייתה בעלת משמעות מיוחדת מכיוון שהיא סתרה את התורה של אריסטו, לפיה הספירה העליונה ביותר של הכוכבים היא מושלמת ולא ייתכנו בה שינויים.

השימוש ב**טלסקופ** לראשונה בחקר המורפולוגיה של השמים היה מרכיב מרכזי בעבודתו. גליליאו שיפר את הטלסקופ המורכב (עצמית ועינית) ובעזרתו:

* תאר כתמי שמש (השמש אינו כדור מושלם) ומכתשים על הירח.

* ראה את ארבעת ירחי צדק (יופיטר) – הוכחה ניצחת שהארץ אינה במרכז סיבוב

הכוכבים. קרא להם ע"ש הדוכס הגדול של טוסקני, מדיצ'י, אך כיום נקראים Europa,

Ganymede and Callisto על פי מאיר **Simon Mayr 1573-1624** הטוען שראה אותם לראשונה

(ויכוח על תאריך בגלל 10 ימי הבדל בין התאריך היוליאני והגריגוריאני).

הוא הבחין שמהירות הסיבוב של ירחי הצדק קטנה עם מרחקם (מדד לאחר קיזוז תנועת הארץ)

* 1610 גלילאו מבחין ב"אוזניים" של סטורן (100 שנה אח"כ ב- **Christiaan Huygens 1659**

הויגנס הניח שאלה טבעות ירחים במישור קו המשוה).

* קובע כי הירח והשמש אינם כדורים מושלמים, אלא פחוסים כמו הארץ.

* הבחין ב**מופעים של ונוס** (נגה), בדומה לירח – הוכחה לסיבוב סביב השמש, ושמודל תלמי

של אפיציקלים לא נכון.

* הכריז כי שביל החלב בנוי מכוכבים ואינו אזור דחוס של השמים. הכוכבים שאנו רואים הם רק

חלק קטן מהקימים ביקום.

בגלל שהיכריז על אמונתו בתורת קופרניקוס – הואשם במשפט של האינקוויזיציה 1633, ונגזר עליו מאסר ממושך שלבסוף הומתק למאסר בית בארצטרי Arcetri. משפט זה מסמל יותר מכל את הקרע שהחל להתהוות בין המדע לבין הדת.

נאמר עליו שהיכריז לאחר המשפט: (*Eppur si muove*) אף על פי כן נוע תנוע

ב-1600 הועלה על מוקד האינקוויזיציה ז'ורדאנו ברונו Giordano Bruno בגלל תמיכה במודל קופרניקוס ליקום. גלילאו נכנע לכנסיה והצליח לחמוק מגורל דומה.

תרומות אחרות למדע:

1581 תאר תלות זמן מטוטלת באורך ואי תלות ב-narg, (אמפליטודה) ובמסה. הוענקו לו 30,000 גולדן מאגודת הסוחרים ההולנדית עבור המטוטלת, אך היא לא יושמה על ידם בשעונים במשך 50 השנה הבאות, עד הריסון John Harrison 1693-1776 בים (אין אפשרות להשתמש במטוטלת) הציע שעון ימי לפי ירחי יופיטר.

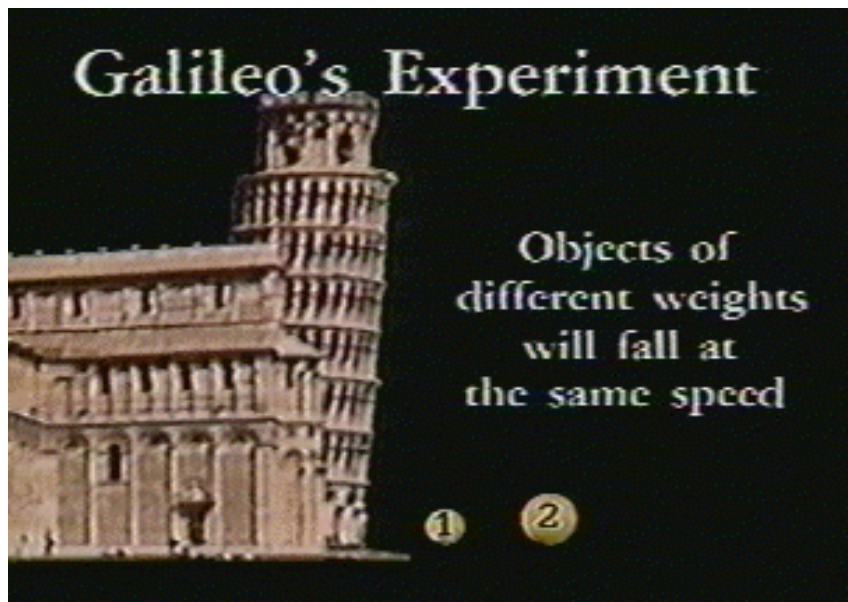


בנה מחוגה (COMPAS) עם מד זווית – מכשיר שירטוט מדידות בשטח וחישוב, למשל ריבית, שרש ריבועי ושלישי, וחישוב שטח ונפח) שמכר עם ספר הפעלה והרויח יפה ממנו. הוחלף על ידי סרגל החישוב הלוגריטמי.

1612 חוקר גלילאו את חוק המנוף, כננת, ארכובה capstan וגלגלת, ומסיק שבכולם כוח קטן בתנועה מהירה יכול להפיק כוח גדול בתנועה איטית

1590 גלילאו מנסח תורה מכאנית התלויה בצפיפות במקום במשקל – זונח אותה אח"כ.
 1589–1607 בגלל שהבחין **שכדורי ברד** גדולים וקטנים נופלים באותו זמן (אבחנה שגויה...
 הברד מגיע למהירות קבועה בגלל החיכוך עם האויר) וזה ייתכן רק אם כדורים גדולים נוצרו
 גבוה יותר בעננים, או הקטנים החלו ליפול קודם – שתי אפשרויות לא סבירות, ערך גלילאו
 ניסויים בכדור הנופל על מסלול מוטה – תאוצה לא תלויה במשקל הכדור. הוכחה לציבור בניסוי
 מפורסם (אם כי יש טענות שהניסוי מעולם לא התבצע באמת) בזריקת עצמים ממגדל פיזה
 Campanile del Duomo di Pisa, הראה שבנפילה חופשית גופים בעלי משקלים שונים מגיעים
 לארץ בו זמנית. ניסוי זה סתר את התאוריה של אריסטו שהייתה מקובלת באותם ימים, לפיה
 ככל שמסתו של גוף גדולה יותר כך הוא יגיע מהר יותר לקרקע.
 ניסיון דומה פורסם מוקדם יותר ע"י גמבסיטה **Benedetti Giambattista in 1553** וע"י המהנדס
 ההולנדי סטיון **Simon Stevin in 1586**

מצא באופן ניסיוני כי מסלול חפץ נזרק – פרבולי.
 1632 כוח על עצם לא גורם למהירות אלא לתאוצה
 1638 הגדיר סטטיקה ודינאמיקה.



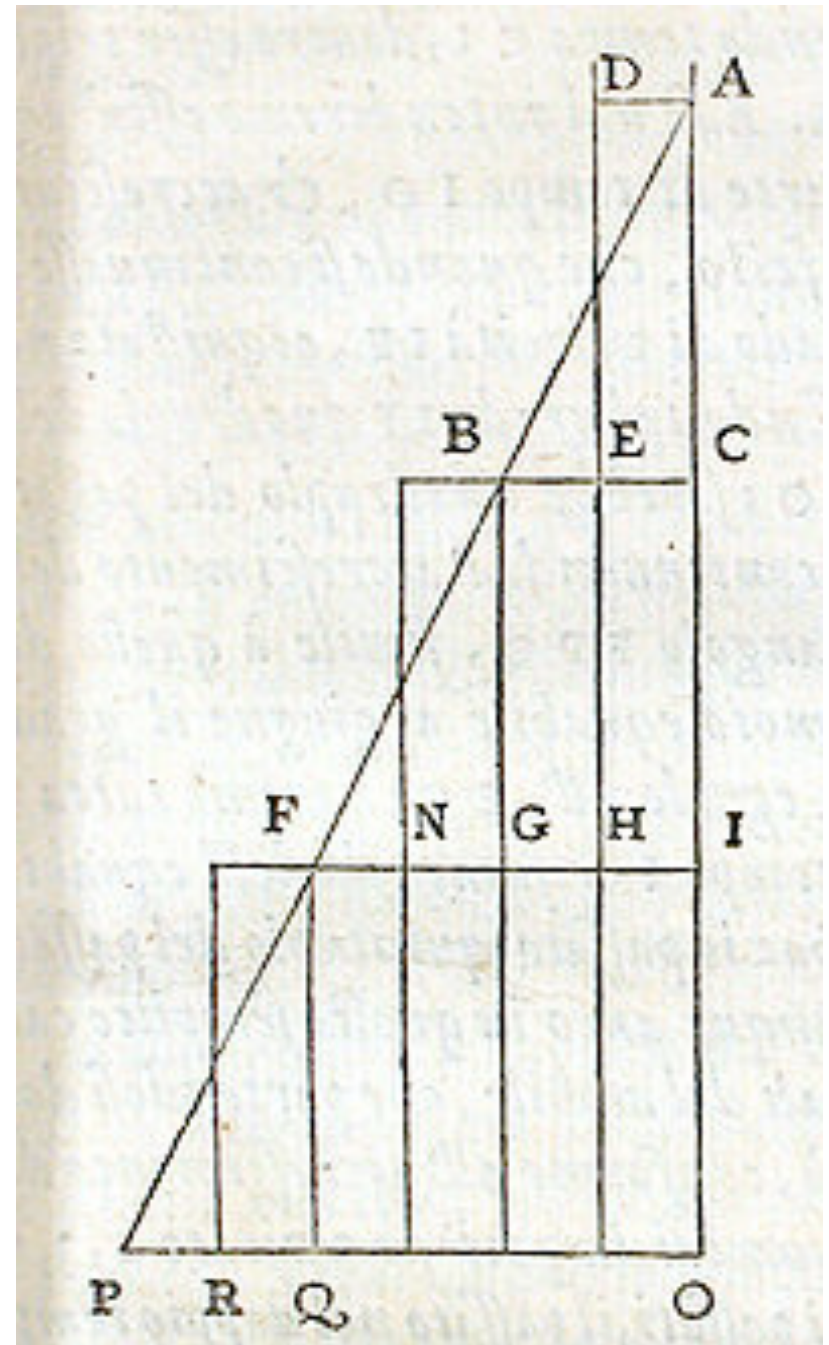
הערת אגב: רק 200 שנה אח"כ מצא סטוקס
George Gabriel Stokes 1819–1903
 את כוח החיכוך על כדור הנופל במים:
 $\text{weight} = mg \approx R^3 = \text{Friction} \approx R$
 לכן כדורים גדולים יותר מגיעים למהירות גדולה יותר

הדינמיקה של גלילאו

בצעירותו ניסה גלילאו לתת ביטוי מתמטי לפיזיקת האימפטוס, שהתפתחה מהפיזיקה של אריסטו. אולם, מושג האימפטוס, שלא התיישב היטב עם הפיזיקה האריסטוטאלית, היה מבולבל וקשה לכימות. כדי לתת ביטוי מתמטי לתופעות הטבע, גלילאו ויתר עליו לחלוטין ובנה תחתיו תורה חדשה של תנועת עצמים על פני כדור הארץ, שהחליפה את תורת התנועה של אריסטו. הרעיון העומד בבסיסה של תורת התנועה של אריסטו הוא שגופים שואפים להגיע למקומם הטבעי. לעומת זאת, העיקרון שעומד בבסיסה של תורת התנועה החדשה של גלילאו הוא עיקרון ההתמדה. עיקרון ההתמדה אומר שגוף נע כלשהו ימשיך בתנועתו כל עוד אין פועלים עליו כוחות חיצוניים. זה ההבדל היסודי בין תורת התנועה של גלילאו לזו של אריסטו: אצל אריסטו תנועה תמיד זקוקה לסיבה, כלומר לכוח מניע. לעומתו טוען גלילאו שתנועה, או לפחות המשך התנועה, אינה זקוקה לסיבה – התנועה נמשכת מאליה כל עוד לא מתערבים בה מבחוץ. מה שזקוק לסיבה הוא שינוי התנועה. הגוף הנזרק מספינה נעה נע יחד איתה לפני זריקתו. לפיכך, נוסף על תנועתו מעלה ומטה בעקבות הזריקה ובהשפעת הכובד, הוא גם ימשיך לנוע קדימה במהירות זהה למהירות הספינה. בסופו של דבר ישוב הגוף ויפול בנקודת הזריקה על הסיפון, ממש כפי שהיה עושה בספינה נחה, ומכאן שאין תוצאות הניסוי יכולות ללמדנו אם הספינה "באמת" נעה או נחה. באופן דומה אפשר לטעון שגם תוצאות ניסויים של זריקת גופים על פני כדור הארץ אינם מושפעים מתנועתו. לפי אריסטו שינוי זקוק תמיד לסיבה, וההבדל בין תורת התנועה שלו לזו של גלילאו וניוטון הוא בשאלה מהו שינוי. אצל גלילאו וניוטון אין הבדל עקרוני בין מנוחה לבין תנועה בקו ישר ובמהירות קבועה, ולפיכך אפשר לראות מנוחה כתנועה במהירות אפס. אצל אריסטו, לעומת זאת, מנוחה ותנועה הן שתי תופעות פיזיקליות שונות לחלוטין, ולפיכך אי אפשר לראות באחת מהן מקרה פרטי של השנייה.

במסגרת תורת התנועה החדשה של גלילאו, אפשר, אפוא, לקבל את השערת קופרניקוס האומרת שהארץ נעה במהירות עצומה, אף על פי שבניסויים שאנו עורכים איננו חשים בתוצאותיה של תנועה זו.

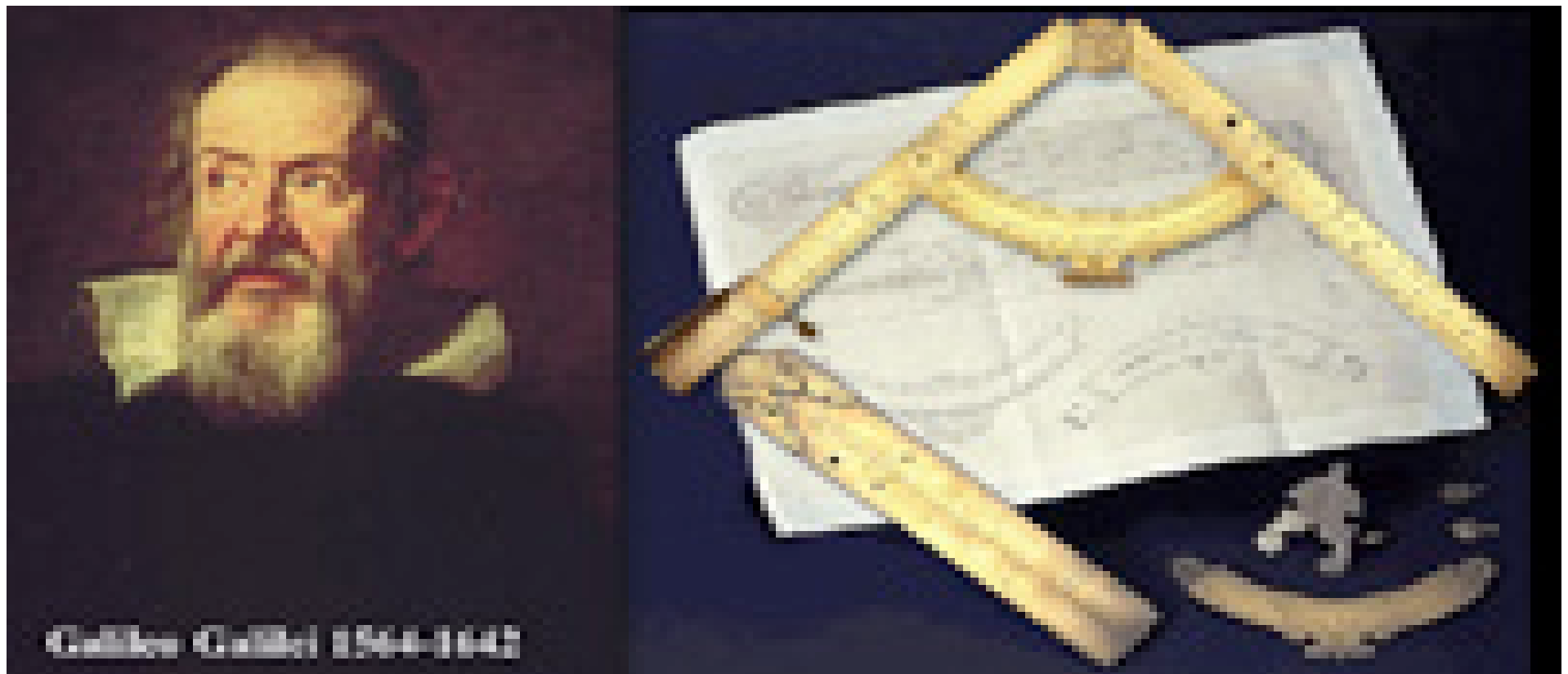
גלילאו (צבירת דרך בתנועה במהירות קבועה):
תיאור גראפי ל- $x=vt$



1609 גלילאו מפתח "עין קטנה" *occhiolino* מערכת הגדלה עם שתי עדשות קעורה וקמורה, שהוצגה ב-1624 לנסיך צ'זי Prince Federico Cesi מייסד האקדמיה די לינצ'אי Accademia dei Lincei. מיחסים לפרבר Giovanni Faber שנה אח"כ את הטבעת השמות מיקרוסקופ וטלסקופ

האתר הוירטואלי למוזיאון של גלילאו גליליי בפירנצה

<http://catalogue.museogalileo.it/index/IndexObjectsInAlphabeticalOrder.html>



1589 מאזניים הידרוסטטיים לצפיפות גופים (לפי ארכימדס). גם שימש כטרמומטר.
מצא כי משאיבות מים במכרות לא פעלו מעומק שמעל 10 מטר - עודד את תלמידו **טוריצלי**
לחקור תכונה זו.

טוריצלי — Evangelista Torricelli — 1643

ממציא ברומטר כספית 1643 מדגים לחץ אטמוספירי. יוצר ואקום.
1592 בנה טרמומטר (טרמוסקופ) מיכל אויר עם צינורית מים -

1612 **סנקטוריוס** Santorio Sanctorius

שימוש במדחום ברפואה בונציה (אולי מבלי לדעת על גלילאו)
חקר גאות ושפל

מה ההבדל בין מים לכספית?

(אנומליה, מתח פנים, נק. קפאון ורתיחה, צבע, ...)



בתמונה: טרמומטר הידרוסטטי (מדחום) של
גלילאו.

"פילוסופיה (=מדעי הטבע) נכתבת בספר הגדול הפרוש מול עינינו – היקום. אך לא נוכל להבינו אם לא נלמד את שפתו והסמלים בו הוא נכתב. ספר זה נכתב במתמטיקה, שבלעדיה נגשש במבוכ חשוך."

היום: אין דרך לתיאור חוקי הטבע מלבד המתמטיקה, אך יש ספקנים השואלים האם מודל מתמטי שקול לטבע, או רק מקרב את המציאות בדיוק התלוי בדיוק המדידות.

The Beauty of Algebra

"Philosophy is written in that great book which ever lies before our eyes — I mean the universe — but we cannot understand it if we do not first learn the language and grasp the symbols, in which it is written. This book is written in the mathematical language... without which one wanders in vain through a dark labyrinth."

-Galileo Galilei



30% off \$20

$$\text{Discount} = \boxed{30\%} \times \$20 = 0.30 \cdot \$20$$

Let x be ^{nondiscount} price of product \$10

$$\text{Discount} = \boxed{30\%} \cdot x = 0.30 \cdot x$$

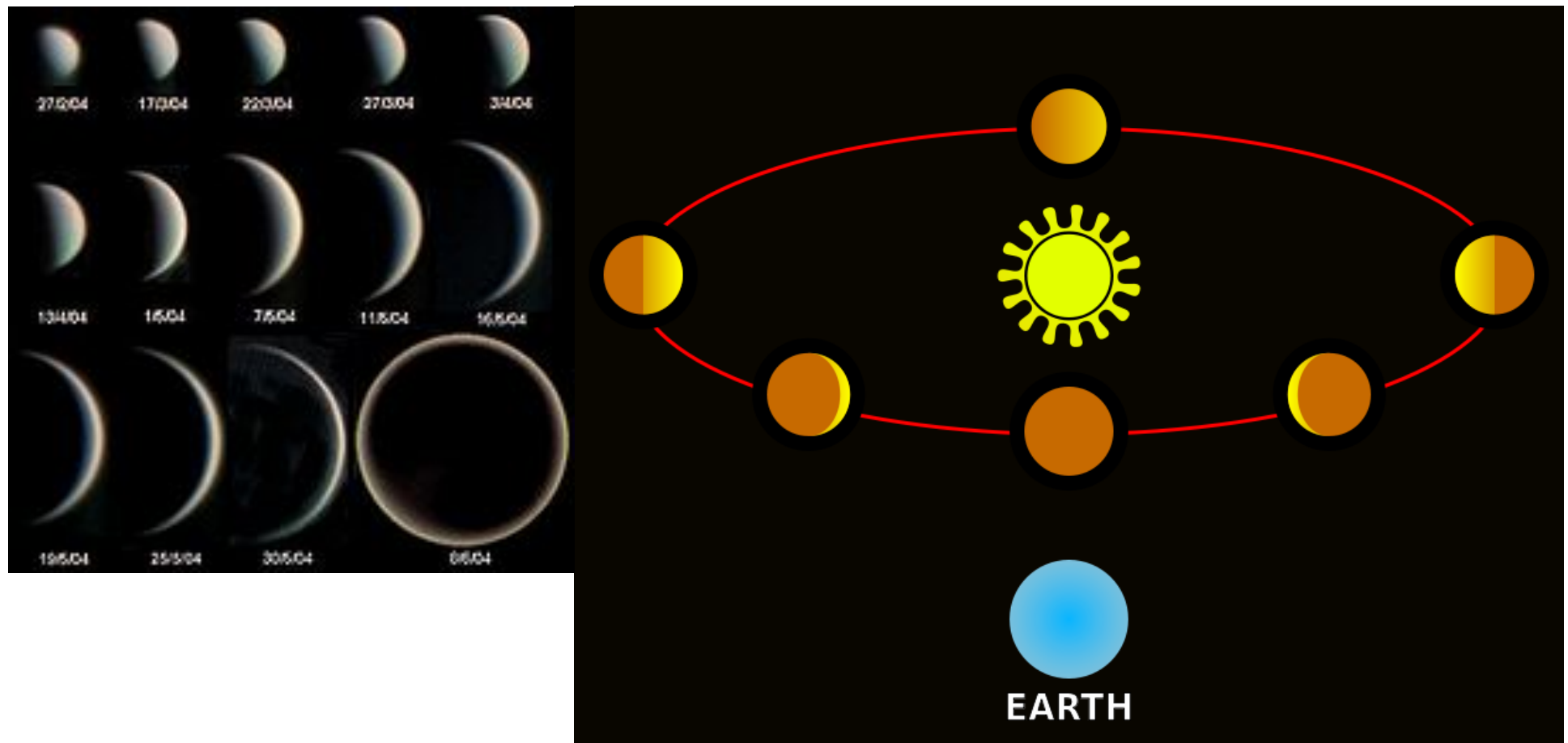
Let p = percentage off

Let y = discount

המופעים phases של ונוס (נגה)

לפי מודל תלמאי מרכז מסלולו האפיציקלי של נגה נמצא על קו בין הארץ והשמש ותמיד תחת השמש, וייראה כחרמש דק.

לפי מודל קופרניקוס נגה ייראה מהארץ בכל המופעים, כמו הירח. אך רק עם השימוש בטלסקופ ע"י גלילאו ניתן היה לבדוק את מופעי הנגה

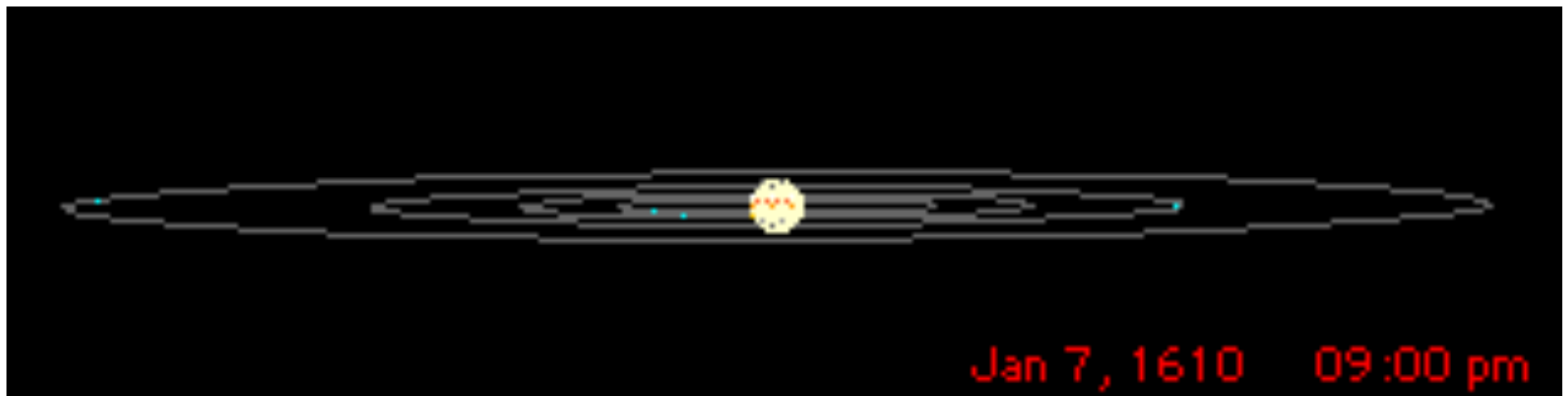


מופעי הנגה (אדום), (חרמשי כשגדול) כפי שראה גלילאו בטלסקופ שלו
וארבעת ירחי הצדק



Telescope View

Unaided View



אופטיקה – טלסקופים ומיקרוסקופים

Nicholas of Cusa 1451

התפתחות עדשות למשקפים ולטלסקופים ומיכשור מדוייק יותר למדידת זוויות. במאה ה-16 הומצא בהולנד הטלסקופ על ידי מדען ששמו אבד עם השנים (לאחר מכן ביקשו לעצמם מדענים ויצרני עדשות אחרים את זכות הראשונים על ההמצאה).

ינסן Hans & Zacharias Janssen 1590

מלטש עדשות המשקפים ההולנדי ובנו בונים את המיקרוסקופ המורכב – שתי עדשות קמורות: העצמית (אובייקטיב) היוצרת תמונה ממשית מוגדלת והפוכה של העצם, והעינית (אוקולר) היוצרת תמונה מדומה הפוכה. כנראה באותו זמן, ובאופן בלתי תלוי בליפרשי, יצר טלסקופ.

הריוט Thomas Harriot 1560-1621

כמה חדשים אח"כ באוכספורד בנה משקפת עם הגדלה 6 בה בחן את פני הירח.

Leonard Digges and his son, Thomas

הראשונים כנראה לבנות טלסקופ מחזיר, כ-30 שנים לפני Lipperhey.

Christopher Scheiner 1573-1650

שיינר היה הראשון שחקר כתמי שמש בעזרת קמרה אובסקורה

1608 ליפרשי Hans Lippershey האומן ההולנדי בונה את הטלסקופ הראשון.

רשם פטנט למשקפת מגדילה שנבנתה על ידי ילדיו במשחקהם מעדשות משקפיים עודפות

גליליאו Galileo Galilei - 1609

ראה העתקים בונציה ב-1609 של טלסקופ ליפרשי ומיהר לפתח מכשיר כזה בעצמו מסיבה מסחרית, ולהעצים את ההגדלה כדי למוכרו לימאי ונציה. ניסה עדשות קעורות וקמורות ובונה עינית קעורה ותמונה ישרה בהגדלה $\times 20$ אך עם אברציות ספיריות וכרומטיות ושדה ראייה קטן (פחות מקטר הירח). גליליי היה כנראה המדען הראשון שהשתמש בטלסקופ על מנת להביט בכוכבים. מדמה תמונה על מסך לציוור תוי שטח של הירח וכתמי שמש. פיתח שיטת מדידת זווית בין כוכבים בעזרת מיקומטר שבנה, ומביט בו בעין אחת (ושדה ראייה מוגבל) כשהשניה צופה בכוכבים – camera lucida עזרה ברישום תוך צפיה בטלסקופ ובמיקרוסקופ. ב-1611 במסיבה בה הציג גליליי את "משקפת הבילוש" spy glass שלו קרא לו המתמטיקאי היווני **דמיסיאני John Demisiani** בשם – טלסקופ.

המצאה זו הובילה לשרשרת של גילויים חדשים: גלילאו מיפה את מכתשי הירח והיה הראשון לראות את הירחים של צדק (יופיטר), המופעים של שבתאי (סטורן), פוענחו כטבעות ע"י הויגנס ב-1656) ותזוזת כתמי השמש. השימוש במכשירים אופטיים על מנת להביט אל השמים שינה את פני האסטרונומיה: גילוי הירחים של צדק ושבתאי הזים את הדוגמות של הארץ כמרכז העולם.

קפלר Johannes Kepler 1571 – 1630

היה קצר רואי, ולא ראה טוב בטלסקופ הגלילאי, לכן בנה טלסקופ "קפלרי" משתי עדשות קמורות ההופך את התמונה ולכן אינו שימושי כמשקפת, אך מגדיל את שדה הראייה. שפופרת הטלסקופ קצרה יותר מטלסקופ גליליי, אך מתארכת עם הוספת אופטיקה להפיכת הדמות לשימוש כמשקפת ארצית (erector system **Paolo Belletti** 1640s)

קפלר 1611 — Kepler Johannes

מגלה החזרה פנימית, חוק שבירה לזוויות קטנות, ואופטיקה של עדשות דקות

$$N \phi = n' \phi'$$

1619 דרבל 1572 – 1633 Cornelius Drebbel

מציג בלונדון מיקרוסקופ עם שתי עדשות קעורות

1621 סנל Willebrord van Roijen Snell

מפרסם את חוק השבירה (שנושא את שמו) ממנו משתמע שמהירות האור בחמר יחסית למנת השבירה

$$N \sin(\phi) = n' \sin(\phi')$$

בוני טלסקופים נוספים:

Francesco Fontana, Evangelista Torricelli, Eustachio Divini, Giuseppe Campani

Jeremiah Horrocks 1618-41, and William Crabtree 1610-44

ב-1639 שני האסטרונומים ראו את מעבר ונוס על פני השמש.

James Gregory 1638-1675

1663 תכנון טלסקופ מראה מחזירה המחליפה את העצמית, פתר בעית אברציות כרומאטיות.

מדוע?

1668 הוצג ע"י ניוטון בחברה המלכותית

Laurent Cassegrain 1629 –1693

1672 קסגרן מציג מגהפון וטלסקופ עם שתי מראות

Giovanni Domenico Cassini 1625-1712

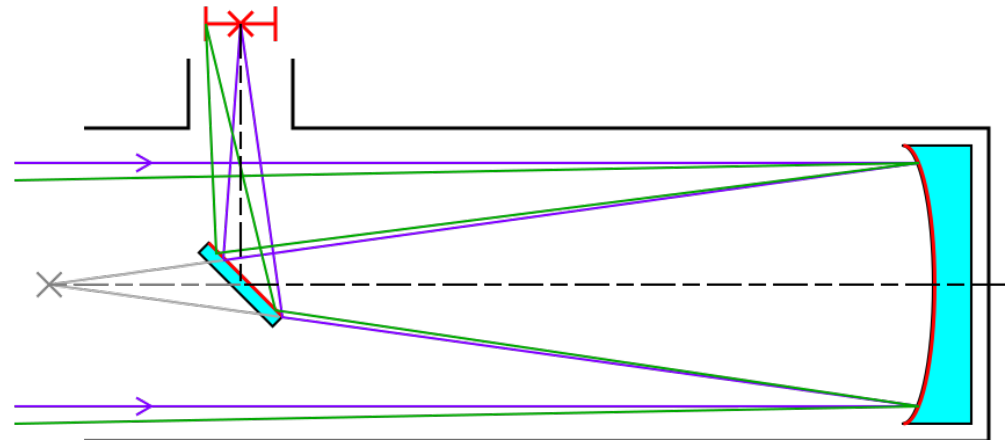
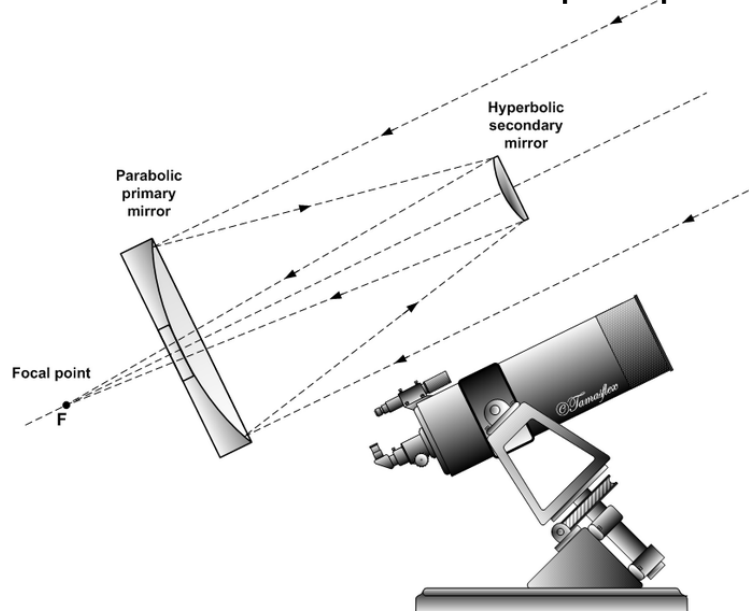
קסיני הוזמן לנהל את הטלסקופ בפריז שהושלם ב-1671

1675 הטלסקופ המלכותי בגריניץ' הושלם

Olé (Olaus) Christensen Römer 1644-1710

בסוף המאה ה-17 יישועים בעיקר הביאו ובנו טלסקופים ביפן בסין ובסיאם.

משמאל: טלסקופ קסגרן (או שמידט-קסגרן) Schmidt-Cassegrain
מתחת: טלסקופ ניוטוני



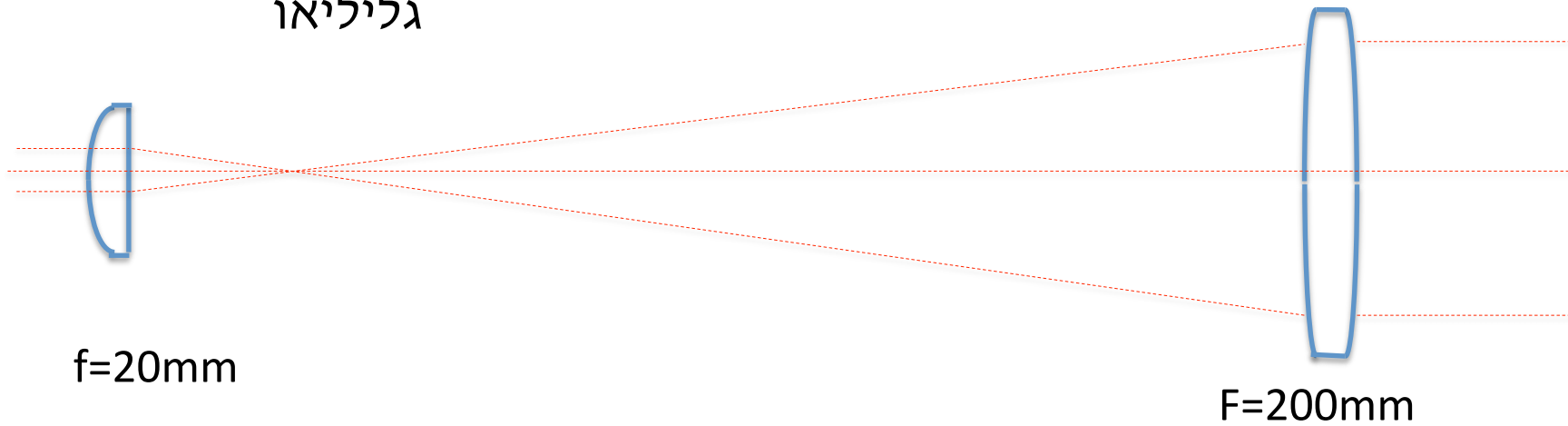
1660 תחרויות טלסקופים ציבוריות

התפתחות האופטיקה במאה ה-16 ושימושיה למשקפיים טלסקופים ומיקרוסקופים קסמה לא רק למדענים ושוחרי המדע אלא גם למלכים, אצילים ובעלי ממון. הטלסקופ היה בראש ההתעניינות, אולי כי השימוש כטלסקופ ארצי איפשר הדגמה מרשימה.

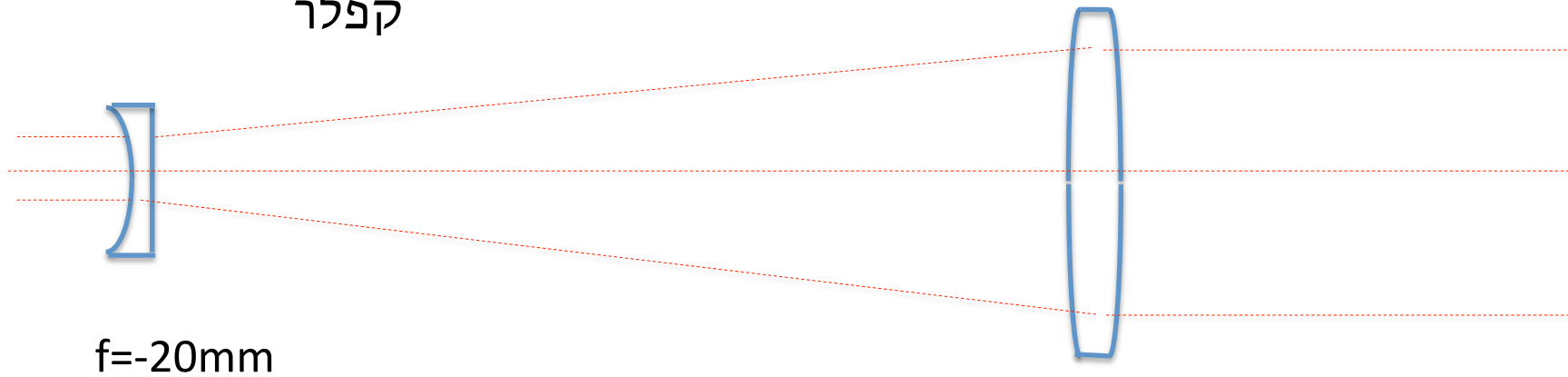
במאה ה-17 ברומא הוכרזה תחרות שבה יקראו טקסטים בסדר מעורב של פטררקה, דאנטה ואריסטו ממרחקים הולכים וגדלים, וכן יקראו דיאגרמת כושר אבחנה, דומה למה שבשימוש כיום אצל רופא העינים, שהוכנה ע"י האקדמיה del Cimento בפירנצה. נבחנו טלסקופים של בונה מכשירים ידוע – Eustachio Divini מול השען הצעיר Giuseppe Campani. למרות שלא הוכרז מנצח בתחרות, קמפארי הצעיר זכה בפירסום. שני הטלסקופים ניקנו לאוסף מדיצ'י ומוצגים היום במוזיאון המדע בפירנצה.

בשקפים הבאים ניתן לראות כמה דיאגרמות אופטיות:

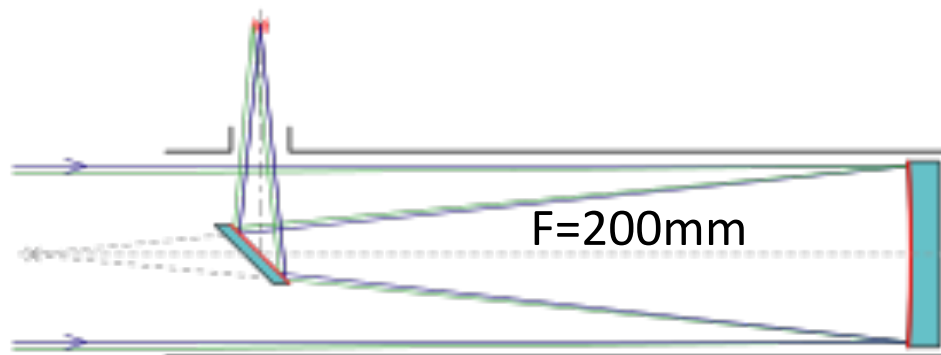
טלסקופים של קפלר גלילאו וניוטון (לכולם הגדלה $\times 10$)
גלילאו



קפלר

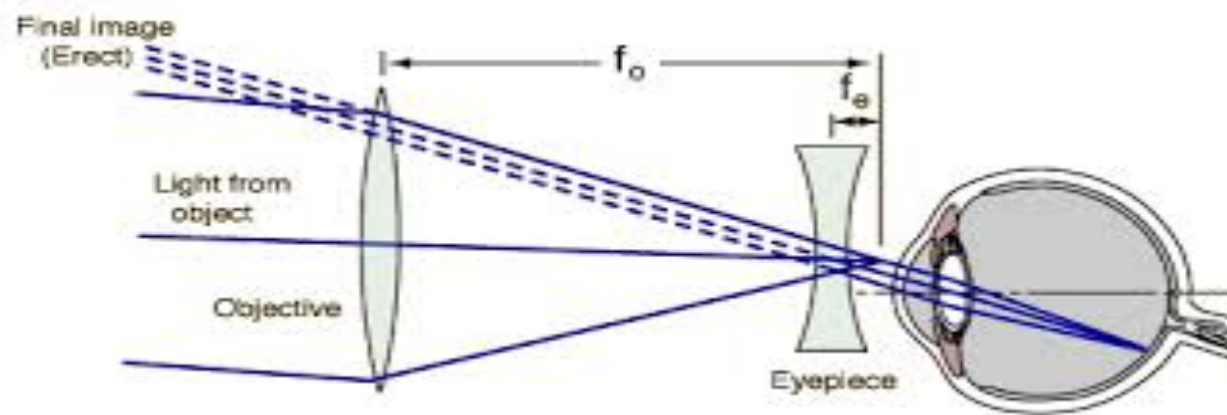
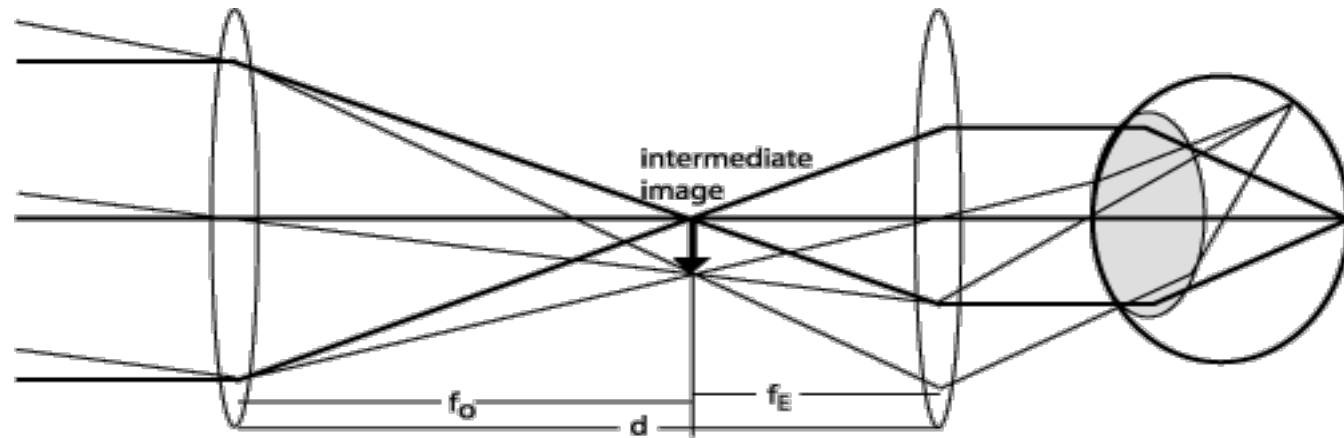


ניוטון

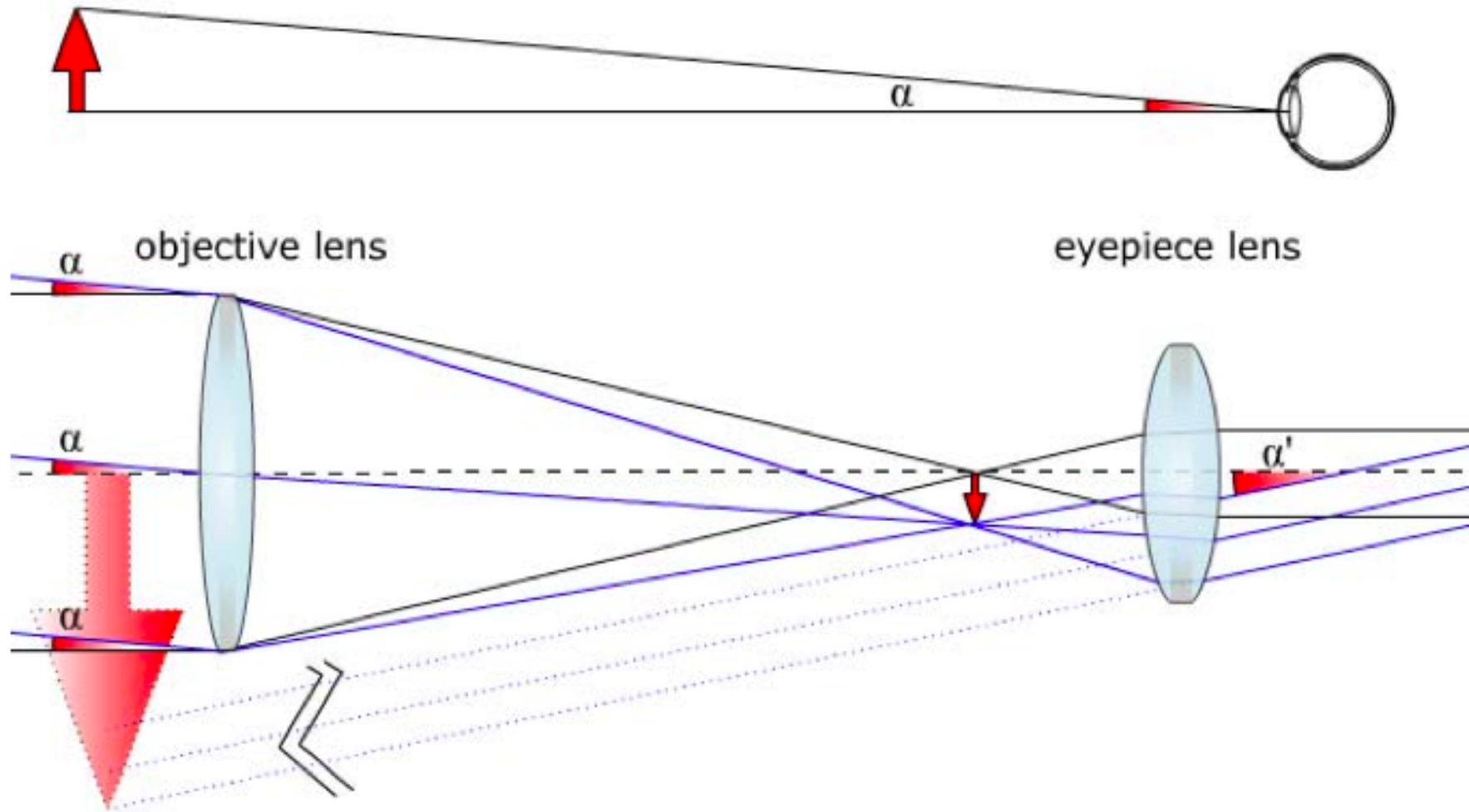


לטלסקופ גליליי דמות ישרה.
טלסקופ קפלרי – עינית מעדשה שלילית – דמות הפוכה, שדה ראייה מורחב ובהירות משופרת יחסית לגליליי. טלסקופ קפלרי החליף את טלסקופ גליליי תוך זמן קצר.

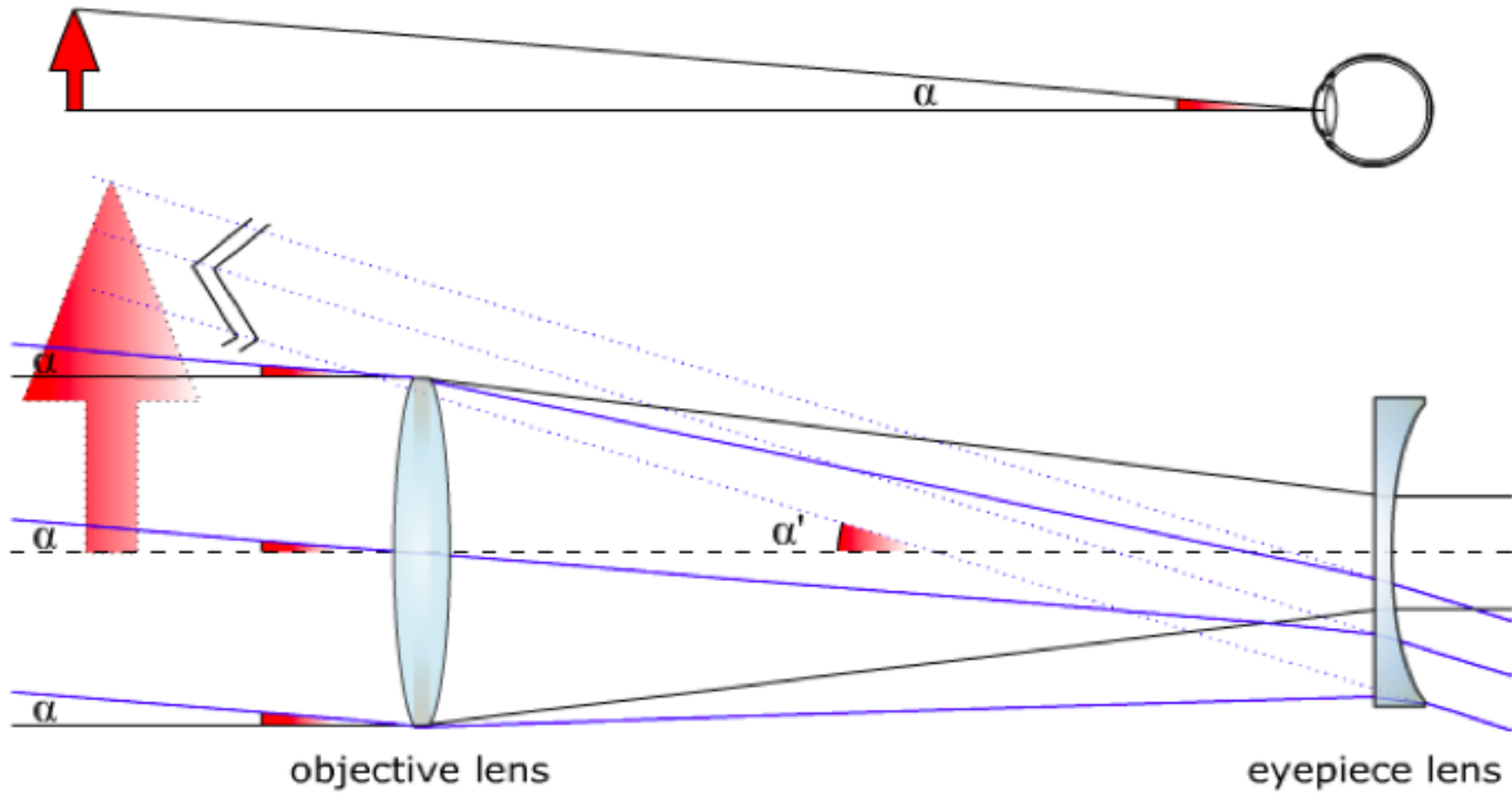
האם תוכל לצייר את גודל שדה הראייה בשני הטלסקופים?



טלסקופ גליליי, עם עדשת עינית דו קמורה: ההגדלה הזוויתית.

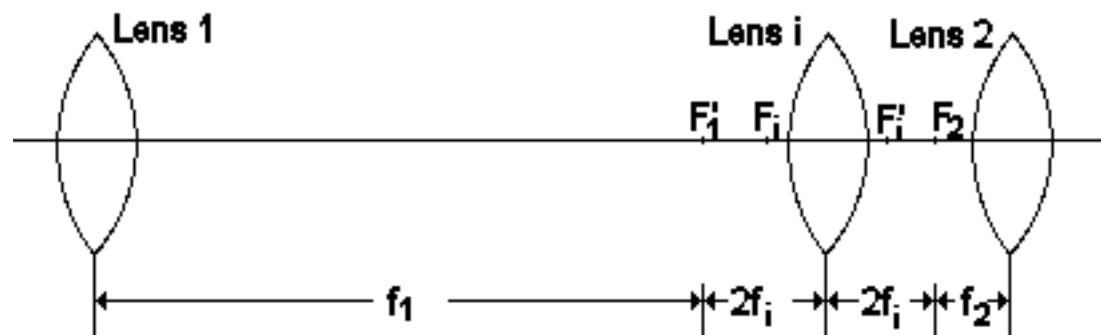
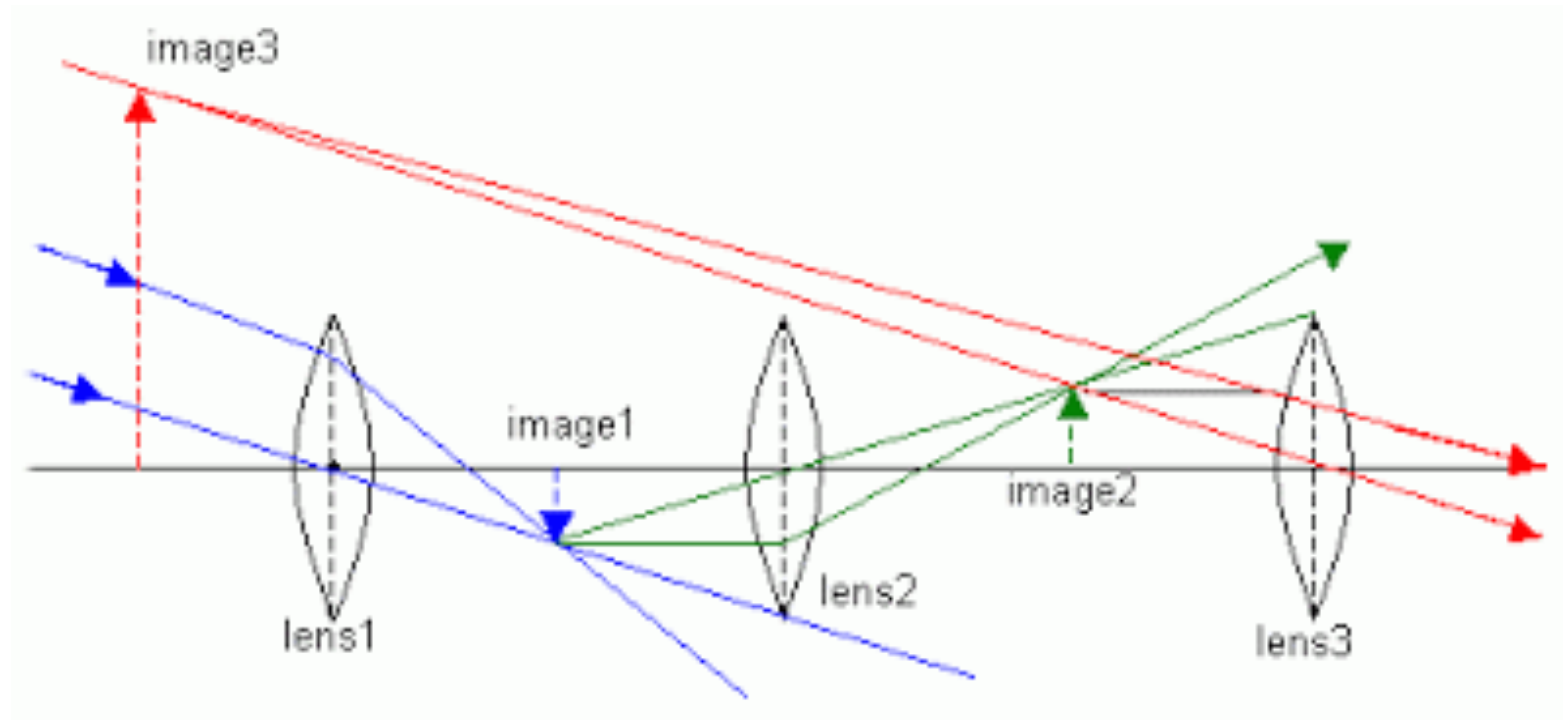


טלסקופ קפלר עם עדשת עינית דו-קמורה.



erector system **Paolo Belletti** 1640s

שילוב שתי עדשות להיפוך הדמות בטלסקופ קפלר - לשימוש במשקפת טלסקופית ארצית.



ההבדלים בין מיקרוסקופ וטלסקופ

מיקרוסקופ

אובייקטיב (עדשת עצם) בקטר קטן

ובפוקוס קצר

$$\text{Mag} \sim 1/f_{\text{ob}} * 1/f_{\text{oc}}$$

האובייקט קרוב לאובייקטיב

זווית איסוף האור גדולה

טלסקופ

אובייקטיב (עדשת עצם) בקטר גדול

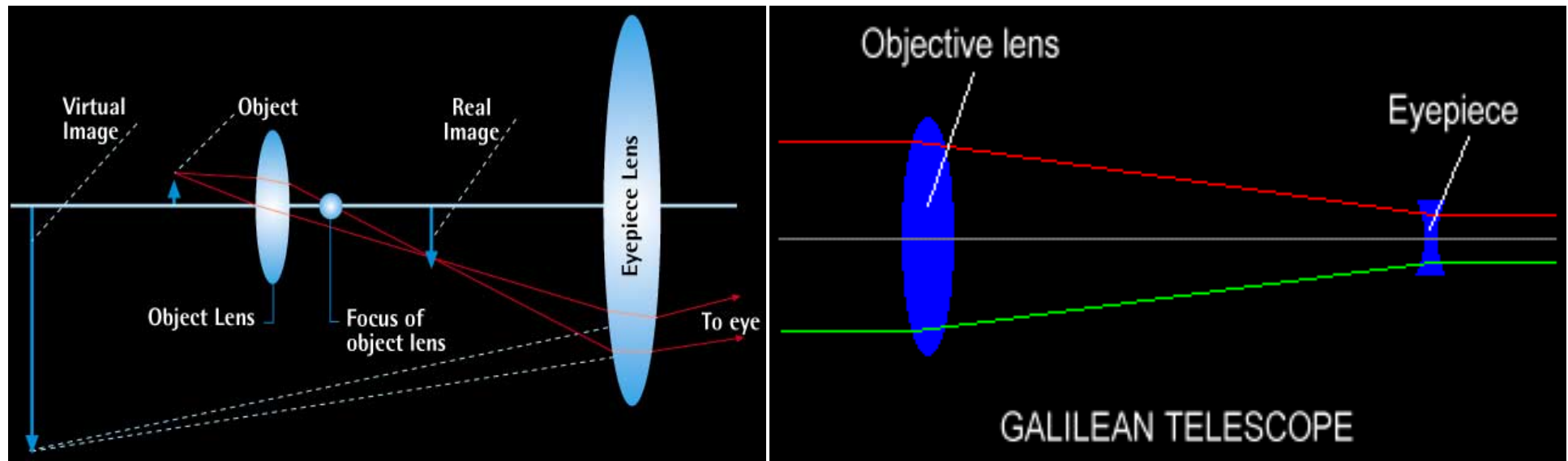
ובפוקוס ארוך

$$\text{Mag} = f_{\text{ob}}/f_{\text{oc}}$$

האובייקט באינסוף

זווית איסוף האור קטנה

האם אתם מבינים מדוע כשהופכים משקפת (או טלסקופ) היא מקטינה, אך לא מיקרוסקופ?



תרגיל: בנית מיקרוסקופ וטלסקופ

הולדת האופטיקה המודרנית

הניסיון לשכלל טלסקופים הביא גם למחקר על אופן פעולתם. את הבסיס לאופטיקה המודרנית נהוג לראות בספרו של קפלר: "Astronomiae Pars Optica" (החלק האופטי של אסטרונומיה).

מהות האור

כריסטיאן הויגנס Christiaan Huygens 1629-1695 הגה תורה על פיה האור הוא גל, והסביר את השבירה של האור בתנועה של חזית הגל כאשר היא עוברת בין חומרים (תווכים) שונים. לעומתו, ניוטון קידם תורה על פיה האור מורכב מחלקיקים. בעזרת תיאור זה קל יותר להבין את תופעת ההחזרה של האור על ידי מראות (אך קשה יותר להבין את תופעת השבירה). תורתו של ניוטון הפכה למקובלת, עד שב-1801 הוכיח תומאס יאנג בניסוי שני הסדקים שהאור הינו גל. בתחילת המאה ה-20, עם עבודותיו של אלברט איינשטיין והולדת מכניקת הקוונטים, הסתבר שתכונות האור מתוארות כשילוב של השניים – גל וחלקיק...

האם גם תאורי תנועת הכוכבים יחסית לארץ או לשמש הם תיאורים שוי ערך? (לאור תורת היחסיות הפרטית למשל) הרי גם השמש אינה עומדת אלא נעה בגלקסיה

תעופה

1496 המתמטיקאי האיטלקי דנטי **Giambattista Danti** ריחף ממגדל במעין דאון.

1500 הירונימוס בוש **Hieronymus Bosch** מצייר שתי ספינות מלחמה מעל עיר בוערת.

דלה פורטה **Giambattista della Porta** מפרסם תיאוריה והוראות בניה לעפיפונים.

1638 וילקינס **John Wilkins, Bishop of Chester** בישופ צ'סטר מציע מה שיהיה טיל בספרו "גילוי העולם בירח"

1638 סלבי **Evliya Çelebi** מדווח על רחיפה עם כנפים מלאכותיות של **HezarfenAhmet** ממגדל גלנטה באיסטנבול מעל הבוספורוס, ונוחת בכיכר באוסקודאר
Dogancılar square in Üsküdar

גיאוגרפיה

1475 Jacopo d'Angelo

1475 דה אנז'לו מפרסם ומדפיס תרגום של מפות גיאוגרפיות של תלמאי **Ptolemy** **Geographia**. אינפורמציה מהאינציקלופדיה של פליני האב **Pliny the Elder** נוגדת למפות אלה.

מפות העולם חסרות במזרח ובמערב – יש תיאורים לא מדויקים של אסיה ממסעות של שיירות. חיפוש דרך ימית למזרח ע"י הקפת הארץ ממערב הביאו לגילוי אמריקה ולמסעות גילויים במזרח הרחוק, אוסטרליה ואיי האוקינוס השקט.

Cristóbal Colón

1492 קולון מעריך בחסר את הקף כדור הארץ וספינתו לא מגיעה לסין

Gerardus Mercator 1518-1594

גרהרדוס מרקטור שרטט מפות קרטוגרף וגיאוגרף ההולנדי מציג שיטת היטל כדור למישור שנושא את שמו – על כריכת ספרי המפות שלו מופיע הטיטן אטלס נושא את כדור הארץ. הראשון שהשתמש בקוי אורך ורוחב לנווט ימי.



Bartholomeu 1451-1500

1488 ברטולומיו דיאז הפורטוגזי משייט סביב כף התקוה הטובה ומקיף את אפריקה.

מדוע שייט לאורך החופים?

שעונים וזמן

בסוף המאה ה-15 שענים בנירנברג פיתחו שעוני קפיץ במקום המישקולות. ההמצאה איפשרה פיתוח שעונים נישאים.

1335 שעון מכאני במילאנו

1581 גלילאו מבחין במחזור המטוטלת תלותו באורך ואי תלותו במסה. מדווח

לרשויות בהולנד וכנראה הגיע **להויגנס Huygens**

1659 רישום לשעון ע"י ויויאני **Vincenzo Viviani 1622-1703** לפי הוראות של גלילאו

שנמסרו לבנו וינצ'נציו **Vincenzio 1606-49** השען הפלורנטיני פרוצ'לוטי **Eustachio**

Porcellotti השתמש ברישומים ובנה את "מודד הזמן"

1656 קריסטיאן הויגנס (הויחנס) Christian Huygens בונה שעון מטוטלת, ובפריז

שעוני העיר מסונכרנים.

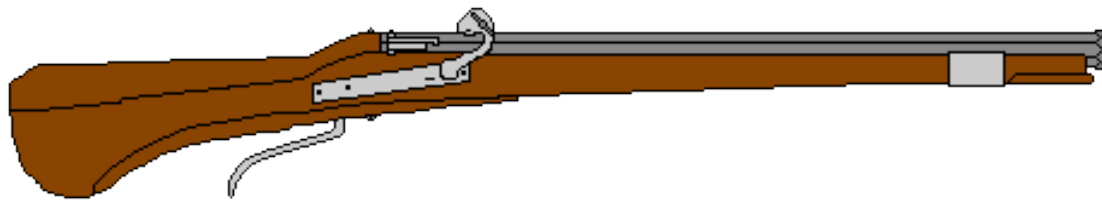
טכנולוגיה צבאית

"אש יוונית" בשימוש הביזנטינים – תערובת גפרית, נפט, ביטומן (אספלט) ושרף. נורה מצינור או נזרק ע"י קטפולקות
1527 ברסן **Matteo Bresan**, מפקח מחסן הנשק (ארסנאל) של ונציה, מפקח על בנית ספינות מפרש עם כמה תרנים ופתחי תותחים (נקרא galleon).



1546 הוראות של נונס **Pedro Nunes** לניווט ספינת מפרש בעיגול מלא (כולל נגד הרוח). שימוש באבק שריפה בלוחמה ביבשה ובים, ביצורי ערים ע"י מהנדסים צבאיים.

מוסקט וארקבוס – "תותחי יד" כורי היתוך משופרים לברזל כננות, טלטל, מנסרה מופעלת מים מצנחים, דאונים ועפיפונים אסטרולב לנווט בים רציפים צפים בנמל לספינות גדולות. סוף המאה ה-15 שיפור ברובים, אקדחים ותותחים.



טכנולוגיה צבאית – המשך מיכלאנג'לו די לודוביקו בונאררוטי 1475-1564

1527 קרל ה-5 קיסר האימפריה הרומית הקדושה (גרמניה וספרד) כולא את האפיפיור קלמנס ה-7 במצודה ברומא. הפלורנטינים מגרשים את המדיצ'ים השנואים ששלטו בעיר, בני משפחתו של האפיפיור. האפיפיור חותם הסכם כניעה לקרל עם הבטחה ששיבו את המדיצ'ים לשלטון בפירנצה. גל פטריוטיות נגד המדיצ'ים שטף את צעירי העיר וגם מיכלאנג'לו יליד פירנצה בן ה-52 הצטרף וקיבל את תוכנון ביצור העיר. הוא היה אמן נערץ ("האלוהי") שגדל בחסותו של לורנצו דה מדיצ'י אך פיסל והציב את "דוד" כהתרסה לגוליית המדיצ'י ויצא לרומא, פיסל את "משה" וצייר את תקרת הקפלה הסיסטינית בהזמנת האפיפיור בורז'ה. הוא יצא לסיוורים בפיזה ופרארה (הדוכס אלפונסו ד'אסטה היה מומחה ידוע לביצורים). מחברת של 20 רישומים מדויקים לביצורים (חומות, מגדלים, עמדות ארטילריה) נמצאות היום באוסף קאזה בונאררוטי בפירנצה. החומות החזיקו מעמד שנה, אך המצור גרם לרעב ומחלות והעיר נכנעה. אחרי המפלה האפיפיור המדיצ'יאני מחל למיכלאנג'לו וזה שב לעבוד עבורו. היו טענות נגד מיכלאנג'לו שהביצורים דמויי סרטן היו בעלות זוויות מחודדות וצרות ללא יכולת לפרוס בהם תותחים, וכי ריבוי חרכי היריה החלישו את החומות.



ביולוגיה ורפואה

קץ הגליניזם : מאה 15 – איטליה – הגוף הוא מכונה.
בתקופת הרנסנס האומנות מביאה לפריצת דרך באנטומיה:
לאונרדו דה וינצי – אנטומיה, אבל לא פרסם ולכן תרומתו מעטה, לא תיאר נסיונות חירור בלב,
רפואה וגאומטריה.
מיכאלנגלו – אנטומיה ונתיחת גופות בסתר.

זיהוי הכליות ושלפוחית השתן. השחלה והרחם. זיהוי קשר שרירים לעצמות. תיאור מערכת הדם וקשר לריאות, והעצבים. קשר מחלות להתרבות חידקים בגוף.
ניתוחי וחקירת גופות שיפר איבחון מחלות, אך לא תרם לטיפול.
היו ידועות מעט מאד תרופות (אופיום, קואנין) שמנים לטיפול בפצעים, והרבה טיפולי פולקלור ורעלים מבוססי תרכובות מתכות.

- **1519 ארנו קורטז** שותה קקאו בחצרו של מונטסומה ה-2 מלך האטסקים ומפיץ אותו כמשקה באירופה (1657 בית קקאו בלונדון) ובאמריקה הצפונית. 1765 טבלת שוקולד במסצוסטס.

בעיקר בגרמניה – מיון וסווג מחלקות וכיתות של צמחים

1552 קונרד גסנר Konrad Gesner השוויצ'י בסיס **לטקסונומיה של ליניאוס ב-1735**. שמות זהים לעצמות השלד ביונקים וציפורים.

במיון צמחים לקבוצות מבדיל בין סוג genus ומין species לומד מאיסוף וסווג (משתמש בייצורים דמיוניים...)

1553 פייר בלון Belon קובע שדולפינים ולוויתנים הם יונקים נושמי אויר בריאות, וללא זימים. הבדל בין אדם לנשימת דגים. ספר על ביצי ציפורים. השוואה בין עצמות השלד של אנשים וציפורים. נותן שמות שוים.

1530 גירולמו פרקסטורו Girolamo Fracastoro חוקר עגבת וטובע את השם סיפיליס בשיר שפירסם. פרצלזוס מרפא ע"י כספית. מזהה טיפוס, מציע שמחלות מדבקות מועברות ע"י גופים דמויי זרעים המתרבים בגוף ויכולים להיות מועברים במגע אך גם למרחקים. מציע שעצמת המגיפה מיוחסת לשינויים בארסיות של החיידקים

1556 גיאורג באואר, הרופא הגרמני, חוקר מחלות של כורים בסקסוניה – אבן יסוד למינרלוגיה. סיפרו "על אודות מתכות" תורגם ב-1912 לאנגלית ע"י מהנדס המכרות הרברט הובר, לימים נשיא ארה"ב

1540 Valerius Cordus

אתר בשימוש לניתוח



אנדראס וסאליוס (1514-1564) Andreas Vesalius

בלגי. כותב 7 כרכים "על המרקם של גוף האדם" ספר אנטומיה מפורט ומאוייר ע"י מיטב אמני התקופה. חלוץ במחקר אנטומיה של האדם. 1543 פירסומיו סותרים את גאלן ווססאליוס שרף את כל כתביו. מצא שזרימת מחזור הדם נובעת מפעולת הלב כמשאיבה הרכיב שלד מלא של עצמות האדם שאסף מגופות. 6 טבלאות אנטומיות, הראשון שהחל לסתור את גאלן. 5 אונות לכבד, כמו לבעח"י: כמה טעויות. לב, אשכים קרובים לכליות. טעויות נוספות. עדשה במרכז העין, שריר באף, 7 קרניאלים. ומתחיל מהפיכה ברפואה אירופאית.

פלופיו 1562 Gabriel Fallopio

ממשיך דרכו של וסליוס. יש אומרים שהוא המקורי משניהם. תיאר את האוזן וכלי הדם בבסיס הגולגולת, דגדגן, חצוצרה, רצועה מפשעית, צינור הדמעות, שריר העין, עצבי המח, שחלות, רחם והצינורות המחברים ביניהם.



פרצלזוס תחילת המאה ה-16

Theophrastus Bombastus von Hohenheim,

who called himself **Philippus Aureolus Paracelsus**

אלכימאי בהשכלתו. אנטומיה של האדם. שרף את סיפרי
אבן סינא, גאלן והיפוקרטוס. ממיר רפואת גאלן (4
ההומורים) בשלש תכונות כימיות: התלקחות (גפרית),
נוזליות והשתנות (כספית), ומוצקות וקביעות (מלח).
למעשה הומורזם מחודש, אך עם הדגש על תרופה
ייעודית לכל מחלה. חקר מחלות מקצועיות לכורים.

פבריציוס Hieronymus Fabricius

ספרו "ניתוחים" מבוסס ברובו על סלזוס, פאול מאגינה Paul of Aegina ואבולקסיס
תיאור מסתמי הורידים. לידה, אנטומיה ופיזיונומיה של העובר.

קפרי 1521 Berengario da Carpi

הבחין שהכליות kidney אינן נפה, ושלפוחית השתן bladder אין פתח אחר מצינור השתן.
תאר את האפנדיקס vermiform appendix בלוטת התימוס.



אמברואז פרה 1537, 1510-1590 Ambrose Paré
1537 פארה תופר פצעים ומפתח אברים מלאכותיים –
דוגל בקטיעת אברים רק בלית ברירה.
מחדש שימוש בתחבושות לפצעי יריות רובה, ושומן לכויות.
מנתח בקע (הרניה), ומתמרן את העובר להמנע מלידת עכוז.

1541, Giambattista Canano כנאנו

מפרסם רישומי כל השרירים ויחסיותם לעצמות.

מאה 16

Caspar Stromayr or Stromayer

1500 -1561 Pierre Franco

Bartholomeo Maggi at Bologna,

Felix Wurtz of Zurich,

Léonard Botal in Paris,

the Englishman **Thomas Gale** (surgeon)

כולם מפרסמים טיפולים לפי פארה

1518 נוסד הקולז' הממלכתי של הרופאים בלונדון ובו אגודות של רפואה מתמחה

1540-1604 William Clowes

רופא מנתח צבאי.

וסאליוס 1514–1564 Andreas Vesalius
אנטומיה – מבטל "עובדות" אנטומיות שגויות של גאלן
Hippocrates => Galen => Avicenna => Vesalius



קולומבו וסרבטוס (d. 1559) Michael Servetus + Realdo Colombo
האירופאים הראשונים שמתארים את מחזור הדם דרך הריאות
עבדו באוניברסיטת פדואה, הפכו יריבים בגלל שקולומבו שגילה טעויות של סרווטוס...

1515– 1559 Realdo Colombo

1509 –1553 Miguel Servet y Reves or Michael Servetus
סרווטוס מתאר מחזור דם מהלב לריאות וחזרה.
נידון לשריפה עקב כפירה



גיום רונדלה 1555, Guillaume Rondelet

מיון דגים. משווה בין נשימה והזנת דם בריאות ובזימים. חקר דולפינים וכרישים. חשב ששלפוחית הציפה היא מעין ריאות.

יוליוס קיסר ארנטיוס 1564, Julius Caesar Arantius

טען שלמרות שמערכת הדם לעובר ולאם באה במגע בשיליה, אין מעבר דם ביניהם

קסלפינו 1583, Cesalpino

ספר על צמחים, De Plantis בו מיינם לקבוצות לפי מספר, מיקום וצורת חלקי הפרי



הרווי (1578–1657) William Harvey

מחזור הדם

Valerius Cordus (1515-1554)

פרמקולוגיה

Pierre Fauchard (1678-1761)

אבי רפואת השיניים

1545, Charles Estienne אסטיין

מפרסם איורים של עורקים, ורידים ועצבים

1550-1612 Peter Lowe פיטר לווה

מנתח ומייסד הקולג' המלכותי לרופאים ומנתחים בגלזגו

1556 – Amato Lusitano לוזיטאנו

מתאר שסתומים בעורקים ראשיים כגון עורק חוט השדרה Ázigos המשמשים כמסלול חילופי לדם המגיע ללב

1563 – Garcia de Orta גרסיה דה אורטה

מייסד רפואה טרופית, כשחיבר מסה על מחלות הודיות

1596 – Li Shizhen לי שיזן

מפרסם אוסף רשימות על חמרי רפואה – Běncǎo Gāngmù

בוטאניקה

Leonhart Fuchs 1501-1566, Otto Brunfels 1489-1534

Hieronymus Bock (Tragus) 1498-1554

שלשת אבות הבוטאניקה

מתמטיקה

ליאונרדו דה פיזה פיבונאצ'י 1175–1250 איטליה תורת המספרים
Lionardo de Pisa Fibonacci
מספרי פיבונאצ'י, ספר על מספרים ריבועיים

ראה ימי הביניים



קבליירי Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647)

אינפי - עקרון קבליירי: שני גופים שכל החתכים דרכם שוים בשטחם הם גם שוים בנפחם.
התחלת מושגים של חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי



1500–1557, Niccolò Fontana Tartaglia



ניקולו פונטנה טרטגליה (המגמגם) – מתמטיקאי, מהנדס ביצורים לעיר ונציה ומודד מפות. תרגם לאיטלקית את ספרי ארכימדס ואוקלידס, וחקר מסלולי פגזים (גלילאו אימת מימצאיו). נפצע בפניו בכיבוש ברגיה ע"י הצרפתים במלחמות הליגה הקדושה (האפיפיורות) והתקשה בדיבור.

1560 כתב ספר לחישובים ומדידות חלקות אדמה בעזרת מצפן וסרט מדידה.

נוסחת טרטגליה לפתרון משוואה מדרגה 3 – $ax^3 + bx + c = 0$ פורסמה ע"י קרדאנו

נוסחת **טרטגליה** (**Tartaglia**) לנפח טטראדרון כשנתונות צלעותיו
הרחבה לנוסחות הירון וברהמגופטה

אם בנוי על וקטורים a, b, c אזי הנפח הוא:

$$V = \frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}{6},$$

אם נתונים המרחקים בין ארבעת קדקדי הטטראדרון d_{ij}

$$V^2 = \frac{1}{288} \det \begin{bmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{volume} = \frac{\sqrt{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}}{192uvw}$$

$$a = \sqrt{xYZ}$$

$$b = \sqrt{yZX}$$

$$c = \sqrt{zXY}$$

$$d = \sqrt{xyz}$$

$$X = (w - U + v)(U + v + w)$$

$$x = (U - v + w)(v - w + U)$$

$$Y = (u - V + w)(V + w + u)$$

$$y = (V - w + u)(w - u + V)$$

$$Z = (v - W + u)(W + u + v)$$

$$z = (W - u + v)(u - v + W).$$

אם צלעות הבסיס הן uvw והמרחקים לקודקוד UVW :

נוסחת טרטגליה זו היא הרחבה של משוואת שטח המשולש של הרון

$$T = \frac{1}{4} \sqrt{(a + (b + c))(c - (a - b))(c + (a - b))(a + (b - c))}.$$

$$\begin{aligned} &= 1/4\{a^2+2ab+b^2-c^2\}\{c^2-a^2+2ab-b^2\}=1/4\{-(c^2-a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}= \\ &= 1/4\{2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4\} \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{4} \sqrt{-\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= 1/4[a^2\{b^2+c^2-a^2\}-b^2\{b^2-c^2-a^2\}+\{a^2c^2+b^2c^2-c^4\}]=1/4\{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2\}$$

(1465–1526) Scipione del Ferro

סקיפיונה דל פרו בולוניה איטליה רשם במחברתו פתרון משוואות מדרגה 3

ו-4, אך לא פירסם

חתנו שירש את משרתו באוניברסיטת בולוניה כנראה הראה את המחברת

לקרדנו בביקורו בבולוניה ב-1543



$$x^2 = (2\sqrt{a^2 - b})x^0 + 2a$$

$$x = \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

$$x^3 = (3\sqrt[3]{a^2 - b})x + 2a$$

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$$

$$x^3 = px + q$$

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

כמו שהפתרון למשוואה מדרגה שניה

הוא

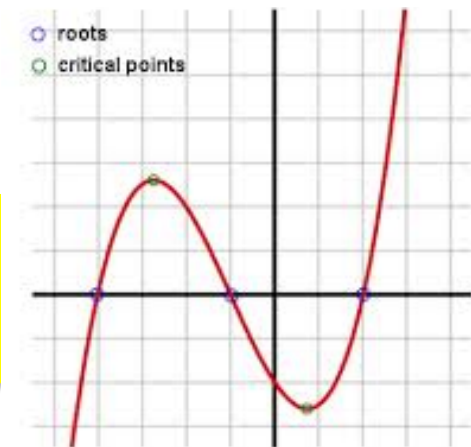
דל פרו שיער כי הפתרון למשוואה מדרגה שלישית

הוא

ולכן פתרון המשוואה

הוא

ראה ימי הביניים
ראה נספח בסוף פרק זה





וייטה פרנסואה (1579–1616) צרפת אלגברה François Viète
אלגברה (1593 נוסחת וייטה Viète's formula), שימוש ב- π
הופץ ע"י אוילר 1737. יוהן למברט 1770 מוכיח שאינו מספר רציונאל

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \dots$$

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

1591 וייטה משתמש באותיות כמשתנים ונעלמים במשוואות.
טובע את המונח מקדמים 'coefficient' ואת האות Π (פיי גדולה) כסימון
למכפילה של טור אברים

$$x^3 + px + q = 0,$$

$$x = w - \frac{p}{3w}$$

$$w^3 + q - \frac{p^3}{27w^3} = 0.$$

$$w^6 + qw^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

פתרון משוואה מדרגה שלישית
הצבת וייטה - הופכת משוואה מדרגה 3 ב-x
למשוואה מדרגה 2 ב- w^3

ראה ימי הביניים

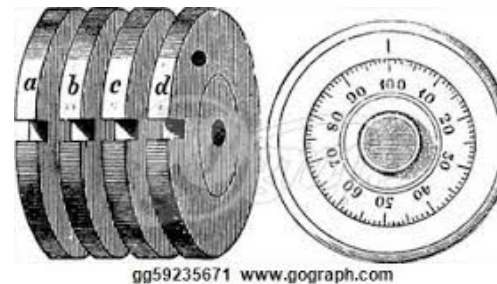
1545 ג'ירולמו קרדאנו Girolamo Gerolamo

מפרסם את שיטת טרטגליה לפתרון אלגברי למשוואות מדרגה שלישית:
"הישג הראשון באלגברה מאז הבבלים". המאמר גם מכיל את פתרון
טרטגליה ופרארי לפתרון משוואה מדרגה 4, ע"י רדוקציה לדרגה
שלישית.
$$ax^3 + bx + c = 0$$



1562 מתאר חישובי הסתברות שיטתיים, כנראה שמחסר כסף עסק
במשחקי מזל). הגדיר סיכוי למספר זוגי כיחס בין מספר הזוגיים
לסה"כ המספרים. פורסם רק ב-1663
בסיס למואבר (De Moivre) ב-1711.

המצאות מכאניות: gimbal, הבסיס לגירוסקופ
cardan shaft' combination lock



October 1565 **1540 Lodvico Ferrari** 1522-1565 **לודוביקו פרארי**
תלמידו של קרדאנו. הולדת האלגברה המודרנית





אין פתרון אלגברי כללי למשוואות מדרגה חמישית: בעיה שהמשיכה
להעסיק מתמטיקאים במאות הבאות:

Paolo Ruffini 1765–1822

רופיני – הוכיח הוכחה לא שלמה ב-1799



Niels Henrik Abel 1802 –1829

אבל – נתן הוכחה שלמה

Évariste Galois 1811-1832

גלואה –רשם הוכחה באופן בלתי תלוי המבוססת על חבורות גלואה,
ומוכיחה שאין פתרון אלגברי לפולינום כללי מדרגה 5 ומעלה



אפשר לעשות טרנספורמציה (Bring-Jerard) לפולינום הכללי מדרגה

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

חמישית:

שיקבל "צורה נורמאלית"

$$x^5 - x + 1 = 0$$

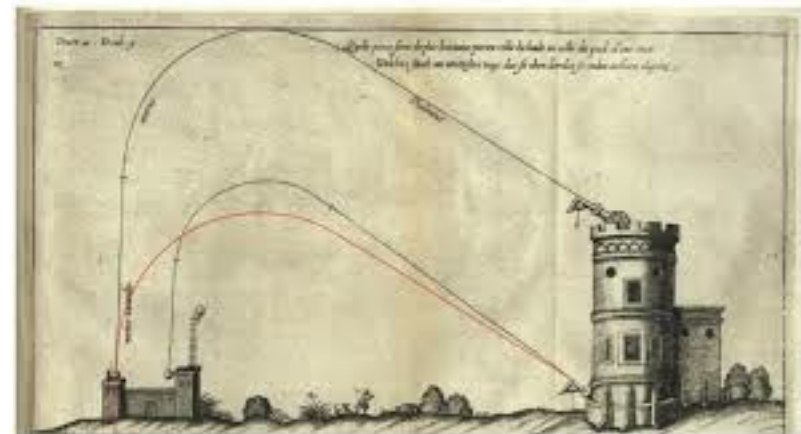
דוגמא לפולינום שיש לו פתרון אלגברי: $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$

$$(x - 1)(x - 1)(x + 1)(x + i)(x - i) = 0$$

אולי המניעים לפתרון משוואות מדרגה 2,3,4
חישוב מסלולי פגזים:

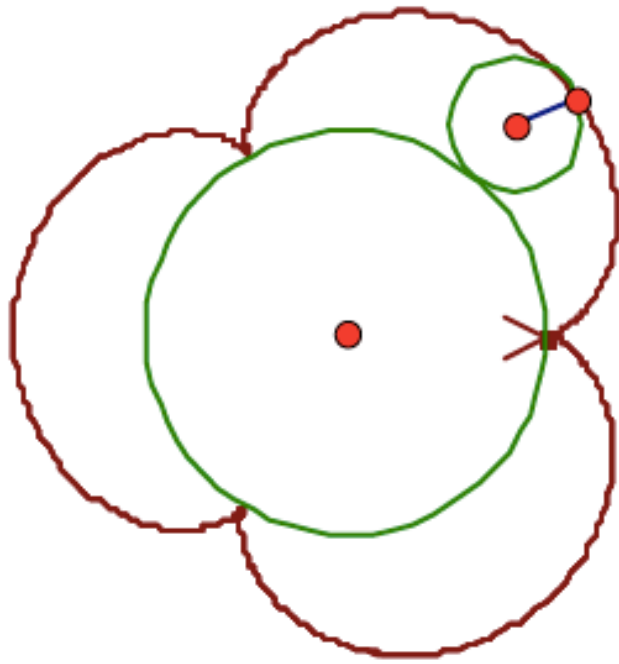
שימו לב לרישומים:

1. המסלול אינו פרבולה, מדוע? (חיכוך אוויר)
2. מקבילית הכוחות לפי כוון קנה התותח
3. תלות הטווח בזווית הקנה ובגובה התותח

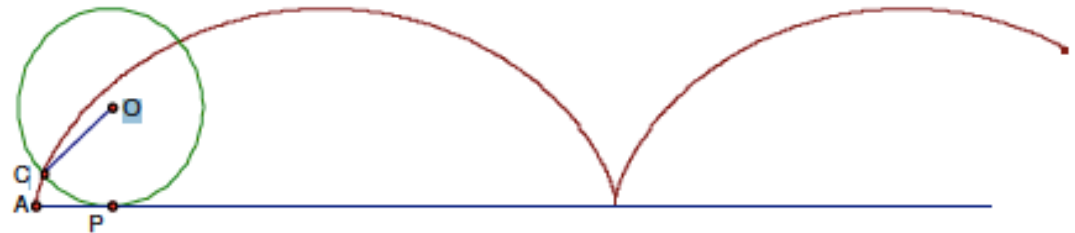


ציקלים, אפיפרציקלים והיפוציקלים:

התעניינות בגלל תנועת גרמי השמים



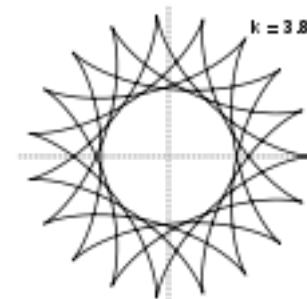
An epicycloid



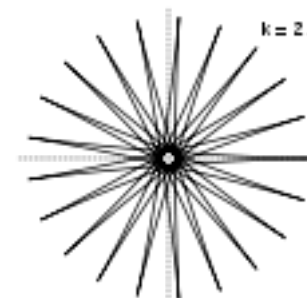
A cycloid

היפרציקלים

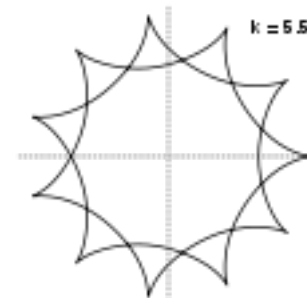
← $k=3$



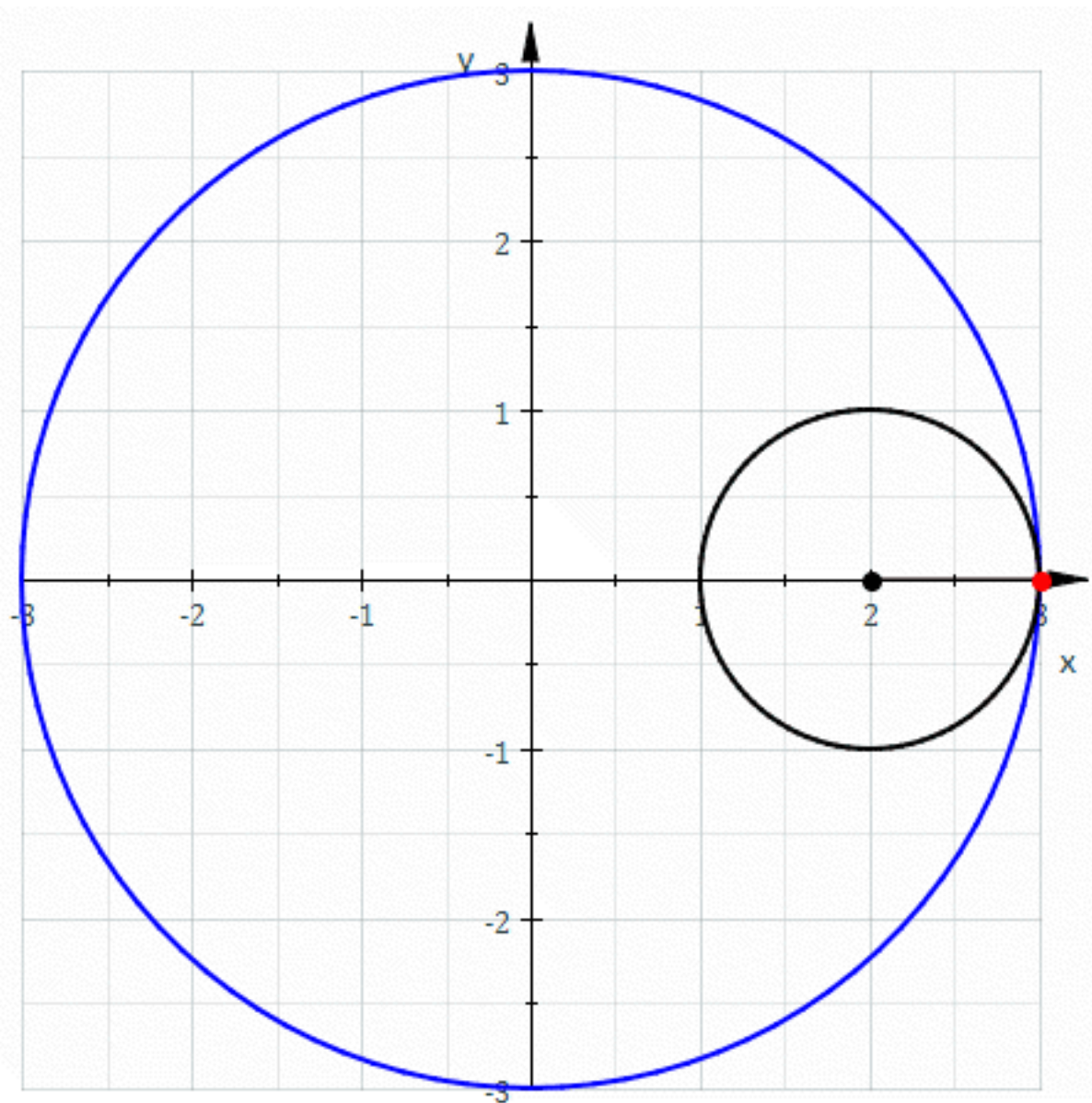
$K=3.8$



$K=2.1$

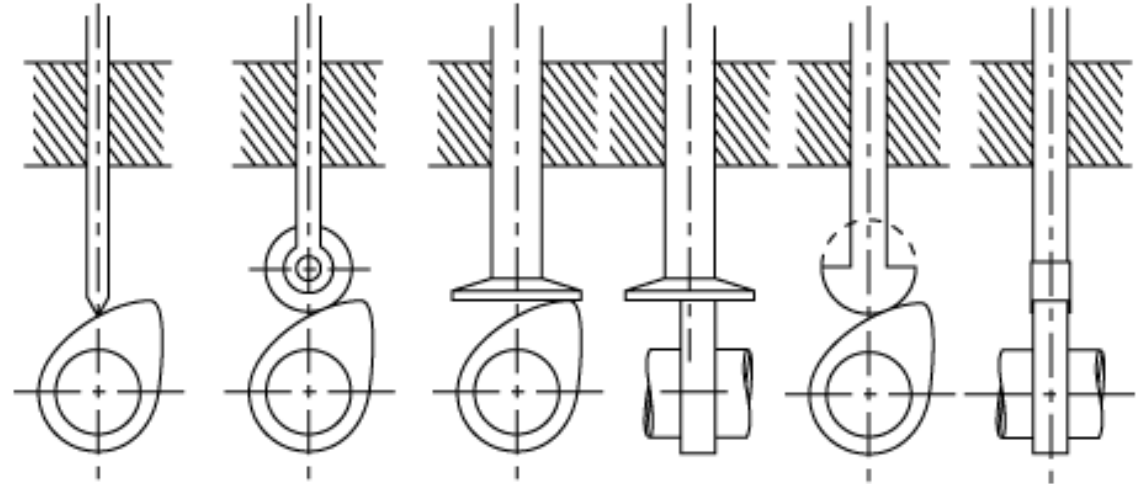


$K=5.5$



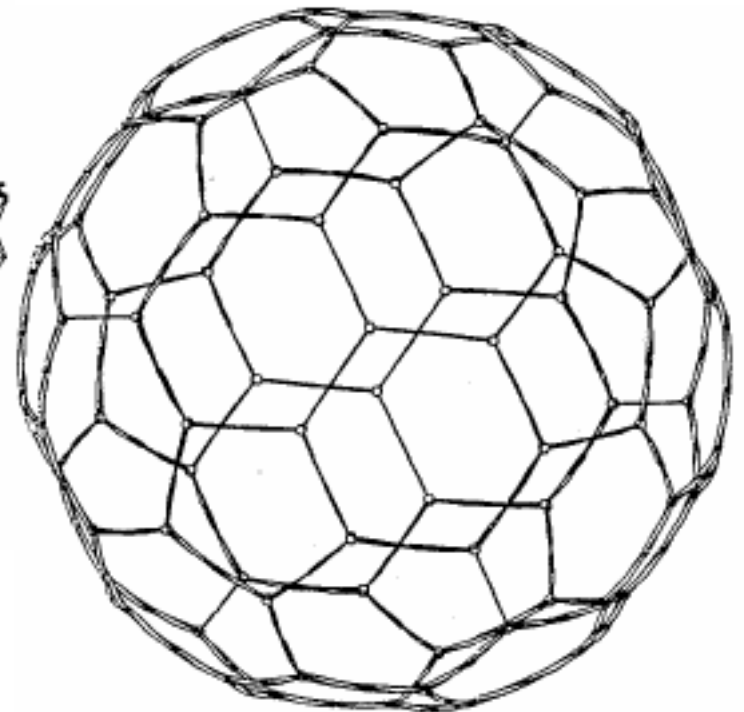
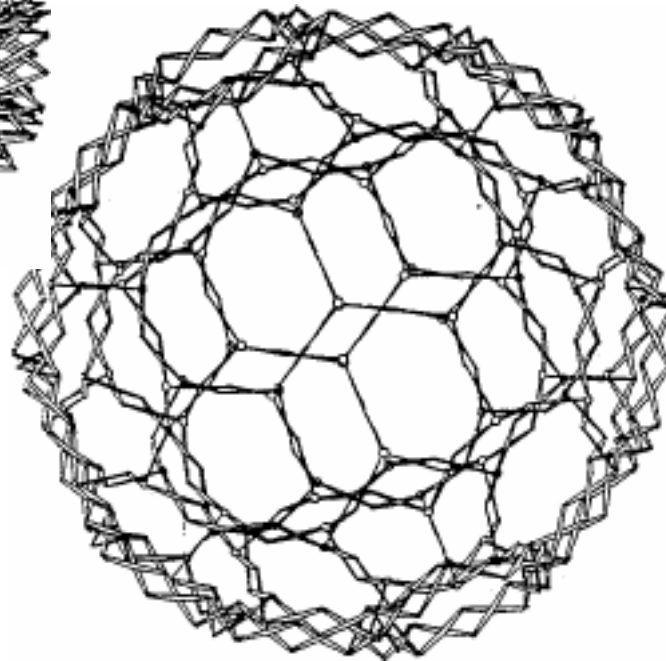
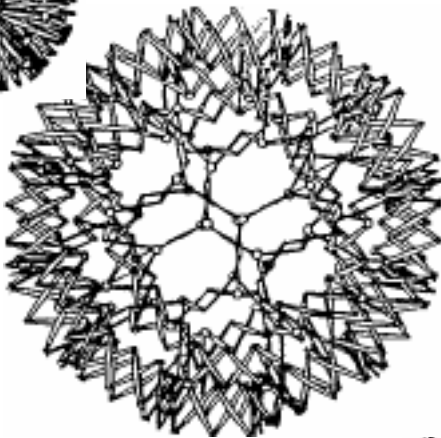
$$\begin{aligned} x(\theta) &= r(k-1)\cos\theta + r\cos((k-1)\theta) \\ y(\theta) &= r(k-1)\sin\theta - r\sin((k-1)\theta). \end{aligned}$$

היפרציקלים שימשו בצירי מכונות דפוס להעברת תנועה סיבובית לקווים

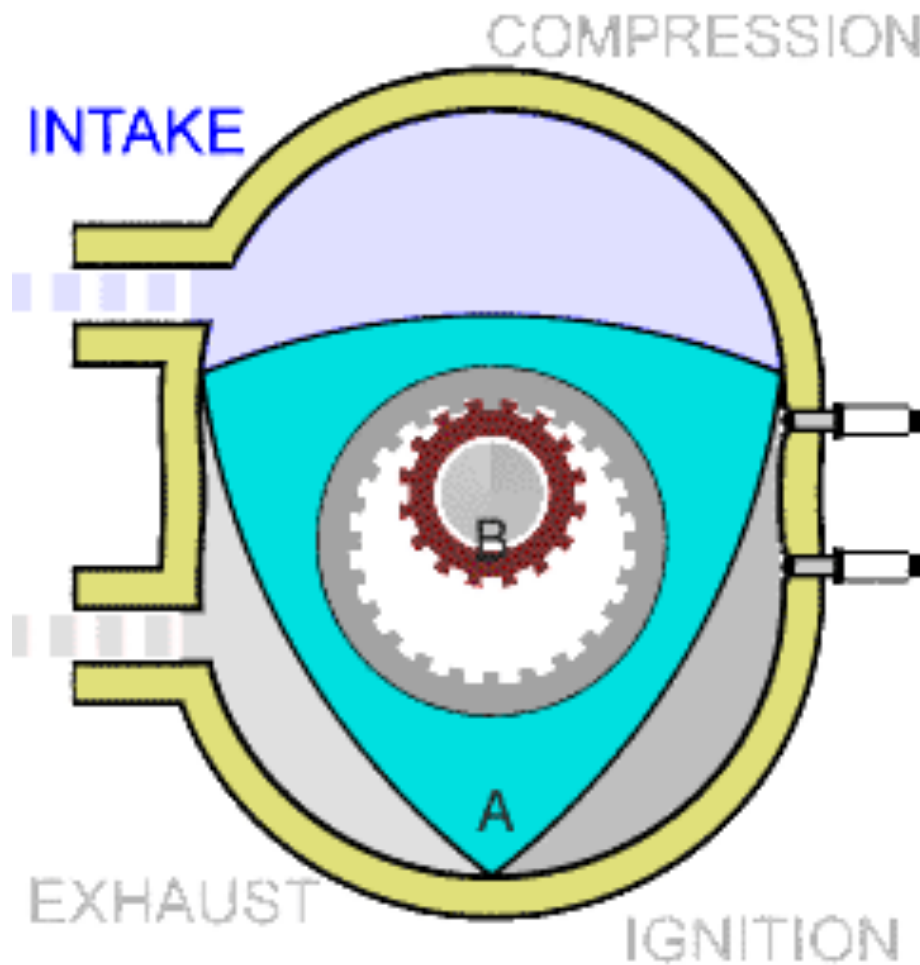


היפו-כדורים:

כדור מתקפל (חיבורים ציריים)



מנוע וונקל Wankel



בשימוש במכוניות מזדה

יתרונות:

תנועה ישירה סיבובית - ללא גל נע

שליטה אלקטרונית

חסרון:

קשה לאטום את שלשת הנפחים

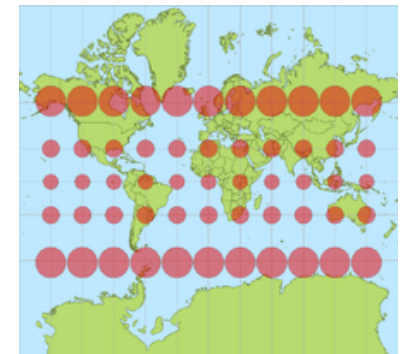
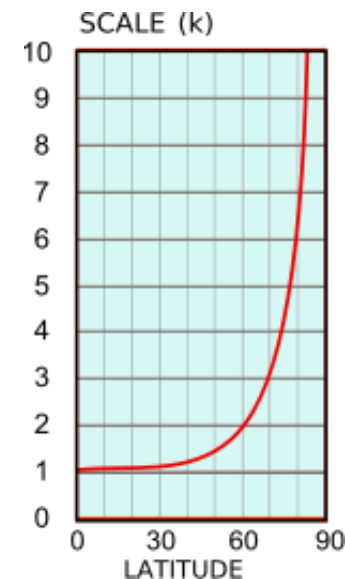
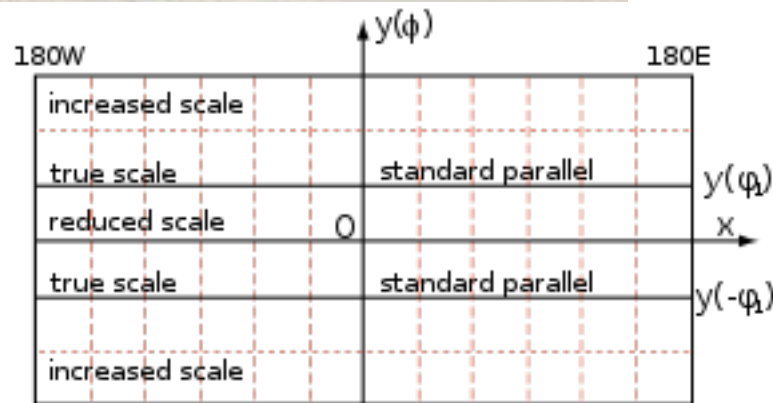
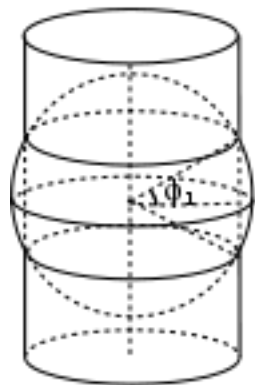
שיוצרת הבוכנה



שיטות הטלה של כדור למישור – מפות מרקטור

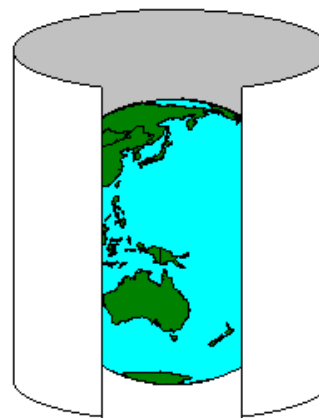
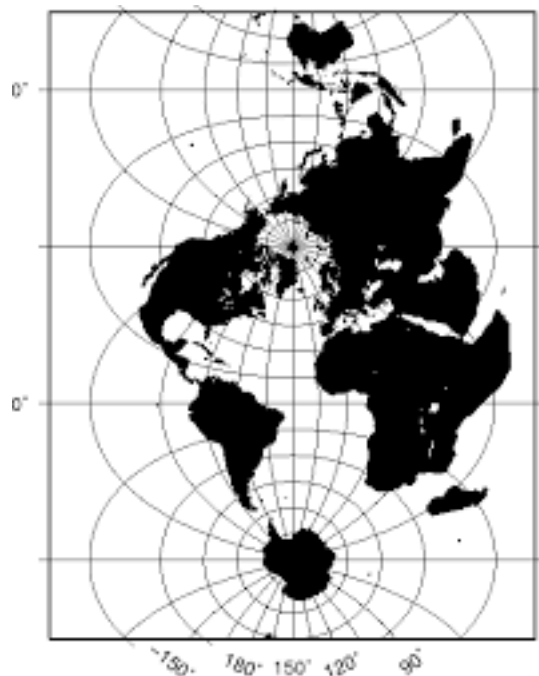
Gerardus Mercator 1569

היטל גלילי קונפורמי (שומר זווית), שהומצא על ידי הגאוגרף הפלמי, והפך לנפוץ בשרטוט מפות בקרב ימאים, מכיוון שהניווט בעזרתו נוח. ניתן למדוד אזימוט בין נקודת המוצא ליעד ולשוט במסלול קבוע לאורך אזימוט זה, למרות שהוא לא הקצר ביותר. היטל גלילי נוצר על ידי "עטיפת" כדור הארץ בגליל, השלכת כל נקודה מהכדור אל הגליל ופריסת הגליל, כך שנוצרת מפה מלבנית, שבה קווי האורך והרוחב מאונכים זה לזה אך נוצר עיוות רחבי גדול בצורה ובגודל אלמנטים שונים ככל שמתרחקים מקו המשווה, ללא עוות קו אורך. גרינלנד נראית כמעט שווה בגודלה ליבשת אפריקה, בעוד שבמציאות אפריקה גדולה ממנה פי 13 לערך.

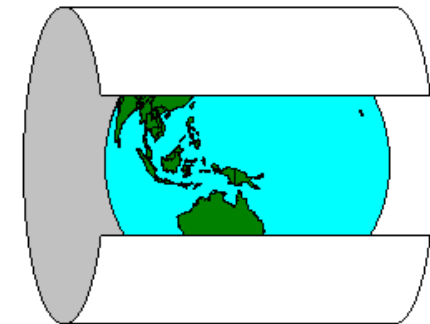


שיטות הטלה של כדור למישור – מפות מרקטור (המשך)

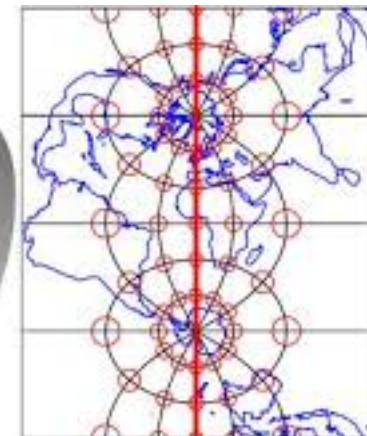
בשנת 1722 הוצג היטל מרקטור רוחבי (Transverse Mercator), הדומה להיטל מרקטור, פרט לעובדה שהגליל המשמש להשלכה מונח לרוחב כדור הארץ במקום לאורכו, כך שקו ההשקה מקביל לקו אורך במקום לקו רוחב. היטל זה טוב להצגת אזורים צרים המתפרשים לאורך קווי רוחב, כדוגמת ישראל. רשת ישראל החדשה ורשת UTM- Universal Transverse Mercator העולמית מבוססות על היטל מרקטור רוחבי עבור 60 רצועות בנות 6° כ"א בין 80° דרום ל- 84° צפון.



Mercator projection



Transverse Mercator projection



Rafael Bombelli

טיפל במספרים שליליים ומדומים הנובעים מפתרון משוואות אלגבריות
(עדין פורמליזם חסר) וכללי הכפל שלהם (כגון מינוס כפול מינוס נותן
פלוס)





נאפייר (1550–1617) John Napier of Merchiston
 היה בעל קרקעות סקוטי שבזמנו הפנוי המציא את
 הלוגריטמים והביא לשימוש בנקודה העשרונית

משחק הלוגריטם - הבסיס לסרגל החישוב

1

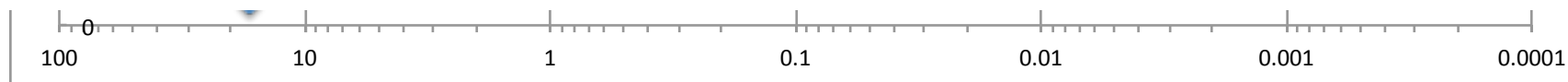
$$1 + 1 = 2 \quad \log(1) + \log(1) = \log(2)$$

1 1

6

$$2 + 3 = 6 \quad \log(2) + \log(3) = \log(6)$$

2 x 3



כימיה

המעבר מאלכימיה לכימיה

מתפתחת הבנה של יסודות מהם נוצרות תרכובות - פירוק והרכבה.
השאיפה להפוך חמרים (בעיקר מתכות) לזהב לא התממשה.

בימי הביניים התרכזו בכספית ובגפרית. מדוע? [לדעתי תרכובותיהם יצרו מגוון צבעים]

פרצלזוס 1493-1541 Paracelsus הוסיף אבץ
הבין שמינון גבוה הופך חמרים רבים לרעלים

גרגוריוס אגריקולה **Georgius Agricola** או **Georg Bauer**, 1556
מסווג מינרלים ומגדיר גיאוגרפיה פיזית.

Vannoccio Biringuccio, or Vannocio Biringuccio 1480 –1539
כתב ספר על עיבוד מתכות. בידוד אבץ, אנטימון Sb שהופרד מארסן.
מתרחב בקירור- לכן שימושו ליציקת פלטות דפוס.

I.A																	VIII.A	
1	H 1																He 2	
2	Li 3	Be 4											B 5	C 6	N 7	O 8	F 9	Ne 10
3	Na 11	Mg 12											Al 13	Si 14	P 15	S 16	Cl 17	Ar 18
4	K 19	Ca 20	Sc 21	Ti 22	V 23	Cr 24	Mn 25	Fe 26	Co 27	Ni 28	Cu 29	Zn 30	Ga 31	Ge 32	As 33	Se 34	Br 35	Kr 36
5	Rb 37	Sr 38	Y 39	Zr 40	Nb 41	Mo 42	Tc 43	Ru 44	Rh 45	Pd 46	Ag 47	Cd 48	In 49	Sn 50	Sb 51	Te 52	I 53	Xe 54
6	Cs 55	Ba 56	La 57	Hf 72	Ta 73	W 74	Re 75	Os 76	Ir 77	Pt 78	Au 79	Hg 80	Tl 81	Pb 82	Bi 83	Po 84	At 85	Rn 86
7	Fr 87	Ra 88	Ac 89	Rf 104	Db 105	Sg 106	Bh 107	Hs 108	Mt 109	Uun 110	Uuu 111	Uub 112	Uut 113	Uuq 114	Uup 115	Uuh 116	Uus 117	Uuo 118

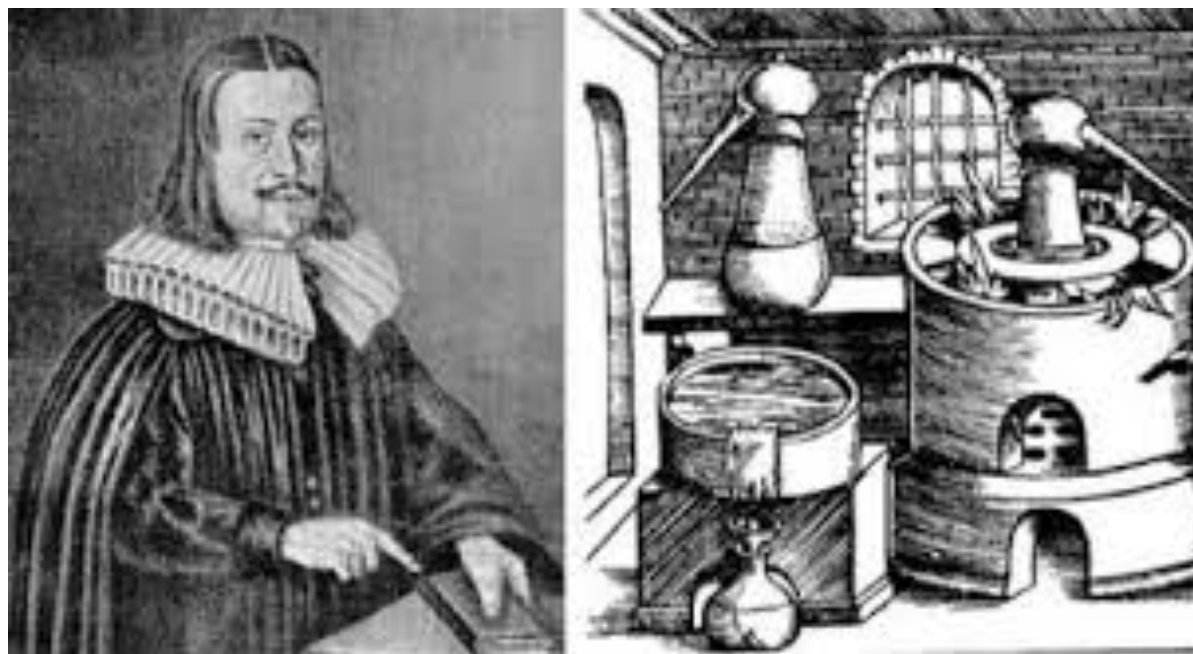
6	Ce 58	Pr 59	Nd 60	Pm 61	Sm 62	Eu 63	Gd 64	Tb 65	Dy 66	Ho 67	Er 68	Tm 69	Yb 70	Lu 71
7	Th 90	Pa 91	U 92	Np 93	Pu 94	Am 95	Cm 96	Bk 97	Cf 98	Es 99	Fm 100	Md 101	No 102	Lr 103



ואקום

Andreas Libavius 1560-1616

מחבר ספר כימיה פרקטי "אלכימיה", למעשה הראשון בנוסח פרוטוקול מעבדה ענייני, בניגוד לגיבובי התיאורים הסתומים של פרסלוס, ומיועד למיצוי חמרים מתרבות, לצרכי מטלורגיה, רפואה וחיי יומיום.



נספח: רשימת מדעני הרנסאנס

אדום: הודו
שחור: אירופה

Leonardo 1486 – 1513

Widmann, Johannes 1460 -1498 German mathematician, introduced + and -

Ferro **Scipione del Ferro** 1465 -1526 Italian mathematician first solved $x^3+px=q$

Werner

Maior

La Roche

Dürer 1471–1528 German painter

Copernicus 1543

Tunstall Cuthbert 1474 –1559 Bishop of London ???

Ortega

Lax

Stifel

Ries

Maurolico

Fine

Rudolff

gglia (1500, Brescia –1557, Venice)

Jyesthadeva 1500 –1575 Indian math and astronomer

Cardan **Gerolamo Cardano** 1501 –1576 probability algebra cardan joint

Nunez

Gemma Frisius 1508 –1555 Dutch maps and navigation instruments. Teacher of Mercator

Recorde Robert 1512–1558 Welsh invented the = sign used preinvented + sign

Gerardus Mercator 1512-1594 Belgium cartographer



Rheticus Georg Joachim 1514-1574 trig tables, Copernicus' student,
published his *"Revolutions of the Heavenly Spheres"*

Ferarri

Bombelli Rafael 1526-1572 algebra

Benedetti Giovanni Battista 1585 mechanics

Porta **Giambattista della עפיפונים**

Danti Aligiery

Barocius

Calvius

Van Ceulen

Viète Franciscus 1540-1603 French math

Monte

Brahe Tycho 1546-1601

Digges Thomas

Cataldi

Steén

Savile

Lavanha

Napier John 1550 –1617 Scottish merchant – log tables

Bürgi

Valerio

Ricci Mateo

Harriot Thoma English astronomer

Fincke

Lansberge

Pitiscus

Roomen

Briggs

Galileo

Kepler

Oughtred

Guldin Paul 1577-1643 Swiss math [in 17-cent]

Faulhaber

Hérigone

Snell (Willebrord van Roijen Snellius) 1580–1626 Dutch astronomer

Bachet

Gunter

Jean-Baptiste Morin 1583– 1656 French math Opposed Galileo

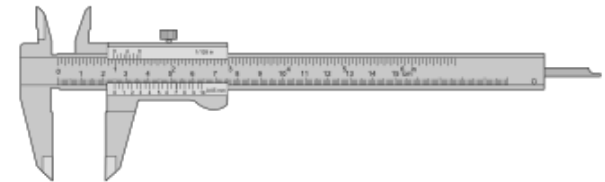
Vernier Pierre 1580-1637 French math

Saint-Vincent Gregoire de 1584–1667 Jesuit mathematician

Mydorge Claude 1585 – 1647 French geometry & physics

Turner Joseph Mallord William 1775–1851 English painter ???

Jungius Joachim 1587 –1657 German math Logics



Gassendi Pierre 1592 –1655 French astronomer (transit of Mercury over the sun) speed of sound indep. On pitch
Mersenne Marine 1588 –1648 French father of acoustics: freq. of stretched string= $f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$,
Christopher Clavius 1538 –1612 astronomer
Giovanni Battista Riccioli 1598-1671 Italian astronomy

נספח

פתרון משוואות מדרגה 3 ו-4

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2.$$

$$x_1 = -\frac{b}{3a}$$

$$-\frac{1}{3a} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2b^3 - 9abc + 27a^2d + \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \right]}$$

$$-\frac{1}{3a} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2b^3 - 9abc + 27a^2d - \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \right]}$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a}$$

$$+ \frac{1 + i\sqrt{3}}{6a} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2b^3 - 9abc + 27a^2d + \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \right]}$$

$$+ \frac{1 - i\sqrt{3}}{6a} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2b^3 - 9abc + 27a^2d - \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \right]}$$

$$x_3 = -\frac{b}{3a}$$

$$+ \frac{1 - i\sqrt{3}}{6a} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2b^3 - 9abc + 27a^2d + \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \right]}$$

$$+ \frac{1 + i\sqrt{3}}{6a} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2b^3 - 9abc + 27a^2d - \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \right]}$$

פתרון משוואה מדרגה שלישית

$\Delta < 0$: שלשה פתרונות ממשיים שונים

$\Delta = 0$: פתרונות ממשיים כפולים

$\Delta > 0$: פתרון אחד ממשי ושני מדומים

שיטת Tartaglia-Cardano לפתרון משוואה מדרגה שלישית

הפתרון מיוחס לדל פרו וטרטגליה – Scipione del Ferro and Tartaglia

פורסם ע"י קרדאנו Gerolamo Cardano ב-1545

הצבת $x = t - b/3a$ במשוואה הכללית מדרגה 3 (1) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$t^3 + pt + q = 0. \quad (2)$$

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

$$u + v = t$$

נציב ב- (2)

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \quad (3)$$

$$3uv + p = 0$$

קרדאנו מטיל תנאי על u, v :

$$u^3 + v^3 = -q \quad u^3 v^3 = -p^3/27$$

לכן

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

אז u^3 ו- v^3 הם השרשים של המשוואה הריבועית

$$(z - u^3)(z - v^3) = 0 \quad \text{או}$$

$$(u^3 + v^3) = q \quad \text{ומכפלתם} \quad (u^3 v^3) = -p^3/27$$

ולכן

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

מאחר וקרדאנו לא הכיר מספרים מדומים הוא הניח שהפתרונות ממשיים

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0.$$

$$t_1 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x^3 + px + q = 0, \quad \text{הצבת וייטה (Vieta)}$$

$$x = w - \frac{p}{3w} \quad \text{נציב}$$

$$w^3 + q - \frac{p^3}{27w^3} = 0. \quad \text{נכפיל ב-} w^3$$

$$w^6 + qw^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad \text{קיבלנו משוואה מסדר שני ב-} w^3$$

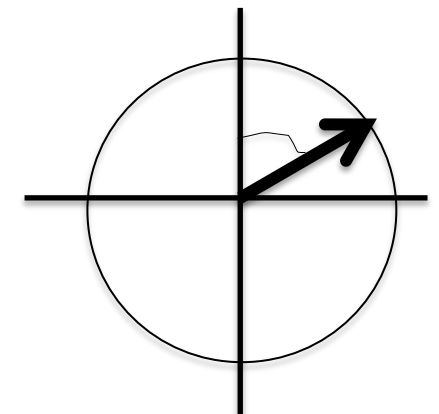
$$W^3 = -q \pm \sqrt{q^2 - 4p^3/27}$$

אם w_1, w_2, w_3 הם השרשים הקוביים של הפתרונות ל- w^3

$$[R \cdot \exp(i\theta)]^3 = R^3 \cdot \exp(3i\theta)$$

$$x_1 = w_1 - \frac{p}{3w_1}, \quad x_2 = w_2 - \frac{p}{3w_2} \quad \text{and} \quad x_3 = w_3 - \frac{p}{3w_3}.$$

$$\sqrt[3]{8^3} = \begin{cases} 8 \\ -4 + 4\sqrt{3}i \\ -4 - 4\sqrt{3}i. \end{cases} \quad \sqrt[3]{-27i} = \begin{cases} 3i \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i. \end{cases}$$



Let:

$$p_1 = 2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace$$

$$p_2 = p_1 + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + p_1^2}$$

$$p_3 = \frac{c^2 - 3bd + 12ae}{3a\sqrt[3]{\frac{p_2}{2}}} + \frac{\sqrt[3]{\frac{p_2}{2}}}{3a}$$

$$p_4 = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a} + p_3}$$

$$p_5 = \frac{b^2}{2a^2} - \frac{4c}{3a} - p_3$$

$$p_6 = \frac{-\frac{b^3}{a^3} + \frac{4bc}{a^2} - \frac{8d}{a}}{4p_4}$$

Then:

$$x = -\frac{b}{4a} - \frac{p_4}{2} - \frac{\sqrt{p_5 - p_6}}{2}$$

$$\text{or } x = -\frac{b}{4a} - \frac{p_4}{2} + \frac{\sqrt{p_5 - p_6}}{2}$$

$$\text{or } x = -\frac{b}{4a} + \frac{p_4}{2} - \frac{\sqrt{p_5 + p_6}}{2}$$

$$\text{or } x = -\frac{b}{4a} + \frac{p_4}{2} + \frac{\sqrt{p_5 + p_6}}{2}$$

פתרון משוואות מדרגה 4

Ludovico Ferrari 1540

פורסם יחד עם פתרון דרגה 3 ע"י מורו

Gerolamo Cardano 1545

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

פתרון משוואות מדרגה 4
 $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0$

$$x = y - \beta/4\alpha$$

$$y^4 + Ay^2 + By + C = 0$$

$$A = \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{3\beta^2}{8\alpha^2},$$

$$B = \frac{\delta}{\alpha} - \frac{\beta\gamma}{2\alpha^2} + \frac{\beta}{8\alpha},$$

$$C = \frac{\varepsilon}{\alpha} - \frac{\beta\delta}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2\gamma}{16\alpha^3} - \frac{3\beta^4}{256\alpha^4}.$$

Add and subtract
 $2sy^2 + s^2$

$$(y^2+s)^2 - [(2s-A)y^2 - By + s^2 - C] = 0$$

Then we factor the quadratic polynomial

$$(2s - A)y^2 - By + s^2 - C = (2s - A)(y - y_+)(y - y_-)$$

and make $y_+ = y_-$, which will impose a constraint on s (equation (4)). We will get:

$$\left(y^2 + s + \sqrt{2s - A}y - \frac{B}{2\sqrt{2s - A}} \right) \left(y^2 + s + \sqrt{2s - A}y + \frac{B}{2\sqrt{2s - A}} \right) = 0,$$

where s satisfies the *resolvent cubic equation*

$$8s^3 - 4As^2 - 8Cs + (4Ac - B^2) = 0.$$

The four solutions of (2) are the solutions of (3):

$$y_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s - A} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s - A + \frac{2B}{\sqrt{2s - A}}},$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s - A} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s - A + \frac{2B}{\sqrt{2s - A}}},$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s - A} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s - A - \frac{2B}{\sqrt{2s - A}}},$$

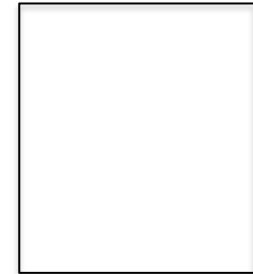
$$y_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s - A} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s - A - \frac{2B}{\sqrt{2s - A}}}.$$

Thus, the original equation (1) has the solutions

$$x_k = y_k - \frac{\beta}{4\alpha}. \quad k = 1, 2, 3, 4$$

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

`,./;'\[]\$ 1234567890-=
~<>?:”|{}± !@#\$%^&*()_+



ΑΒΧΔΕΦΓΗΘΚΛΜΝΟΠΘΡΣΤΥΖΩΞΨΖ

,./;’ ∴.[]♣ 1234567890-=
~<>?:”|{}± !≅#∃%⊥&*() +

Symbol

Åſçð´f©·^Δ°¬μ~øπœ®β†¨√Σ≈¥Ω
`≤≥÷...æ«““§ i™£¢∞§¶•ªº—≠
`˘˚¿ÚÆ»””±/€‹›fi fl ‡°·,—±

Alt