

הרומנטית

מתמטיקה

נאסף ונערך בעברית ע"י פרופ' צבי קם

המאה ה-19 נקראת המאה הרומנטית, בגלל האסכולות הרומנטיות במוזיקה, בספרות ובאמנות, שיצאה נגד הנאורות הרציונאלית של המאה ה-18: אינדיבידואליזם ומסורות עממיות לאומיות מול אוניברסאליות של האנושיות ורוח האדם; הקשר לטבע מול העליונות של הלוגיקה של האדם.

בספרות: באנגליה- ביירון Lord Byron ושלי Percy Bysshe Shelley, בגרמניה- גתה Johann Wolfgang von Goethe שילר Johann Christoph Friedrich von Schiller וקאנט Immanuel Kant בצרפת- רוסו Jean-Jacques Rousseau, דומא (הגיבן מנוטרדם) Alexandre Dumas, הוגו (עלובי החיים) Victor Hugo ברוסיה- פושקין Alexander Pushkin בפולין- מיצקביץ' (פן טדאוש) Adam Mickiewicz בארה"ב- קופר (המוהיקני האחרון) James Fenimore Cooper, מלוויל (מובי דיק) Herman Melville.

במוזיקה: גרמניה: שומן, מנדלסון, ברהמס, ואגנר, הונגריה: ליסט, צ'יה: דבו'אק, סמטנה, פולניה: שופן, ויניאבסקי, פינלנד: סיבליוס, צרפת: ברליוז, אופנבך, סיפורי הופמן, מאירבר, הלוי (היהודיה), מאסנה, לאלו, ראוול, איטליה: בליני, דוניצטי, רוסיני, פוצ'יני, ורדי, פגניני רוסיה: מוסורגסקי ארה"ב: גרשווין

בציור: אנגליה: טרנר, קונסטבל,
צרפת: דלקרואה,
ספרד: גויה.

כלכלה

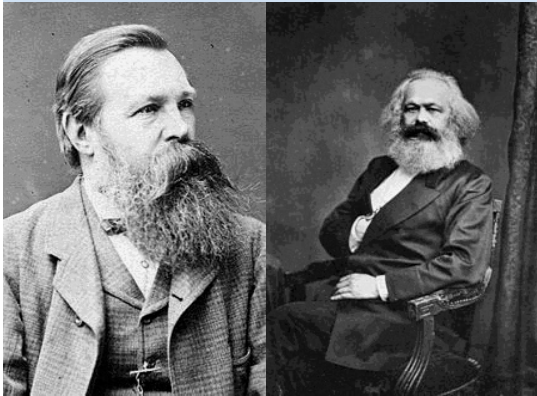
1589 **ויליאם לי** האנגלי ממציא מכונת תפירה לגרביים.

תעשית בדי טכסטיל פורחת במאה ה-16, אך תפירת בגדים נעשתה ביד.

1846 האמריקני אליאס האו בונה מכונת תפירה רב תכליתית. תעשית בגדים.

1848 פירסום המניפסט הקומוניסטי ע"י קרל מרקס ופרדריק אנגלס הגרמנים, המתאר מאבק מעמדות ומנבא שהקפיטליזם יוחלף בקומוניזם.

Friedrich Engels 1820–1895 Karl Marx 1818–1883



אך דווקא במדעים המאה הרומנטית היתה מאד פרקטית, וביססה את כל התשתיות למדע המודרני.

במתמטיקה חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, לוגריתמים.

תורת הפונקציות, המוגדרות מעל מרחבים אוקלידיים, איפשרה פיתוח התחום של משוואות דיפרנציאליות: הבסיס הכמותי לפיזיקה.

אלגברה של מטריצות איפשרה פורמאליזמים לטרנספורמציות במרחב (העתקה, סיבוב, עוות) שפתחו את השער ליחסיות של איינשטיין.

אסטרונומיה – מעבר למערכת השמש, ומדעי כדור הארץ וגיאולוגיה.

בפיזיקה אלקטרומגנטיות, האטום, אינטראקציה בין קרינה וחומר, מכאניקה של מוצקים נוזלים (הידרודינאמיקה) וגאזים, ואקום,

התבססה המכאניקה הקלאסית והניסוח המתמטי שלה (המילטוניאן), וייושמה לבעיות כמו תנודות מיתר, ובעיקר לאלקטרומגנטיות ותורת הגלים. איפשר הרחבה לתורה הקוונטית.

טרמודינאמיקה – חום, אנרגיה מכאנית, אנטרופיה, חוקי שימור, מכונת קרנו, אפס מוחלט. פיזיקה של גאזים ונוזלים וביסוס תיאורטי של הטרמודינאמיקה ילדה את מנוע הקיטור ואיתו המהפכה התעשיתית.

בכימיה זיהוי האלמנטים, כימיה אורגאנית.

הועשרה רשימת היסודות, ולימוד התכונות שלהם מביא לטבלה המחזורית של מנדל.

ובביולוגיה ורפואה – ביולוגיה תאית והתפתחותית, אבולוציה,

לראשונה יש קשר מדעי לבריאות ומחלות. ההתפתחות העיקרית היא בתורת התא, בהתפתחות העוברית ובגנטיקה תיאורית שפתחה את הדרך לגנטיקה המולקולארית במאה ה-20.

מתמטיקה

<http://www.storyofmathematics.com/19th.html>

המאה ה-19 במתמטיקה

בצרפת–בעיקר תחת נפוליון– מתמטיקה בשירות ההנדסה
מתבלטים שלשת הלמדים **Lagrange, Laplace and Legendre** וכן **Galois**–**Fourier**
הגדרות פורמאליות לפונקציות הובילו לתרומה האולטימטיבית של דיריקלה לרציפות
פונקציה **Peter Dirichlet** במאה ה-20 .
מספרים קומפלקסיים שהוגדרו ע"י אוילר החלו בשימוש נרחב בעיקר בתורת הפונקציות
1820 גלואה **Évariste Galoi** הראה בעזרת חבורות פרמוטציה שאין פתרון כללי למשוואה
מדרגה-5, קושי **Augustin-Louis Cauchy** ויקובי **Carl Jacobi** תרמו לפונקציות ומטריצות.
בהמשך לרימן על שכיחות מספרים ראשוניים: **Jacques Hadamard, Charles de la Valle Poussin**
פואנקרה **Henri Poincar** נתן פתרון חלקי לבעית שלשה גופים.

בגרמניה, תחת השפעת הומבולד **Wilhelm von Humboldt** דגש על מתמטיקה טהורה, ששיאה
בגאוס **Carl Friedrich Gauss** ואסכולת גוטינגן. גאוס חקר מרחבים לא אוקלידים, אך לא פירסם
את עבודתו, שנחקרה לבסוף ע"י לובצ'בסקי ובוליאני **Janos Bolyai & Nikolai Lobachevsky** וע"י
רימן (גיאומטריה אליפטית ומרחבים רב ממדיים). **בולצאנו ווירשטרס** יצרו בסיס לאלגברה
ולפונקציות, **מוביוס וקליין** לטופולוגיה **קנטור ודדקינד** לתורת הקבוצות האינסופיות
מינקובסקי טיפל במרחבי מקום–זמן פרג' **Gottlob Frege** ב-1897 יצר פריצת דרך בלוגיקה,
שנתנה בסיס לעבודות הילברט, בולצאנו וברטרנד ראסל **Bertrand Russell**

פיקוק George Peacock החל באלגברה אבסטרקטית (לא של מספרים) **בול George Boole** פיתח את האלגברה הבוליאנית. **המילטון** חקר קוורטניונים – 4 וקטור, ווקטור תלת ממדי וסיבובו שיצר חבורות לא קומוטטיביות. **קיילי Arthur Cayley** נחשב לפורה ביותר בין המתמטיקאים: תורת החבורות, אלגברה של מטריצות, סינגולאריות, ואינוואריאנטים וון **John Venn** חקר אלגברה בוליאנית

בנורווגיה: חבורות אבל ולי **Niels Henrik Abel & Marius Sophus** הביסוס הלוגי לתורת הפונקציות נקשר לפיזיקה: מהשאיפה להגדיר פונקציות חלקות ורציפות פותחו משפטים שבעצם אמרו שאלה פונקציות לא מעניינות: אם יודעים אותן באזור במרחב, קטן ככל הניתן, יודעים אותן בכל המרחב. מתוך ערכן על מסלול סגור (בשני ממדים או משטח סגור בשלושה) ניתן לחשב את ערכן בכל נקודה בתוך התחום שהמסלול סוגר. אך לצורך פיתוח האלקטרומגנטיות נדרשו פונקציות לא נחמדות: כאלה שיש להם סינגולאריות בגלל מטענים חשמליים (שלמשל הכח שהם מפעילים יורד כמו r^{-2} ולכן הוא אינסופי על המטען). תורת הפונקציות לכן לא רק התרחבה בהגדרותיה לפונקציות עם סינגולאריות, אלא שרתה את הפיזיקה לתיאור תיאורטי של תורת השדות האלקטרומגנטיים, וגם לתיאור חדש (המילטוניאני) של המכאניקה הקלאסית. תיאוריות אלה הקלו על היישום למכניקה הקוונטית.

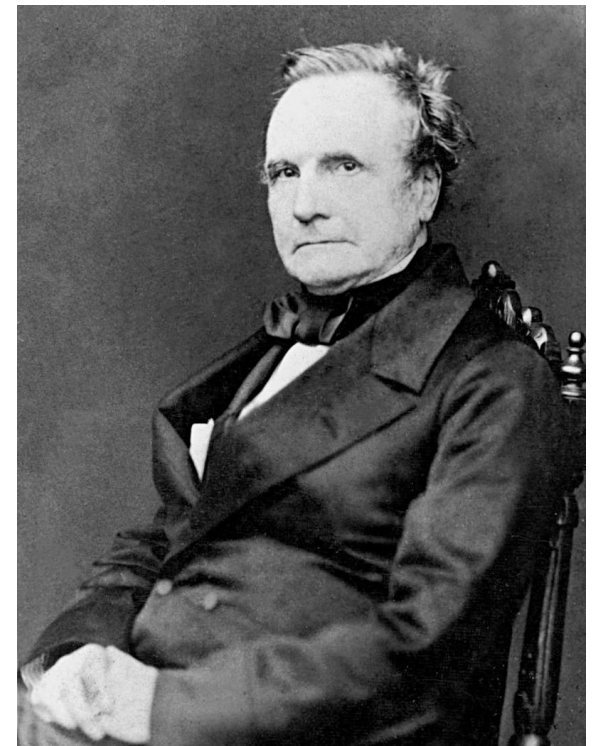
גם התפתחות שדות וקטוריים ותורת המטריצות יצרה את התשתית לא רק לשימושים של התמרת קואורדינטות במרחב, אלא גם לאנליזה של אופרטורים הן במרחבים עם ממדיות סופית, והן בממדיות רציפה-אינסופית. באמצעות אופרטורים נוסחה המכאניקה הקלאסית, אך יותר חשוב – איפשרה את הניסוח של מכאניקת הקוונטים.

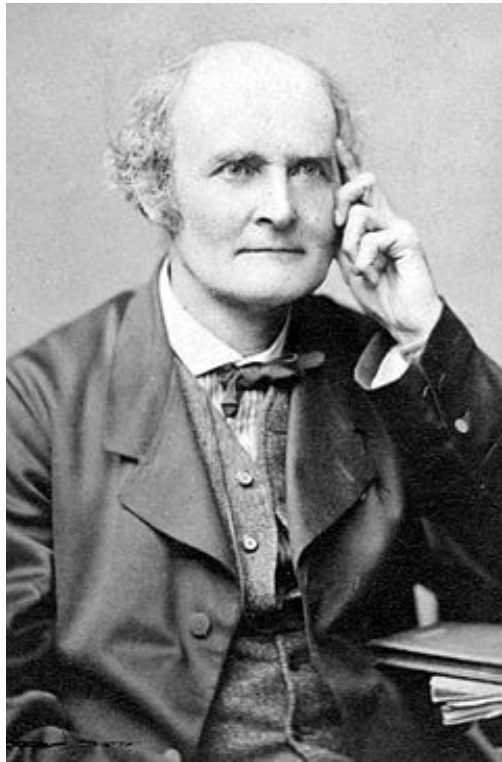
מעניין שגם תורת החבורות מצאה שימוש חזק בפיזיקה - בקשר בין סימטריה לחוקי שימור, ובניבוי חלקיקים אלמנטאריים בגלל סימטריה של מספרים קוונטיים.

ולבסוף - נבטה התחלת התשתיות הלוגיות למכונות חישוב ומחשבים.

אנגליה 1791-1871 Charles Babbage, FRS

באנגליה בבז' **Charles Babbage** הוגה ומתכנן מחשב מכאני. (פסקל ולייבניץ היו הוגי המחשב הראשונים). הוא מחלק אותו למעבד מרכזי, CPU, זכרון ותכנה שנקראה מכרטיס מנוקב וקבעה את סדר הפעולות. **Augusta Ada Byron** בתו של לורד ביירון שהיתה תלמידתו, תירגמה ב-1843 ספר של מהנדס איטלקי **Luigi Menabrea** על "מכונה אנליטית" והוסיפה הערות שהיו בעצם תוכנת מחשב ולא רק עיבוד מספרים. התכנון מעולם לא הוצא לפועל, אך היה בסיס לוגיסטי למחשבים שניבנו אח"כ.





Arthur Cayley, 1821-1895 אנגליה

1858 מגדיר מטריצות, ומרחיב התמרות ליניאריות. נוסחא להיפוך מטריצה בעזרת הדטרמיננט.

Cayley's theorem

"כל חבורה G איזומורפית לתת-חבורה של החבורה הסימטריה של G "

Cayley–Hamilton theorem:

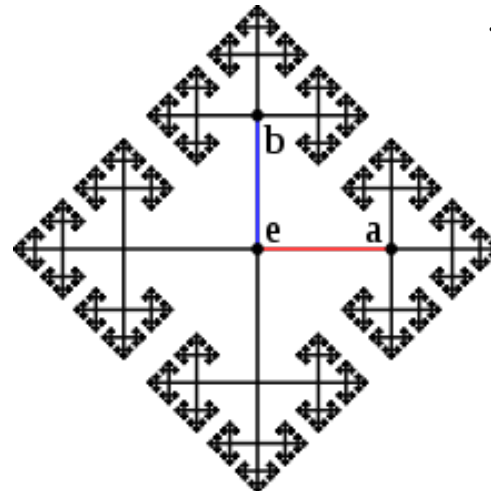
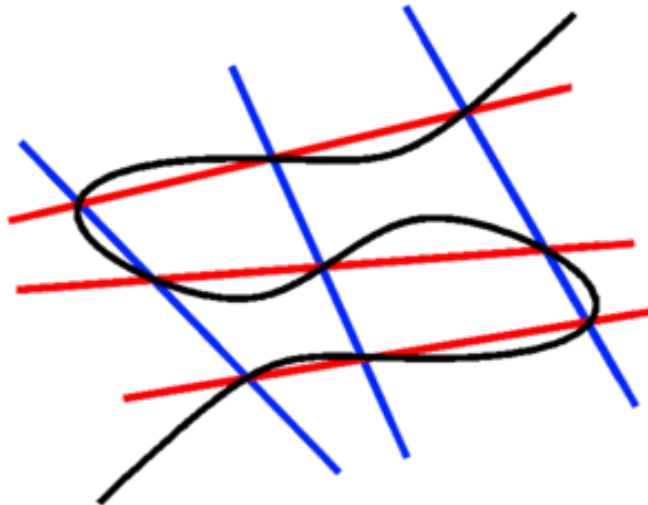
אם A היא מטריצה במימדים $n \times n$ ו- I_n היא מטריצת היחידה אז הפולינום האופייני של A מדרגה n ב- λ מוגדר ע"י

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A),$$

אם מציבים A במקום λ בפולינום מקבלים מטריצת אפס: $p(A) = 0$.
פתרונותיה-הערכים העצמיים של המטריצה: EigenValues

Cayley–Bacharach theorem

היטלים דו ממדים של שתי פונקציות מדרגה שלישית (קוביות) נפגשים כללית ב-9 נקודות. כל פונקציה אחרת מדרגה שלישית שעוברת ב-8 מהנקודות עוברת גם דרך הנקודה התשיעית.



Cayley graph

גרף המתאר מבנה חבורה -
כאן חבורה הנוצרת ע"י שני
אברים

Cayley's formula

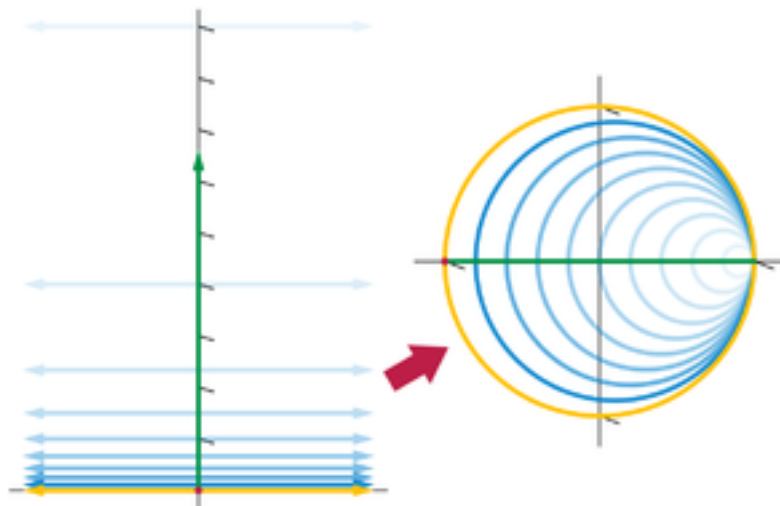
לכל מספר שלם n מספר הגרפים עם n קדקדים מסומנים הוא n^{n-2}

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{n1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{nn}} \end{vmatrix}.$$

Cayley's Ω process

Cayley transform

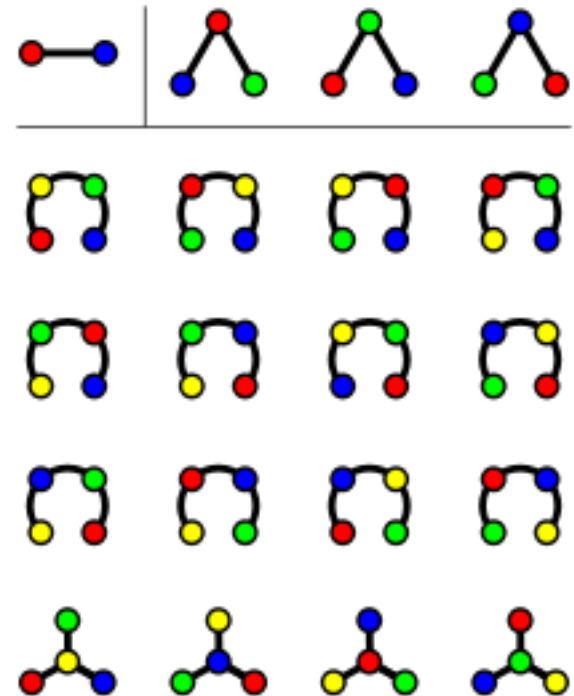
מיפוי בין מטריצות סימטריות-אלכסונית
ומטריצות אורטוגונליות: מתמיר חצי מישור
עליון קומפלקסי למעגל יחידה



לדוגמא: כל הגרפים עם 2,3,4
קדקדים המסומנים בצבעים.

גרף אחד $n=2$ שלשה גרפים $n=3$

16 גרפים $n=4$



הערכים והוקטורים העצמיים של מטריצה (ע"ע ו"ע) EigenValues and EigenVectors

תחילתה של תורת המטריצות מהעתקות (טרנספורמציות) במרחבים תלת-ממדיים אמיתיים לפתרון תנועת גופים, אופני תנודה ומומנטי אינרציה ועוד.
היא הורחבה לפעולות ליניאריות במרחבים רב ממדיים וגם מרחבי פונקציות אינסופיים (הילברט).

לשטח זה השפעה מרכזית על הביסוס התיאורטי של תורת הקוונטים – העובדה שפתרונות אפשריים של משוואות תנועה (למשל משוואת שרודינגר של האלקטרון, הנכתבת כאופרציה של ההמילטוניאן H על פונקצית הגל $H\psi = E\psi$) הם בדידים, משמעותם רמות אנרגיה בדידות – קואנטיות.

שוייץ Leonhard Euler 1707–1783

אוילר, בחקר תנועת גופים קשיחים, גילה את חשיבות הצירים הראשיים לאיפיון התנועה,

צרפת Joseph-Louis Lagrange 1736–1813

לגראנג' מצא שהצירים הראשיים הם הוקטורים העצמיים של מטריצת האינרציה

צרפת Augustin-Louis Cauchy 1789–1857

קושי הכליל למרחב n – ממדי

צרפת Jean-Baptiste Joseph Fourier 1768–1830

פוריה השתמש בבעית הוקטורים העצמיים להפרדת משתנים במשוואות דיפרנציאליות חלקיות של התפשטות חום.

קושי המשיך את עבודת פוריה והוכיח שלמטריצות סימטריות ע"ע ממשיים.

Charles Hermite 1822 –1901

הרמיט הרחיב ע"ע ממשיים למטריצות קומפלקסיות הרמיטיות ($A_{ij}=A_{ji}^*$)

Francesco Brioschi 1824 –1897

הראה שע"ע המורכבים (קומפלקסים) של מטריצה אורטוגונאלית (שורות ועמודים הם וקטורי יחידה אורטוגונאליים) נמצאים על עיגול יחידה.

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch 1833 –1872

הרחיב למטריצה skew-symmetric או $A^T=-A$ $A_{ij}=-A_{ji}$

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 1815 –1897

מצא אי יציבות (שינוי קטן גורם לפתרון רחוק) למערכת משוואות שהמטריצות שלהן "דפקטיביות" – ז"א שהו"ע שלהם פורשים מרחב m ממדי כאשר $m < n$

François Sturm 1803–1855 & Joseph Liouville 1809–1882

בעית הערכים העצמיים במרחב אינסופי למשוואה דיפרנציאלית עם תנאי שפה. משפט שטרום-ליאוביל:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = -\lambda w(x)y,$$

Karl Hermann Amandus Schwarz 1843–1921

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

מצא את הע"ע הראשון למשוואת לפלס:

Jules Henri Poincaré 1854 –1912

$$\nabla^2 \varphi = f.$$

חקר ע"ע למשוואת פואסון

David Hilbert 1862–1943

חקר ע"ע לאופרטורים אינטגרלים כמטריצות במרחבים במימד אינסופי, והיה הראשון להשתמש בשם eigen, אולי בעקבות הלמהולץ.

פתרונות נומריים במחשב של בעית ערכים ווקטורים עצמיים למטריצות:

Richard Edler von Mises 1883–1953 המתמטיקאי השימושי

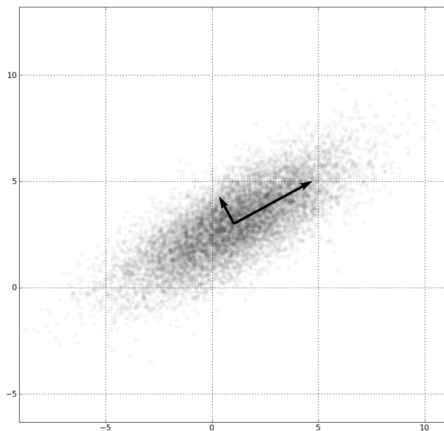
נתן פתרון איטרטיבי לו"ע וע"ע הגדול ביותר של מטריצה מהמשוואה הרקורסיבית $b_{k+1} = \frac{Ab_k}{\|Ab_k\|}$ האומרת שהפעלת המטריצה A על כל וקטור שרירותי מספר רב של פעמים מקרבת את הוקטור לו"ע הגדול ביותר, וגם נותנת את הע"ע הגדול ביותר כי $Ab_k = \lambda_k b_k$ (

פון מיזס גם הציג את המשוואות הטנזוריות של עוותים ומאמצים – אבן יסוד בהנדסה

John G.F. Francis 1934- & Vera N. Kublanovskaya 1920 –2012

מאחר והפתרון הרקורסיבי של פון מיזס מתכנס לאט, פיתחו שניהם באופן בלתי תלוי את אלגוריתם QR – פירוק בכל איטרציה של A_k למכפלת שתי מטריצות $A_k = Q_k R_k$ המטריצה Q אורטוגונאלית ($Q^{-1} = Q^T$) והמטריצה R משולשת עליונה ($R_{ij} = 0$ for $i < j$). ואז $A_{k+1} = R_k Q_k$ המקרב את A למטריצה משולשת וע"ע באלכסונה.

כיום לרוב משתמשים בורסיה מהירה יותר Francis QR algorithm ויש ורסיה $Golub-Kahan-Reinsch$ לפירוק ערכים סינגולאריים (singular value decomposition)



חישוב ערכים ווקטורים עצמיים ומציאת ערכים סינגולאריים משמשים לאנליזה של נתונים במרחבים רב ממדיים, כמו סטטיסטיקה של אוכלוסיות, לשם הצגת הנתונים במשתנים עם השוני הגדול ביותר. SVD, singular values decomposition



רוסיה (1801 – 1862) **Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky**
1831 מגלה מחדש את משפט הדיברגנט של לגראנג' גאוס וגרין:
הקשר בין אינטגרל נפח על הדיברגנט לבין אינטגרל מעטפת
של הרכיב הניצב לשפה.

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \oiint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

שימושים: חוק גאוס – אינטגרציה של השדה החשמלי $\mathbf{E}$
על משטח סגור יחסי לכמות המטען בתוכו, Q/ϵ .

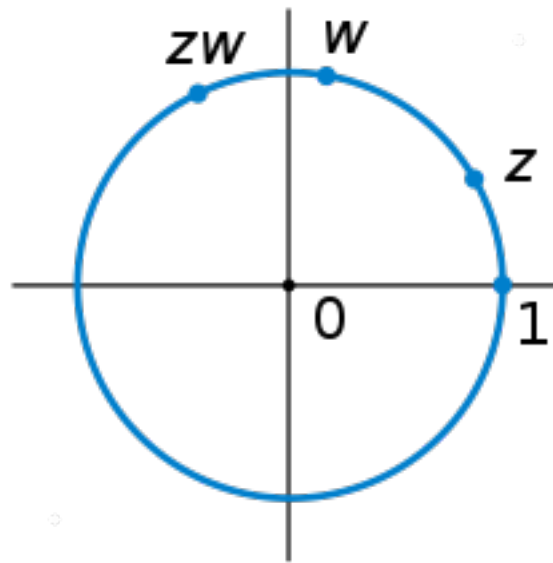
$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

כך עקפנו את הבעיה
שהשדה על מיקום
המטען הוא אינסופי.

גרמניה (1861-1941) Friedrich Engel and (1888 -1893) Norwegian Marius Sophus Lie

מפרסמים ששה כרכים על התמרות, ומראים שסימטריות שונות יוצרות חבורות.
לי יוצר תיאוריה של חבורות רציפות ומיישם אותה בגיאומטריה ולמשוואות דיפרנציאליות.

100 שנים מאוחר יותר השתמשו בחבורות לי ובאלגברה של לי לתיאוריה של חלקיקי היסוד
בארנרגיות גבוהות.



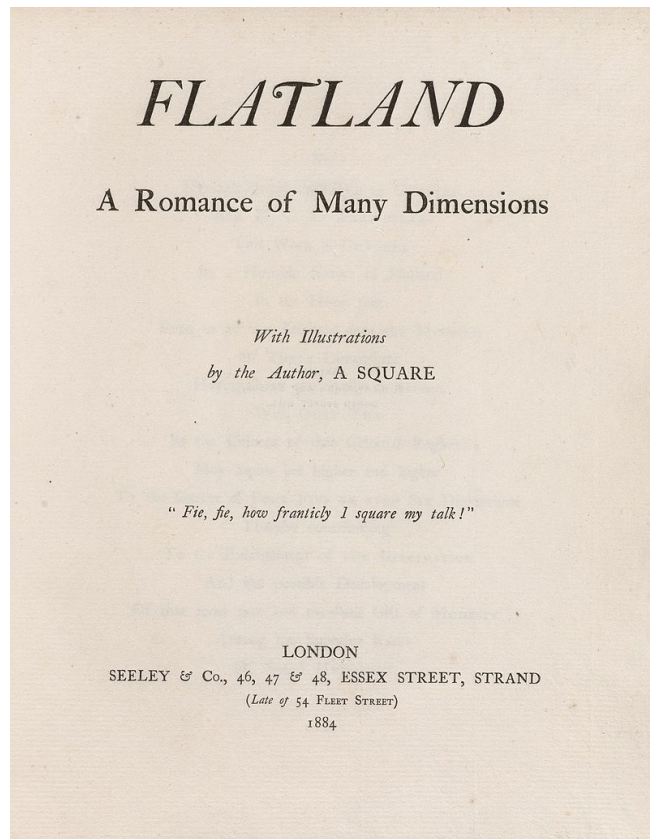
מעגל ברדיוס 1 במישור המורכב
יוצר חבורת לי רצופה ביחס
לכפל



1884, Edwin A. Abbott

1884 רומן דימיוני על ריבוע החי עם משולשים וצורות אחרות בעולם דו ממדי. כדור לוקח אותו למרחב תלת ממדי לראות איך נראה עולמו הדו-ממדי מבחוץ, והוא אז מדמיון מה אם יש עולם 4-ממדי ואיך יביט ממנו על העולם התלת ממדי. למשל מספר הקדקדים 2,4,8,16 ... לקו, ריבוע, קוביה, קוביה-4-ממדית וכו'.

חשיבות התרגיל: יכולת לתאר תכונות במרחבים ארבעה ממדיים - בתורת היחסיות.





אנגליה (1835-1882) William Stanley Jevons

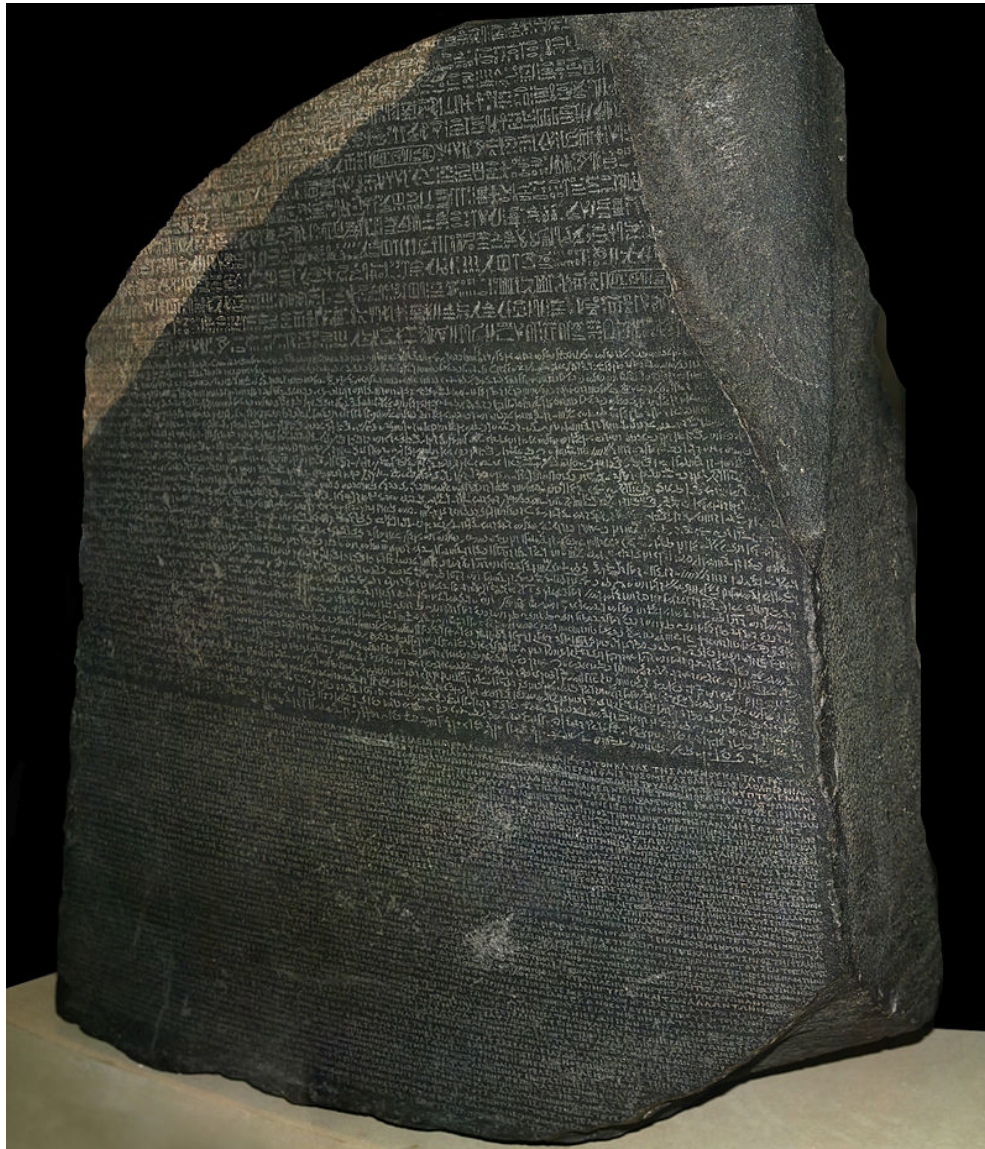
1862 תחילת כלכלה מתמטית

1874 מטפל בפרמוטציות של ABC לדיאגרמות הלוגיקה של בול-וון.

תכנן מכונה לחישוב לוגי, מעין כרטיס הניקוב של IBM.

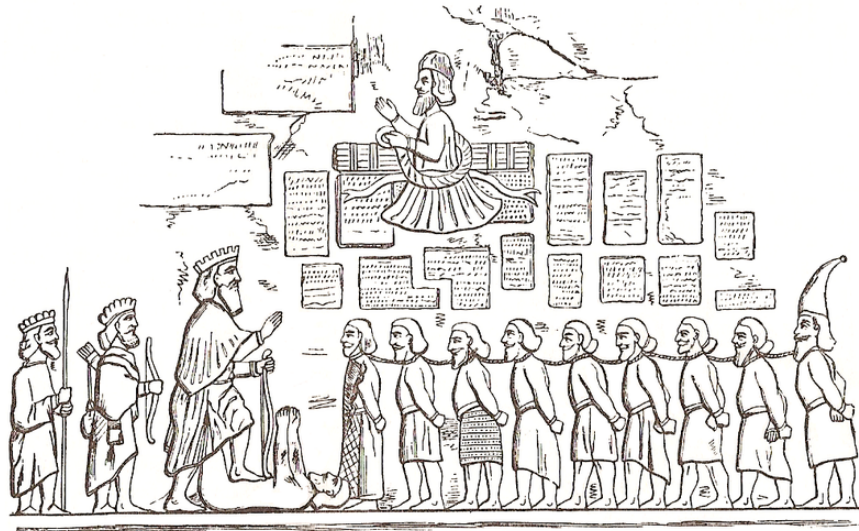
צרפת 1790 – 1832 Jean François Champollion

1821 משתמש באבן הרוזטה לקבוע את עקרון הפיענוח של ההירוגליפים. T. Young השתמש ברוזטה לפיענוח הכתב הדמוטי - אחד משלשת צורות הכתב של מצרים העתיקה
ראה: ההיסטוריה של קידוד ופיענוח



אנגליה 1810–1895 Henry Creswicke Rawlinson

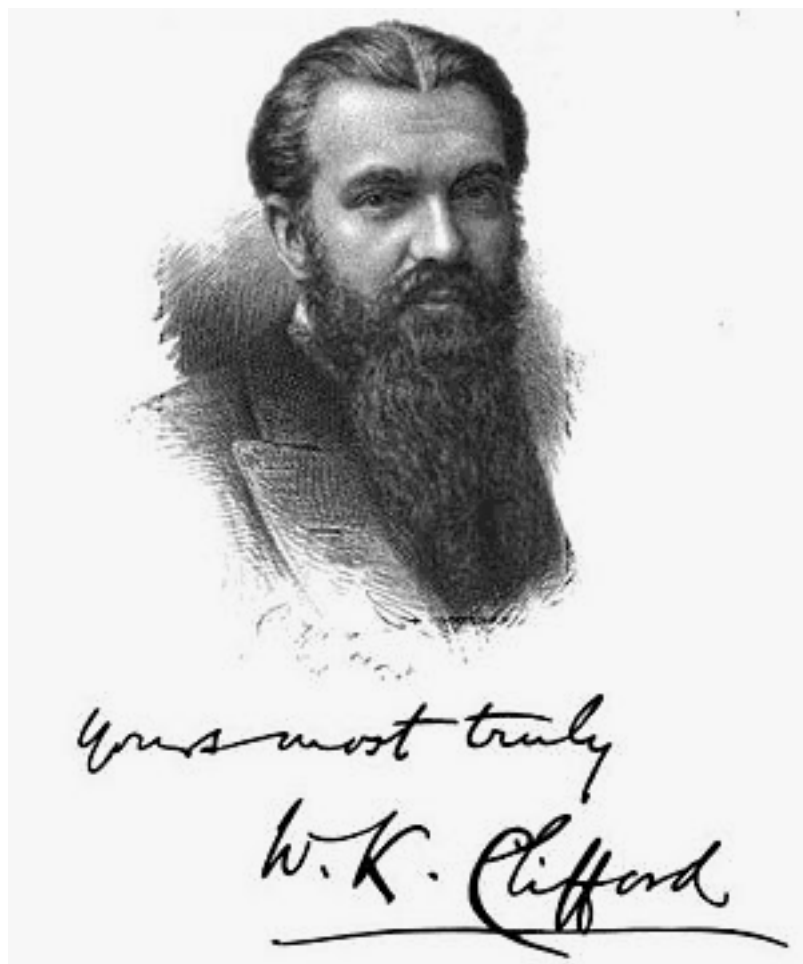
1846 פיענוח כתב היתדות cuneiform מכתובת רב-לשונית, בפרסית, בבליית ובכתב היתדות עילמי, ותבליט על צלע הר הבהיסטון Behistun של המלך דריוש הראשון



קריפטולוגיה חשובה בעתיד:
שבירת קוד האניגמה במחה"ע
השניה, פרטיות של מידע אישי
ברשת פתוחה
פיענוח רצפי גנים.

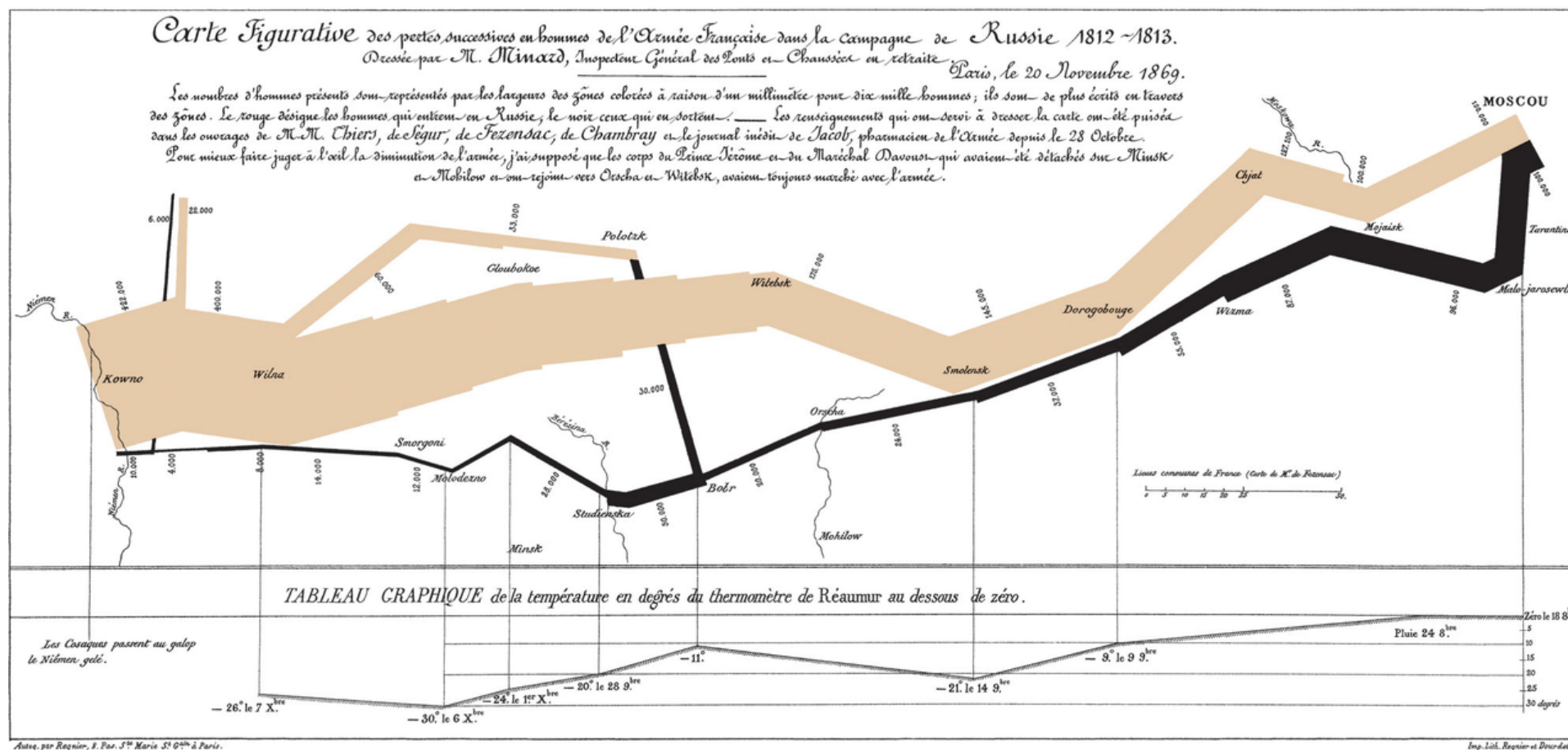
אנגליה 1845–1879 William Kingdon Clifford

1870 חוקר גיאומטריה לא אוקלידית, שמציגה שאלות על שנוי בעקמומיות היקום, מעין הרים בנוף מישורי.



Charles Joseph Minard 1781-1870 צרפת

1869 מצייר גרף מורכב רב פרמטרי של צעדת נפוליאון לרוסיה וחזרה: גודל הצבא (עובי הקו), מיקום (ציר x), כוון צעידה (חום-קדימה, שחור-נסיגה) וטמפרטורה בזמן הנסיגה.



גרמניה 1829-1900 **Elwin Bruno Christoffel**

1869 התמרה בין צורות ריבועיות במשוואות דיפרנציאליות: מתקשר לגיאומטריה רימנית
וגזירה קו-ווריאנטית 'covariant differentiation'

Christoffel symbol

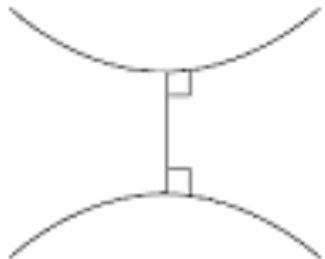
מבטאים את השינוי בעקמומיות במרחב ממקום למקום. קשורים למטריקות, גם לא אוקלידיות,
ומהם ניתן לחשב פונקציות כמו טנזור עקמומיות רימן, או הקשר בין כח ופוטנציאל ביחסיות
כללית.



János Bolyai 1802-1860 הונגריה

1823 ממציא גיאומטריה לא אוקלידית ללא הנחת מקביליות

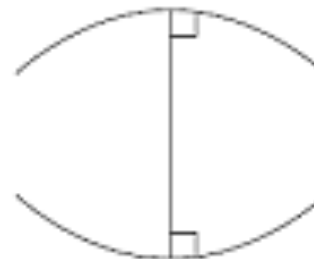
The three main types of modern geometry are:



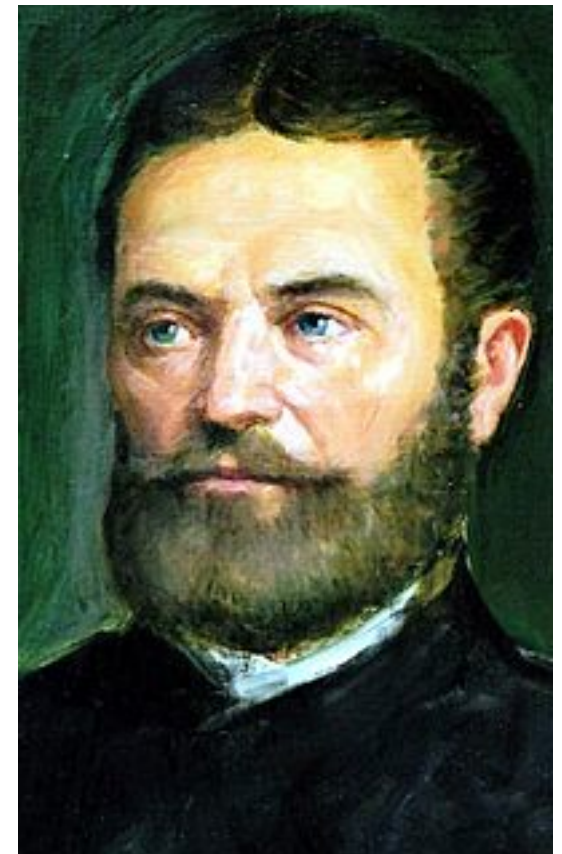
Hyperbolic



Euclidean



Elliptic



תורת הקבוצות

אבל מנורבגיה 1802-1829 Niels Henrich Abel

תורת החבורות Abelian group Abel integral Abel function

1824 אבל חיבר הוכחה שלמשוואה מדרגה 5 אין פתרון באמצעות
מקדמיה ופעולות חשבון.

ההוכחה הוצגה לגאוס, קושי ולג'נדר אך אבל לא זכה להוקרה
מהם.



צרפת (1811-1832) Évariste Galois

group theory: Galois' field, Galois' group, Galois' theory,

École Polytechnique – נכשל בקבלה ל–

נולד ב– Bourg-la-Reine בדרום פריז, ולמד ב– Lycée Louis-le-Grand התעניין בספרי

הגיאומטריה של לגראנז' ולז'נדר, ועסק באלגברה. חשב שמצא פתרון אלגברי

למשוואות מדרגה 5 אך טעה. קושי שקבל מאמרים ממנו דרש תיקונים. פוריה שקיבל

ממנו מאמר לתחרות נפטר לפני שהגיש אותו. גם שבליה (שערך עיתון מתמטי) דחה

את מאמריו. בכל זאת פורסמו מאמריו בעזרת ליאוויל שהכיר בגדולתו אך רק אחרי

מותו: הגדרת תורת השדות והקשר לתורת החבורות, 60 שנה לפני שהשטח המשיך

בפיתוחו ע"י ליוביל וז'ורדן, והחשיבו את גלואה לאבי תורת החבורות. לחבורות

חשיבות בפיזיקה: חבורות סימטריה של גבישים, ושל המספרים הקוונטיים של

חלקיקים אלמנטאריים. המצאתו את חבורת הסימטריה של משוואה פולינומית

והקשר לפיתרונה פורסמה ב–1832 לאחר מותו.

הוא היה רפובליקאי וישב בכלא על מרדנותו. בגיל 20 הסתבך

בדו-קרב (לא ברור אם על רקע רומנטי או פוליטי) ונפצע אנושות.

לפי דווח של אלכסנדר דיומא כתב באובססיה שלפני המות את

תורת הקבוצות. מכתב שכתב אז לליאוויל פורסם על ידו ומכיל

הוכחת אי קיום פתרון אלגברי לפולינום מדרגה-5

המבוסס על תכונות חבורת התמורות (פרמוטציות) של

הפתרונות שנחקרה ע"י אבל הנורווגי במקביל.



גלואה גרס כי כדי שלמשוואה יהיה פתרון כללי נדרש שרצף גורמי החלוקה של חבורת הפתרונות בתת-חבורה הנורמלית המרבית שלה ושל התת-חבורה הנורמלית המרבית בתת-חבורה הנורמלית המרבית שלה עצמה וכו עד שמגיעים לאיבר הזהות יהיו מספרים ראשוניים בלבד. אם תנאי זה מתקיים אזי ניתן להנמיך את דרגת המשוואה כל פעם בדרגה אחת ולקבל משוואה מדרגה נמוכה יותר עד שמגיעים למשוואה ממעלה שנייה.

$$x^2+ax+b=0 \rightarrow (x-p)(x-q)=0 \rightarrow b=pq \quad a=-(p+q) \quad 2^{\text{nd}} \text{ order}$$

שתי ההתמרות pq ו- qp הם חבורת גלואה.

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \rightarrow (x-p)(x-q)(x-r)=0 \rightarrow x^3-(p+q+r)x^2+(pr+qr+pq)x-pqr=0 \quad 3^{\text{rd}} \text{ order}$$

שש ההתמרות $pqr, prq, qrp, qpr, rpq, rqp$ יוצרות חבורה, עם תת חבורה מסדר 3, גורם החלוקה הוא 2: ראשוני pqr, qrp, rpq

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \rightarrow (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)=0 \rightarrow 4^{\text{th}} \text{ order}$$

$$x^4-(p+q+r+s)x^3+(pq+rs+pr+ps+qr+qs)x^2-(prs+qrs+pqr+pqrs)x+pqrs=0$$

24 התמרות, תת חבורה מסדר 12, (גורם חלוקה 2) ולה תת חבורה מסדר 4 (גורם 3) ולה תת חבורה מסדר 2 (גורם 2) כל הגורמים ראשוניים.

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \rightarrow (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)(x-t) = 0 \quad 5^{\text{th}} \text{ order}$$

$$x^5-(p+q+r+s+t)x^4+(pq+rs+pr+ps+qr+qs+pt+qt+rt+st)x^3-$$

$$(prs+qrs+pqr+pqrs+pqt+rst+pqt+prt+pst+qrt+qst)x^2+(pqrs+prst+qrst+pqrt+pqst)x-pqrst = 0$$

120 התמרות של $pqrst$ אבל גורמי החלוקה אינם ראשוניים

דוגמא איך שטח אחד במתמטיקה פותר בעיה בשטח לכאורה בלתי קשור
דוגמא "קיצונית" אחרת: פתרון משפט פרמה בעשורים האחרונים.

לוגיקה

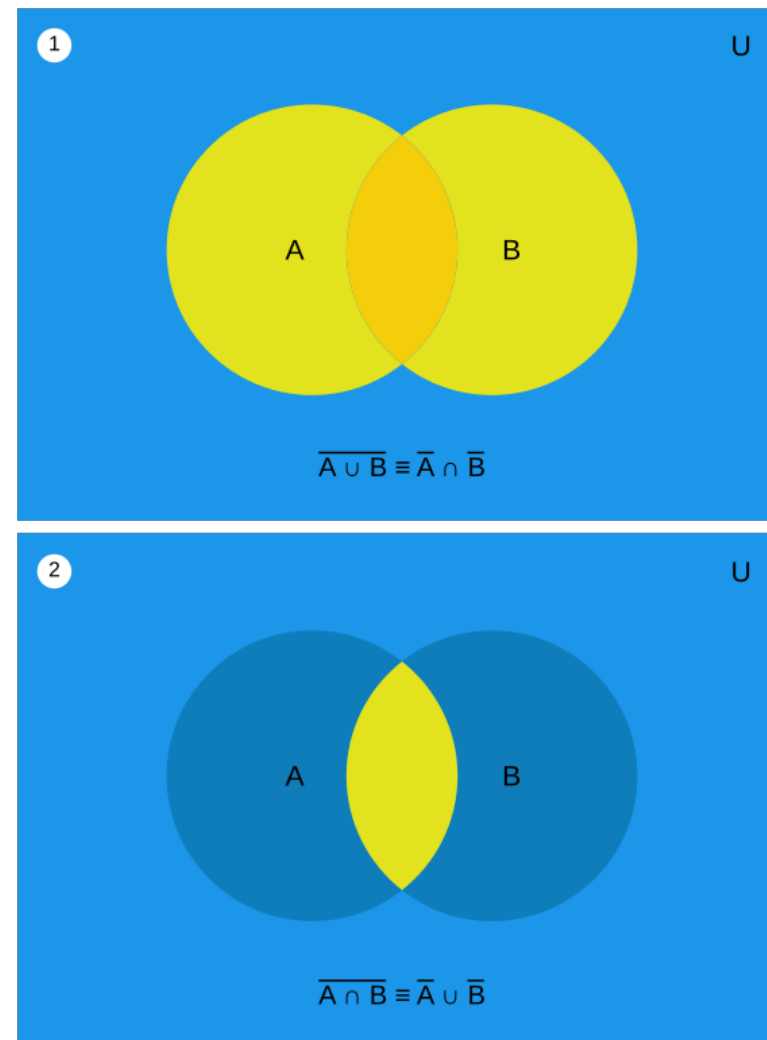
Augustus de Morgan (1736-1813) אנגליה Logics

de Morgan laws

"*not (A and B)*" זהה ל- "*(not A) or (not B)*"

"*not (A or B)*" זהה ל- "*(not A) and (not B)*".

1860 מפתח לוגיקה של יחסים. עצמים
הקשורים ביחס מסויים לקבוצה.



George Boole (1815-1864) אנגליה

Logics, probability, Bool's inequality, Bool's rules



1839 מפתח אלגברה בוליאנית

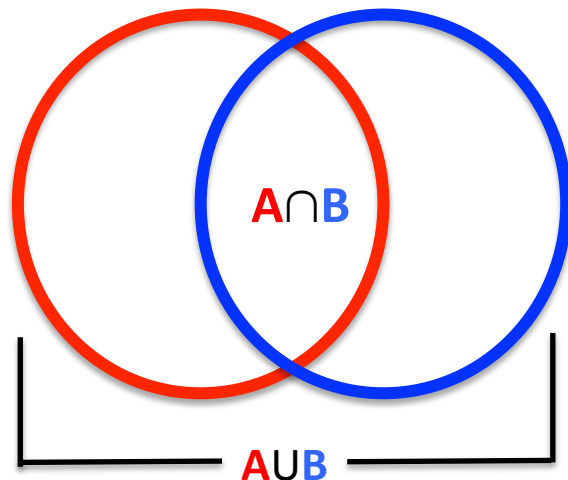
אי השוויון של בול: לכל סט סופי, (או גם אינסופי הניתן לספירה)

של אירועים, A_i , הסיכוי שלפחות אחד מהם יקרה אינו גדול מסכום הסיכויים של האירועים הבודדים.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i).$$

הוכחה באינדוקציה על סמך הסיכוי שיקרה A או B (או שניהם = איחוד) הוא הסיכוי שיקרה A ועוד הסיכוי שיקרה B פחות הסיכוי שיקרה גם A וגם B (= חיתוך)

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$



למשל - זורקים שתי קוביות, מה הסיכוי שאחת

מהם תפול על 6: $1/6 + 1/6 - 1/36$

הסיכוי למצב נפילה מסויים של שתי קוביות: $1/36$

הסיכוי ל-6 באחת, כל 6 המצבים לקוביה השניה

אפשריים, הוא $1/6 = 6/36$. הסיכוי ל-6 בשניה:

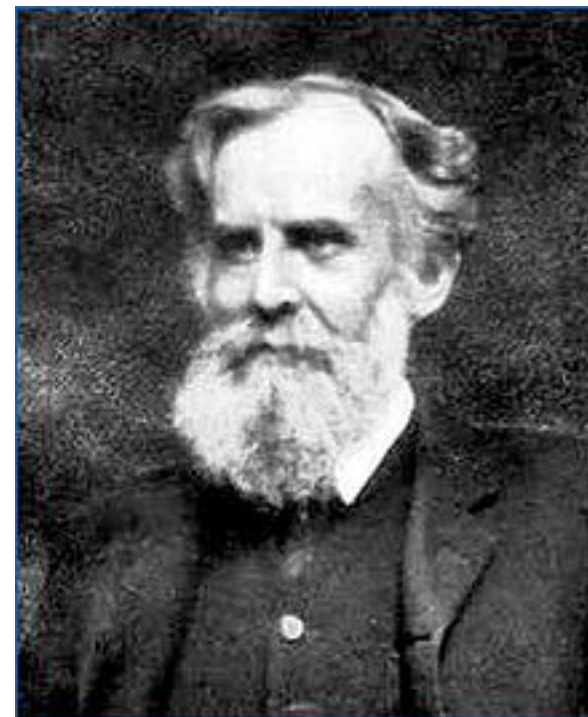
שוב $1/6$. אך ספרנו פעמיים את המצב של 6 בשתי

הקוביות!!! לכן נחסיר $1/36$.

אנגליה (1834-1923) John Venn

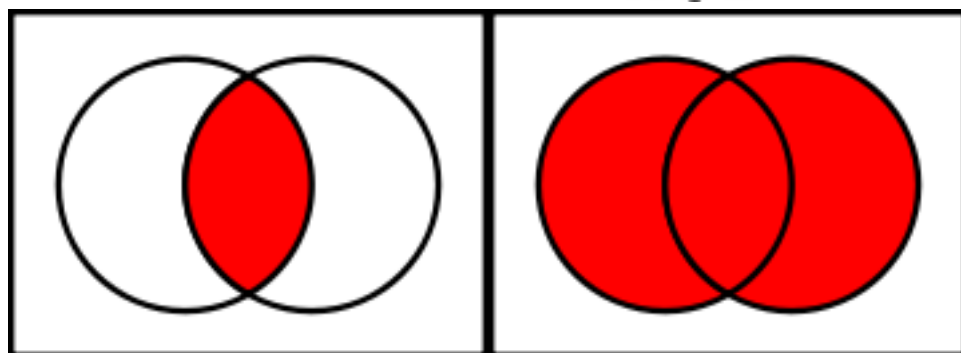
group theory, Logics, probability Venn diagram:

1881 ביטויים לוגיים וגרפיים ליחסים בין קבוצות
איחוד חיתוך



$A \cap B$

$A \cup B$

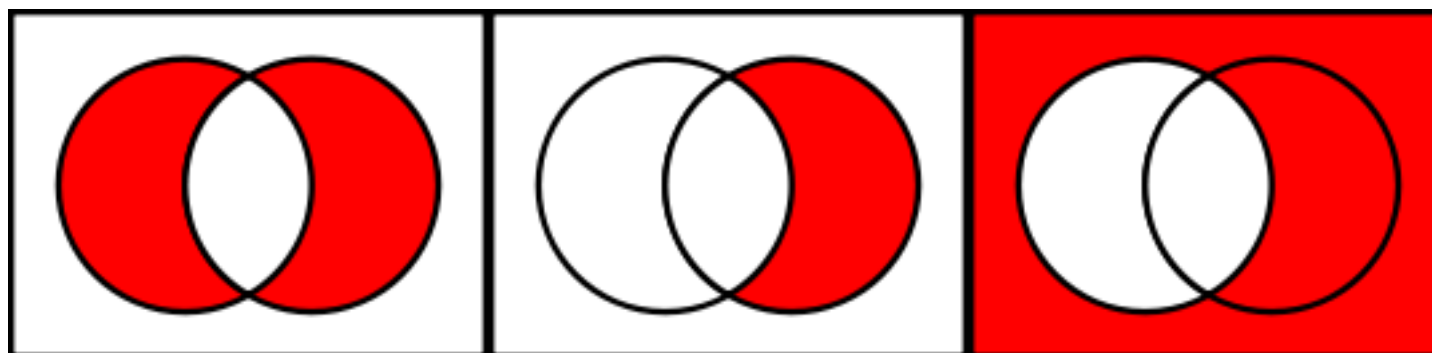


המשלים האבסולוטי של A ב-U המשלים היחסי של A ב-B הפרש סימטרי

$A \Delta B$

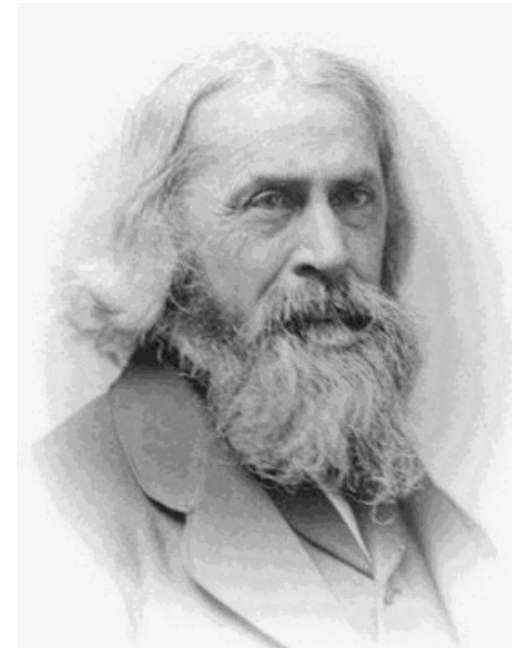
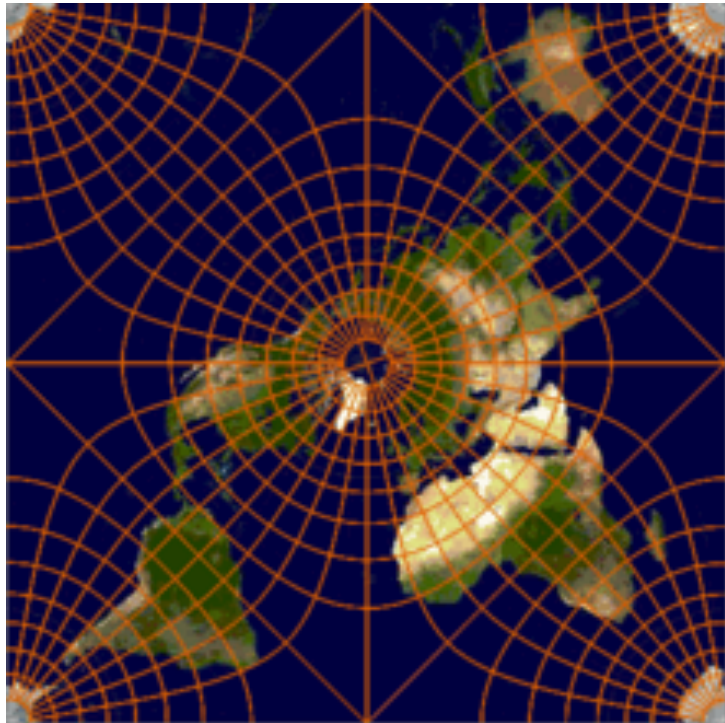
$A^c \cap B = B \setminus A$

$A^c = U \setminus A$



Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) logician אמריקה

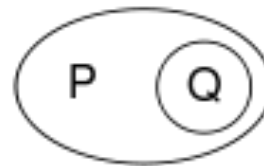
1897 ניסה לפרסם מערכת טופולוגית של לוגיקה סימבולית שמאפשרת תיאור גיאומטרי.



היטל כדור השומר על זוויות
מלבד בנקודות בודדות
ומעוות שטח פחות
מהיטלים אחרים.

PQ

a) Conjunction $P \wedge Q$



c1) Conditional $P \rightarrow Q$



c2) Conditional $P \rightarrow Q$,
alternative notation



b) Negation $\neg P$

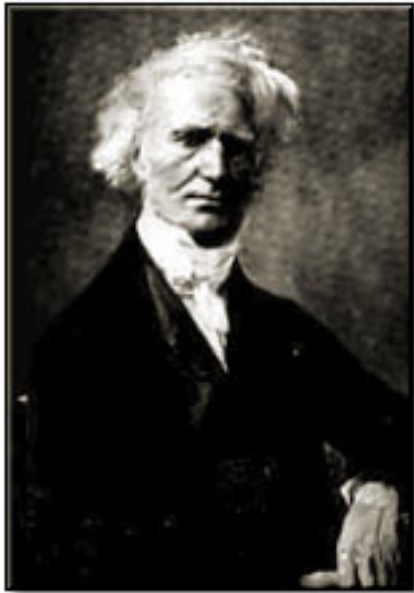


d) Disjunction $P \vee Q$

Jaque Phillip Marry Binet (1786-1866) צרפת

number theory

נוסחא סגורה לחישוב מספרי פיבונאצ'י המקיימים: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
 החישוב הקלאסי (מספר זוגות הארנבים ...) רקורסיבי.
 מרחיב את מספרי פיבונאצ'י למספרים שליליים.

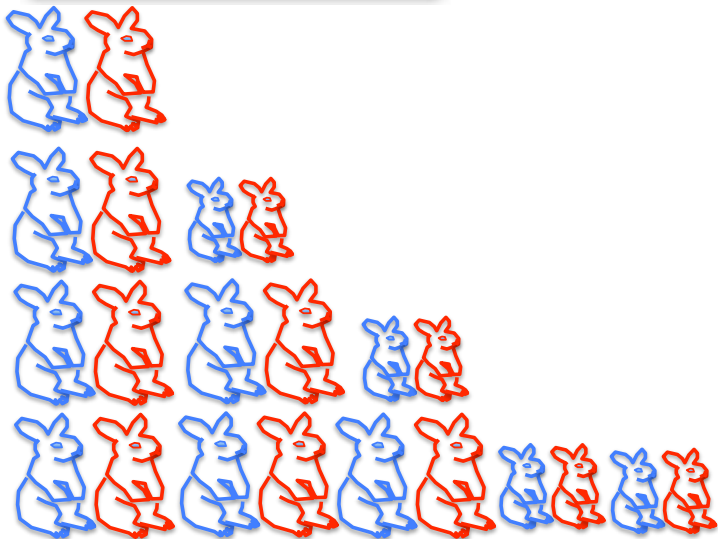


$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

הוכחה: $G_n = ar^n$ מקיים $G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$ עבור $r_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$
(פתרון משוואה ריבועית)

לכן הפתרון $F_n = ar_1^n + br_2^n$

תנאי ההתחלה: $F_0=0$ $F_1=1$ פותרים את a, b



$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k}$$

גרמניה 1848–1925 **Friedrich Ludwig Gottlob Frege**

1879 המערכת הראשונה של לוגיקה חישובית כבסיס למתמטיקה.

טיפול בלוגיקה לא מוחלטת Fuzzy Logics : רוב הבנים אוהבים בנות ורוב הבנות אוהבות בנים שאוהבים בנות...

תחשיב פסוקים , באנגלית: Propositional calculus,

Sentential calculus או Propositional logic

זו מערכת מובנית , פורמליסטית , המאפשרת לייצג את הקשרים הלוגיים בין ערכי האמת של פסוקים לוגיים שונים, ולהסיק את תקפותם ההגיונית (לוגית) של טענות דוגמא:

א. אם החקך הוא נמלה, אזי הוא חי בתל נמלים.

ב. החקך הנבדק הוא נמלה.

מסקנה חד משמעית: החקך הנבדק חי בתל נמלים.



תורת המספרים

צרפת (1845-1922) Pierre Henri Brocard

number theory

$$n! + 1 = m^2,$$

Brocard's problem

האם קיימים עוד מספרים שלמים מלבד $(n, m) = (4, 5)$, $(5, 11)$, and $(7, 71)$ המקיימים את המשוואה הנ"ל?

ארדוש הניח שיש מספר סופי, ובמחשב חיפשו עד 10^9 ולא מצאו (כתוב תכנית מחשב)



תורת הפונקציות

גרמניה (1784-1846) Fredrich Wilhelm Bessel

calculus Bessel function, Bessel inequality

1838 מדד מרחק לכוכב קרוב Cygni 61 עם תנועה רחבת ע"י טריאנגולציה, ממדידת הזווית שלו בהפרש חצי שנה.

1839 מדידת מרחק Alpha Centuri ע"י Thomas Henderson

1840 מדידת מרחק Vega ע"י Frederick von Struve

כל אלה ביססו את מיקום מערכת השמש בשביל החלב.

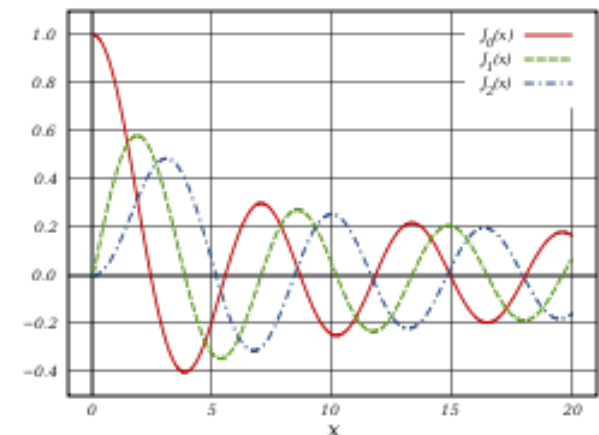
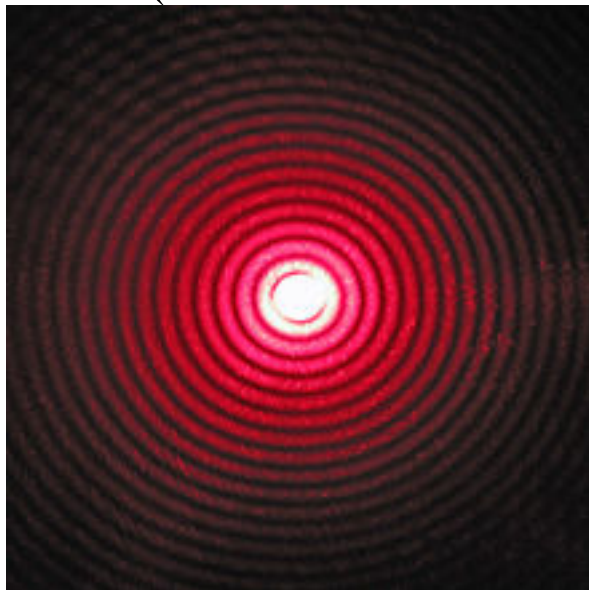
פונקציות בסל (הוגדרה לראשונה ע"י ברנולי) מופיעה כפתרון לבעיות פיזיקאליות שיש בהם סימטריה צילינדרית או כדורית. למשל בתמונת העקיפה של אור מחריר, האינטגרציה של פזת האור $\exp(ikx)$ נותנת פונקציות בסל.

(תמונת דיפרקציה של איירי Airy בטלסקופ מכוכבים)

פתרון משוואת שרודינגר

לאלקטרון בכדור גם היא

פונקציות בסל.



גרמניה (1777-1855) Carl Friedrich Gauss

"נסיך המתמטיקאים"



אלגברה, תורת המספרים, אנליזה מתמטית, סטטיסטיקה,
גאומטריה דיפרנציאלית, גאודזיה, תורת הכבידה,
תורת החשמל והמגנטיות, אסטרונומיה, אופטיקה

בבי"ס יסודי הוטל על התלמידים לחשב את סכום המספרים
1 עד 100. גאוס בן 7 נתן כעבור כמה שניות את התשובה כי מצא
את הנוסחא לחישוב סכום טור חשבוני מאחר וסכום אברים
ראשון ואחרון שווה לשני ולפני אחרון וכו'.

בגוטינגן גילה שכל מצולע משוכלל עם מספר צלעות שהוא מספר פרמה $F_n = 2^{2^n} + 1$
ניתן לבניה עם מחוגה וסרגל: בעיה שהוצבה 2000 שנה לפניו ע"י אוקלידס.

בשנים הבאות התעסק בתורת המספרים

כשפורסם גילוי האסטרואיד קרס ניסו לנבא מתי ואיפה הוא יחזור, אך מאחר ומיקומו
היה בקצה האופק תועד מסלולו בקשת קטנה של 3 מעלות ממסלולו. גאוס חישב את
כל המסלול מאנליזה של חתכים קוניים, פיתח טרנספורמצית פוריה מהירה (שקדמה
לאנליזת פוריה ב-1807 ולא לגורייטס המהיר שפורסם "שוב" ב-1965 ע"י קולי וטוקי
מ-י.ב.מ.) וניבא את חזרתו כעבור כשנה בדיוק רב שהירשים את הקהיליה המדעית,
והקנה לו קטדרה לאסטרונומיה בגוטינגן, בה כיהן עד מותו. מיזעור ריבועי הסטיות
least square minimization שהמציא כדי להתאים את המדידות למודל מתמטי הפך
לשיטה בסיסית במדע.

1818 בשנים הבאות עסק במדידות לשם סקר גיאודזי של ממלכת הנובר. הוא המציא מכשירי מדידה (הליוטרופ), ופיתח תחומי מתמטיקה בסטטיסטיקה, אנליזה קומפלקסית, תורת הפונקציות, העתקות (טרנספורמציות) בין משטחים, גיאומטריה לא אוקלידית ועוד. אחרי 1828 התרכז גאוס בפיזיקה: קריסטלוגרפיה ואריזה של כדורים, חשמל ומגנטיות (עם ובר) חוק גאוס באלקטרוסטטיקה (שטף כללי דרך משטח סגור שווה למטען הכלוא במשטח), טלגרף (בין הטלסקופ לאוניברסיטת גוטינגן). הוא אירגן מיפוי השדה המגנטי של כדור הארץ וחישב מיקום מדויק לקוטב המגנטי, ופיתח את שדה הפוטנציאל החשמלי והמגנטי. ואופטיקה: חישב דמות בקירוב גאוסיאני: ליניארי, ואברציות אופטיות כתיקונים מסדרים גבוהים יותר. כן טיפל בתיאור המתמטי של ביטוח ופנסיה, ועסק בספקולציות פיננסיות שהגדילו מאד את הכנסותיו. גאוס נטע בתלמידיו **רימן**, **מוביוס** ו**ליסטינג** את האהבה לטופולוגיה. גאוס התנגד לנפוליון, על אף שנפוליאון העריץ אותו. גאוס ערך מחברת של כל עבודותיו, אך לא פירסם חלק גדול מהם כי דרש מעצמו ליטוש ושלמות. נאמר שאילו פירסם הכל (שכלל הרבה רעיונות שפורסמו ע"י מתמטיקאים אחרים) היה מקדם את המתמטיקה ב-50 שנים. מתלמידיו דדקינד, רימן, בסל, מוביוס, ליסטינג... גאוס שנא נסיעות, ורק פעם הוזמן ע"י הומבולד ונסע לברלין.



הספר **Measuring the World** שחובר ע"י
Daniel Kehlmann
מתאר את חיי גאוס והומבולד, שגישותיהם
למדע היו ממש הפוכות.

1801 גאוס חוקר חשבון אינפי ואלגברה. מפרסם ספר. ב-1799 "סוגר" את הרחבת המספרים:
המשפט היסודי של האלגברה: לפולינום מדרגה n עם מקדמים מורכבים n פתרונות מורכבים.
 1801 מתאים מסלול לסרס Ceres בשיטת הריבועים המזעריים least squares approximation
 1808 פירסום התאמת הקו האופטימאלי לנתונים: **רגרסיה**. הומצא באופן בלתי תלוי ע"י
 לג'נדר ב-1806

ננסה להתאים n מקדמים, β_i של פונקציה ליניארית עבור $m > n$ מדידות, (לכל סט של n ערכי x ערך של y)
 כך שסכום ריבועי הסטיות יהיה מינימאלי.

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \beta_j = y_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^m \left| y_i - \sum_{j=1}^n X_{ij} \beta_j \right|^2 = \|y - X\beta\|^2.$$
 הפתרון: במינימום הנגזרות של S לפי כל אחד מהמקדמים β_i מתאפס.

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y.$$
 מקבלים n משוואות עם n נעלמים שפיתרון (בכתיבה מטריציאלית):
 והשגיאה למקדמים:

$$\text{var}(\hat{\beta}_j) \approx S/(m-n) \left([X^T X]^{-1} \right)_{jj}$$

נדגים התאמת קו $ax+b$ במישור xy למדידות x_j, y_j

$$S = \sum (bx_j + a - y_j)^2 \quad dS/da = 2 \sum (bx_j + a - y_j) = 0 \quad 2b \sum x_j + 2a \sum 1 = 2 \sum y_j$$

$$dS/db = 2 \sum (bx_j + a - y_j) x_j = 0 \quad 2b \sum x_j^2 + 2a \sum x_j = 2 \sum y_j x_j$$
 נקרא לסכומים:

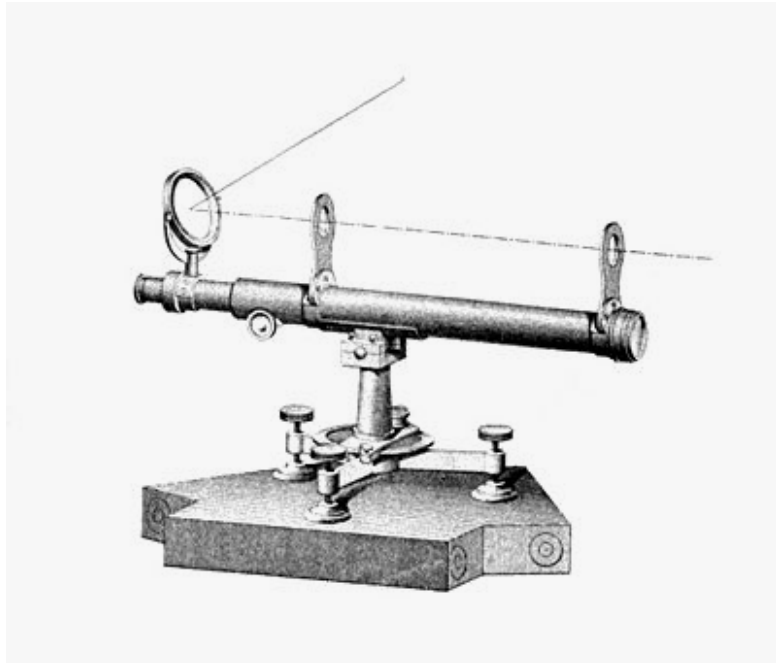
$$\sum 1 = n \quad 1/n \sum x_j = X \quad 1/n \sum x_j^2 = Q \quad 1/n \sum y_j = Y \quad 1/n \sum y_j x_j = R$$

ונקבל:

$$b = (XY - R) / \det \quad a = (XR - YQ) / \det \quad \det = X^2 - Q$$

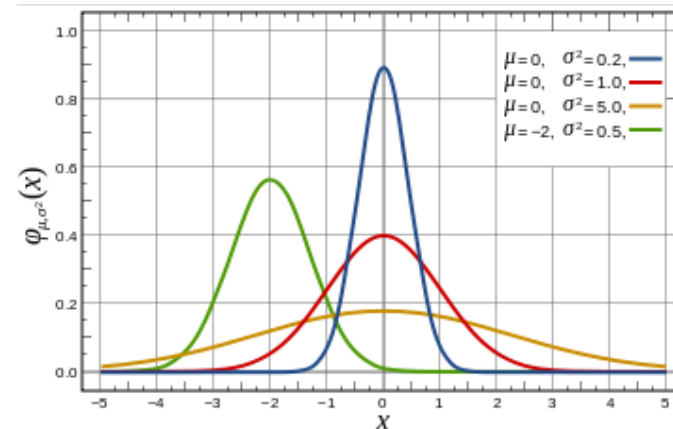
אחרי 1818 הועסק גאוס כמודד קרקעות בגוטינגן, והמציא את ההליוטרופ heliotrope : קביעת מיקום מרוחק ע"י החזרת אור השמש דרך חרירים.

באותו זמן פירסם מאמרים על תורת הפוטנציאל ועל עקומות גאוסיאניות.



מה המיוחד בגאוסיאן?
פילוגים רבים מתקרבים לגאוסיאן במספר דגימות גדול.
קונבולוציה של גאוסיאנים נותנת גאוסיאן.

$$f(x) = a \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2c^2}\right)$$



גרמניה (1786-1866) Karl Wilhelm Theodor Weierstrass

modern analysis Wierstrass function, M-test

פיתח את מושג הרציפות של פונקציה והתכנסות אחידה. לפניו בולצאנו עבד על גבול להתכנסות, וקושי פיתח הוכחות "דלתה-אפסילון" בהתכנסות אך לא עמד על רציפות אחידה. 1861 כבר הראה שפונקציה רציפה בתחום אינה בהכרח גזירה בכל נקודה בתחום. לא התקבל כאמין. פורסם ע"י תלמידיו רק ב-1872

Bolzano-Wierstrass theorem: each bounded sequence in $\mathbf{R}_n$ has a convergent subsequence

OR: a subset of $\mathbf{R}_n$ is sequentially compact if and only if it is closed and bounded

Heine-Borel theorem: For a subset S of Euclidean space $\mathbf{R}_n$, the following two statements are equivalent:

S is closed and bounded

S is compact (that is, every open cover of S has a finite subcover).



mathematical analysis צכיה **Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1840)**

משפט בולצאנו-ויירשטראס Bolzano-Wierstrass theorem קובע כי לכל סדרה אינסופית חסומה של נקודות במרחב n ממדי אוקלידי עם מטריקה $\mathbb{R}^n$ (מרחק $=0$ רק לאותה נקודה, וקיים כלל המשולש) קיימת תת-סדרה מתכנסת. ניסוח אחר (ושקול) של המשפט קובע כי לכל קבוצה אינסופית חסומה של נקודות במרחב n ממדי קיימת נקודת הצטברות (הינו, לכל סביבה אפסילונית של הנקודה יש נקודה נוספת).

המשפט שקול **ללמה של קנטור** [אם שתי סדרות, עולה ויורדת, מתקרבות אחת אל השנייה מבלי לעבור אחת את השנייה, אך בצורה כזו שהמרחק ביניהן שואף לאפס, שתיהן מתכנסות לנקודה משותפת].

ולמשפט היינה-בורל [קבוצה בישר הממשי היא קומפקטית

אם ורק אם היא סגורה וחסומה]

הרעיון האינטואיטיבי שעומד מאחורי המשפט הוא שאם קיימת קבוצה שיש בה אינסוף נקודות, האיברים שלה לא יכולים "לברוח" רחוק מדי, לפחות חלק מהם אמורים להיות קרובים מאוד זה לזה. המשפט מראה בצורה קונסטרוקטיבית כיצד ניתן למצוא את הסדרה או נקודת ההצטברות המבוקשות.

מה חשיבות המשפט?

בולצאנו היה הראשון להשתמש בהוכחות "דלתה-אפסילון" להתנהגות פונקציות רצופות, והפך הוכחות אלה לריגורוזיות. 1851 פורסם 3 שנים לאחר מותו "מחקר פרדוקסים" בו הוא נותן דוגמאות להתאמה חד-חד ערכית בין אלמנטים בקבוצה ותת קבוצה שלה.



נציג כאן את הוכחת המשפט עבור סדרה חסומה ב- $\mathbb{R}$. ההכללה ל- $\mathbb{R}^n$ היא טכנית אך אינה מסובכת. נשתמש ב**למה של קנטור** לצורך ההוכחה.

תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, אז קיים $M > 0$ כך ש- $x_n \in [-M, M]$ $\forall n$. נסמן $a_0 = -M, b_0 = M$. כעת, נחצה את הקטע לשניים, כלומר נביט בשני הקטעים הסגורים $[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}]$ ו- $[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0]$. כיוון שהסדרה אינסופית בהכרח יש אינסוף איברים של הסדרה לפחות באחד משני הקטעים הללו (אחרת שני הקטעים מכילים מספר סופי של אברי הסדרה ואיחדם הוא קבוצה סופית). נבחר את הקטע הזה ונסמן אותו בתור $[a_1, b_1]$. כעת נוכל לחלק גם את הקטע $[a_1, b_1]$ באותו אופן, וכן הלאה.

נמשיך בתהליך הבנייה הזה ב**צורה אינדוקטיבית**, ונקבל סדרה של קטעים $[a_k, b_k]$ המקיימת את התכונות הבאות:

1. כל הקטעים סגורים.
2. כל קטע מוכל בקטעים הקודמים לו.
3. סדרת אורכי הקטעים שואפת לאפס.
4. כל קטע מכיל אינסוף נקודות של x_n .

כל התכונות פרט לשלישית נובעות ישירות מדרך בניית הקטעים. כדי להיווכח בשלישית נשים לב כי מכיוון שאורכו של כל קטע הוא **חצי** מאורכו של הקטע הקודם לו, הרי שהנוסחה הכללית לאורכם של הקטעים היא $\frac{M}{2^{k-1}}$ עבור קטע מספר k - זוהי סדרה ששואפת לאפס.

אם כן, כל תנאי הלמה של קנטור מתקיימים, ולכן קיימת נקודה יחידה c כך ש-

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} [a_k, b_k] = \{c\}.$$

נבנה תת-סדרה המתכנסת ל- c בצורה אינדוקטיבית: בשלב ה- k נבחר

איבר אחד y_k של הסדרה המקורית מהקטע $[a_k, b_k]$, כך שהאינדקס שלו בסדרה המקורית

יהיה גדול מהאינדקס של כל הנקודות שבחרנו עד עתה. ניתן לעשות זאת בשל התכונה הרביעית של הקטעים, לפיה בכל קטע יש מספר אינסופי של איברים מהסדרה, ולכן בפרט אפשר למצוא כזה שהאינדקס שלו גדול מהמקסימום (הסופי) של אינדקסי האיברים שנבחרו עד עתה.

כעת, נשים לב כי בהינתן קטע $[a_k, b_k]$ הוא מכיל את כל האיברים מתת הסדרה החל מהמקום ה- k ואילך (כי כולם שייכים לקטעים שמוכלים בו). כמו כן, המרחק הגדול ביותר בין שתי נקודות

השייכות לקטע זה אינו עולה על אורך הקטע, $\frac{M}{2^{k-1}}$. לכן, המרחק בין כל נקודות תת-הסדרה

החל מהמקום ה- k ואילך מהנקודה c אינו עולה על $\frac{M}{2^{k-1}}$, ומספר זה שואף לאפס. לכן

תת-הסדרה שבנינו שואפת ל- c , ובכך הושלמה ההוכחה.

צ'רפת (1781-1840) Siméon Denis Poisson

probability Poisson random variable, Poisson approximation, Poisson process

Poisson equation $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$

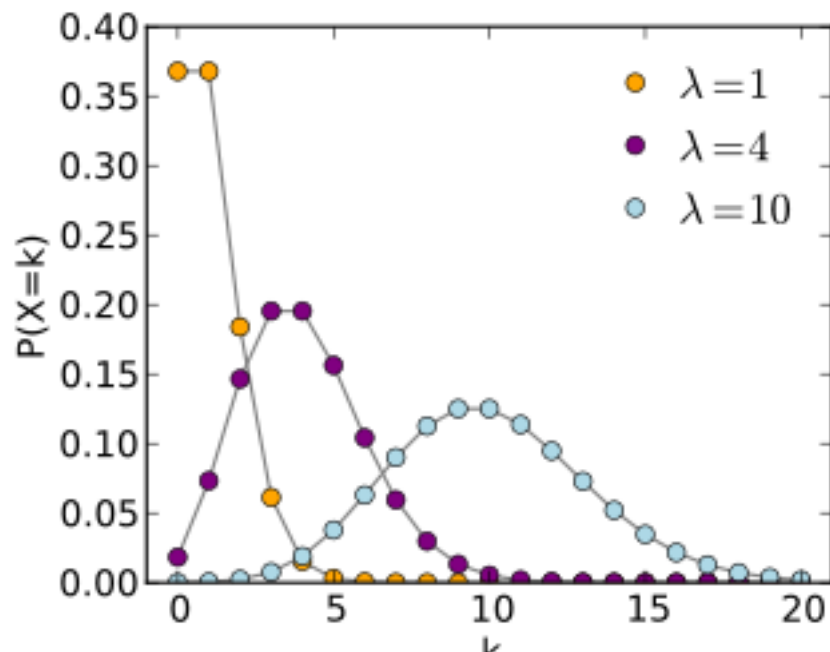
$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon\epsilon_0}.$$

פתרון הפוטנציאל החשמלי סביב מטענים

פילוג פואסון: הוא פילוג בדיד (למספרים שלמים) המבטא למשל את הסיכוי לתוצאה

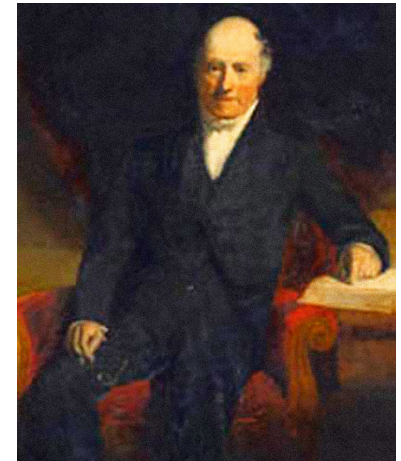
$$f(k; \lambda) = \Pr(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

של k עצים בהטלת מטבע λ פעמים:



calculus אנגליה (1793-1841) George Green

Green's theorem,



$$\oint_C (L dx + M dy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy$$

נוסחת גרין:

האינטגרל על משטח סגור C קשור לאינטגרל בנפח D שהוא כולא.

$$\iint_D (\nabla \cdot \mathbf{F}) dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds,$$

קשור למשפט סטוקס אינטגרל נפח על דיברגנט שוה לאינטגרל שטח על גרדיאנט

חשיבות לתורת השדות בפיזיקה: ע"י אינטגרל שטח יודעים איזה מטען כלוא בנפח

Green's function

$$\hat{L}G(x, s) = \delta(x - s)$$

פונקצית גרין

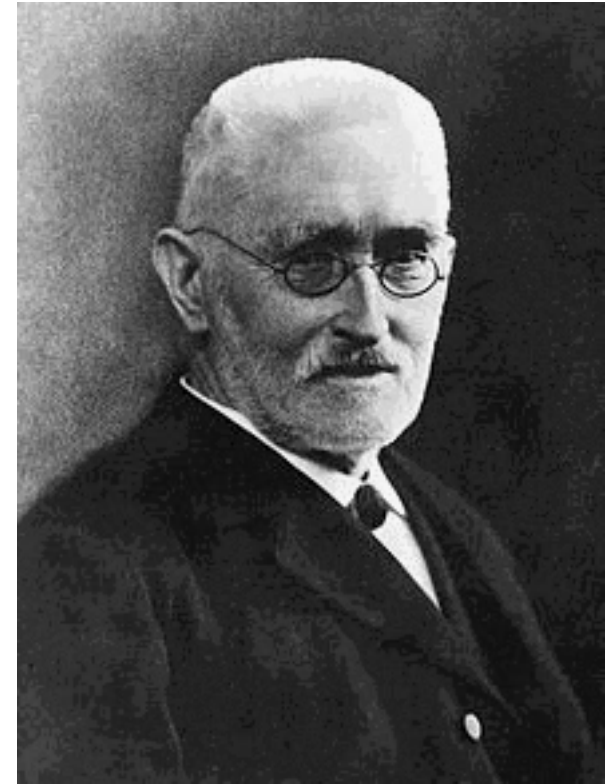
פתרון בעיה המתוארת במשוואה דיפרנציאלית, L, להפרעה של אימפולס המתואר כפונקצית דלתה.

הפתרון של פונקצית גרין מאפשר מציאת פתרון $LG(x,s)=f(x)$ ע"י קונבולוציה.

1828 המאמר הגדיר את הפוטנציאל החשמלי, ואת הקשר שלו לפילוג המטענים דרך אינטגרל שפה - משפט גרין.

משלים בנוסחא אינטגרלית את נוסחת פואסון הדיפרנציאלית.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) גרמניה
number theory ת Dedekind cuts (intersections?), Dedekind
circles, Piano-Dedekind axioms



1872 חתך במספרים הרציונליים הוא חלוקה שלהם לשתי
קבוצות לא ריקות A ו- B , כך שכל איבר של A קטן מכל איבר
של B , וכך של- A אין מקסימום. לדוגמה, אם r הוא מספר
רציונלי, אפשר לבחור $A = \{x: x < r\}$ ו- $B = \{x: x > r\}$ אז $A|B$
הוא החתך המתאים ל- r . חתכים אלה, שאותם אפשר
לאפיין גם בכך שלקבוצה B יש מינימום, נקראים "החתכים
הרציונליים". כך ניתן להגדיר גבולות באופן ריגורוזי.

חתכי דדקינד מהווים אחת משתי השיטות הקלאסיות לבנייה של שדה המספרים הממשיים
מתוך שדה המספרים הרציונליים. אלו הן הבניות הראשונות של שדה זה שאינן תלויות
באקסיומות גאומטריות. את הבניה הציג ריכארד דדקינד ב-1872.

באותה שנה הציע גיאורג קנטור את הבניה באמצעות "סדרות קושי": סידרה שאבריה הולכים
ומצטופפים: לכל מרחק חיובי, ε , יש מקום בסדרה שממנו והלאה המרחק בין כל שני אברים קטן
מ- ε . כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי. הכיוון ההפוך תלוי בתכונות של המרחב.



גרמניה (1805-1859) Peter Gustav Dirichlet

combinatorics, analytical number theory

Dirichlet's function, series, units law

Dirichlet's principle (dove's nest)

אם יש n יונים ו- m תאים בשובך, ו- $m < n$ יהיה לפחות
תא אחד עם לפחות שתי יונים.
למשל:



בקבוצה של 13 אנשים שניים לפחות נולדו באותו החדש
אם במגירה גרבים בשני צבעים, ונוציא 3 גרביים, יהיו שניים
באותו הצבע

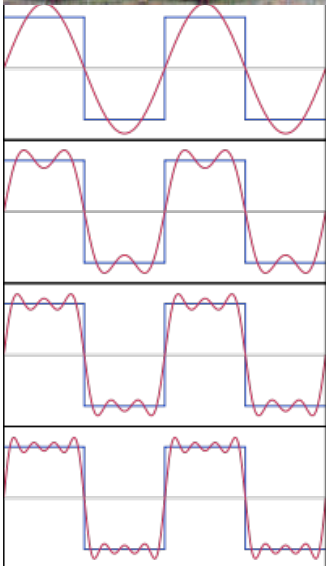
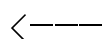
במסיבה אם כל אורח לוחץ יד לאורחים אחרים לכל היותר
פעם אחת, אזי יש שני אורחים שלחצו אותו מספר ידיים.
מכאן:

כל מספר אירציונאלי ניתן לקירוב רציונאלי בדיוק אפסילוני

בעיות צפיפות יחסית של מספרים ראשוניים

Dirichlet's theorem, function, series

כל פונקציה ניתנת לפיתוח בעזרת טור פוריה.



הסתברויות

צרפת Joseph Bertrand (1802-1829)

probability, number theory

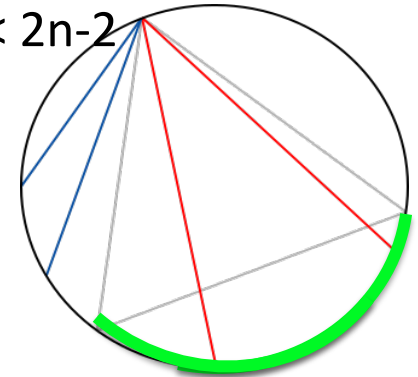
Bertrand conjecture: for any prime p exist integer n that: $n < p < 2n-2$

Bertrand-Tchebysheff's theorem: $n < p < 2n$

Bertrand paradox

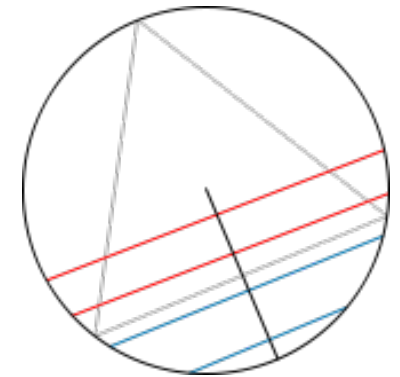
לא קשור ל-Emile Bertrand 1844-1909

עינית מיקרוסקופ לכוון פלטת פאזות

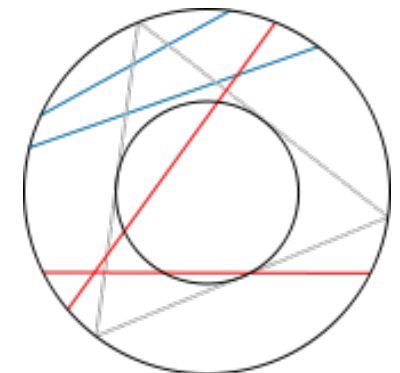


פרדוקס ברטרנד: מה הסיכוי שמיתר יהיה גדול מצלע משולש שווה שוקיים החסום בעיגול? שלוש דרכים הנותנות פתרונות שונים

1. צייר מיתר מקדקד המשולש. הסיכוי שיהיה גדול מהצלע יחסי לאורך הקשת הירוקה חלקי ההקף $= 1/3$

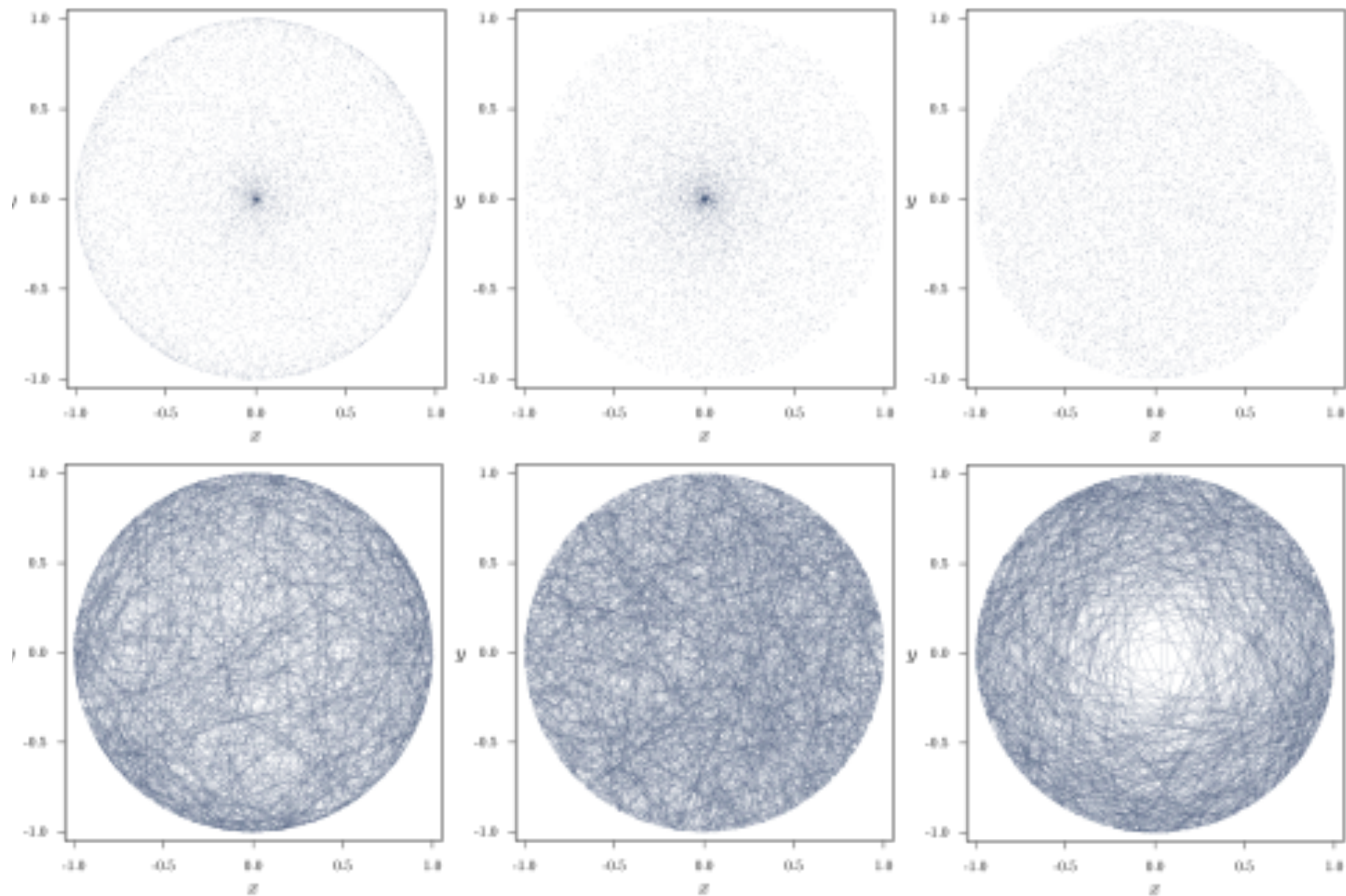


2. צייר רדיוס האנכי לצלע המשולש. הסיכוי שמיתר האנכי לרדיוס יהיה גדול מהצלע $= 1/2$



3. בחר נקודה בתוך העיגול וצייר מיתר שהיא אמצעו. אם המיתר חוצה את המעגל החסום במשולש, אורכו גדול מצלע המשולש. מיחס שטחי המעגל החוסם והחסום: הסיכוי $= 1/4$





למעלה – פילוג מרכזי המיתרים ולמטה ציור המיתרים שנבחרו באקראי לפי שלשת השיטות.
השוני בין הפילוגים הוא המקור לתשובות השונות לבעיית ההסתברות.

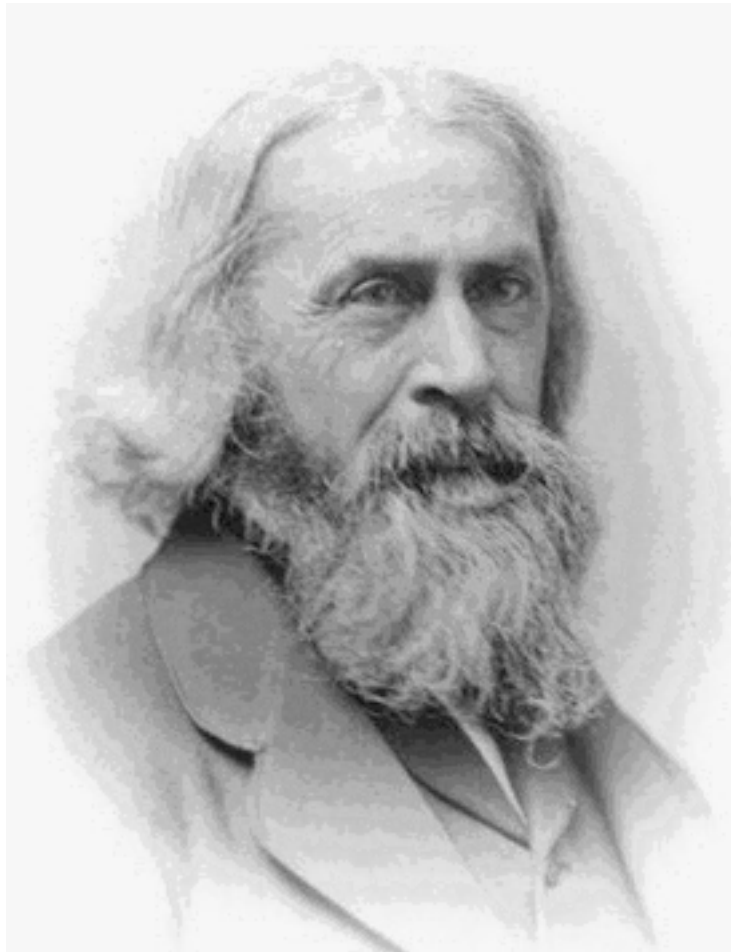
הסתברויות

1. הסתברות היא היחס בין "אירוע מעדף" לבין סה"כ האירועים האפשריים.
2. הנחת היסוד – לכל האירועים סיכויים שווים.
3. לאירועים בלתי תלויים ההסתברות שייקרו כולם הוא מכפילת ההסתברויות של כל אירוע בנפרד. $Pr(A, B) = Pr(A) * Pr(B)$
4. לאירועים שאינם בלתי תלויים: הסתברות B לאחר A היא הסתברות A כפול ההסתברות ש-A וגם B ייקרו. $Pr(A \text{ then } B) = Pr(A) * Pr(A \& B)$
5. ההסתברות ל-A לאחר שקרה B היא ההסתברות ש-A וגם B ייקרו חלקי הסתברות B $Pr(A \text{ after } B) = Pr(A \& B) / Pr(B)$

6. Three corollaries are given for the sixth principle, which amount to Bayesian probability. Where event $A_i \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ exhausts the list of possible causes for event B, $Pr(B) = Pr(A_1, A_2, \dots, A_n)$. Then

$$Pr(A_i|B) = Pr(A_i) \frac{Pr(B|A_i)}{\sum_j Pr(A_j) Pr(B|A_j)}.$$

אמריקה (1809–1880) Benjamin Peirce



1867–74 מפקח על סקר החופים הארה"ב

Peirce's Criterion

טיפול סטטיסטי בחייצנים outliers

נקראת סטטיסטיקה חסינה

Robust statistics

באופן כללי, מחשבים את הממוצע וסטית התקן של המדידות, ומתעלמים ממדידות הסוטות מהממוצע ביותר משתיים – שלש סטיות תקן. ומחשבים ממוצע וסטית תקן שוב ללא המדידות שזרקנו.

התוצאה מתכנסת מהר, שינוי זניח בחזרה על התעלמות מאירועים חייצניים.)

לסטטיסטיקה חסינה חשיבות עצומה בתיעוד נסיונות ביולוגיים, בהם אירועים חריגים יכולים להטות את התוצאות. גם בחוקים לאישור תרופות ע"י הרשות הפדראלית FDA ניתן להוציא מהמדגם חולים "מיוחדים" בהסברים מתאימים.

ימאי צרפתי (1733–1799) Jean-Charles, chevalier de Borda

Borda count

שיטת הצבעה של ראש ושל חברי מועצה, בה כל מצביע נותן רשימה לפי סדר עדיפויות, וכל נבחר מקבל נקודות לפי סכום הדרגות – ranks

היום יש בחירות, לרוב למועצות אקדמיות ושיפוטיות, המבוססות על **Borda count** זו שיטה הרבה יותר מאוזנת מבחירה של מועמד אחד ע"י כל בוחר, אך כמובן היתה קשה יותר ליישום בבחירות כלליות ע"י מליוני בוחרים לפני תקופת המחשבים. לא ברור מדוע אינה מיושמת בבחירות דיגיטליות, אולי שבגלל חוסר הבקיאות רוב הבוחרים לא מתעמקים בהעדפה של יותר מנבחר אחד.



אלגברה

Geodesist גרמניה (1842-1899) Wilhelm Jordan

Linear Algebra Gauss-Jordan elimination method

מהנדס שעסק במדידות. כדי להתאים פרמטרים בעזרת מיזעור השגיאות היה עליו להפוך מטריצות, והוא שיפר את יציבות היפוך בשיטת האלימינציה של גאוס. היציבות ע"י החלפות בין שורות ועמודים כך שהנירמול תמיד נעשה עם האיבר הגדול ביותר. נניח שאנו מחפשים התאמת הפרמטרים β של קומבינציה ליניארית של m פונקציות ϕ למדידות y בנקודות x

$$f(x, \beta) = \sum_{j=1}^m \beta_j \phi_j(x),$$

מטריצת ערכי הפונקציות בנקודות המדידה:

$$X_{ij} = \frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta_j} = \phi_j(x_i),$$

והפתרון ניתן ע"י היפוכה והכפלתו בוקטור המדידות:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y.$$



i := 1

j := 1

while (i ≤ m **and** j ≤ n) **do**

Find pivot in column j, starting in row i:

maxi := i

for k := i+1 **to** m **do**

if abs(A[k,j]) > abs(A[maxi,j]) **then**

maxi := k

end if

end for

if A[maxi,j] ≠ 0 **then**

swap rows i and maxi, but do not change the value of i

Now A[i,j] will contain the old value of A[maxi,j].

divide each entry in row i by A[i,j]

Now A[i,j] will have the value 1.

for u := i+1 **to** m **do**

subtract A[u,j] * row i from row u

Now A[u,j] will be 0,

*since $A[u,j] - A[i,j] * A[u,j] = A[u,j] - 1 * A[u,j] = 0$.*

end for

i := i + 1

end if

j := j + 1

end while

שיטת גאוס-ג'ורדן להיפוך מטריצה

Gauss-Jordan elimination method

For matrix inversion

גיאומטריה

Hermann Grassmann 1809-1877

ממציא האנליזה הוקטורית, ומכפלות וקטוריות פנימית וחיצונית.
לא קיבל הכרה בחייו, אלא לאחר שקושי פירסם עבודותיו כאילו בשמו.

Arthur Cayley 1821-1895

עורך דין ומתמטיקאי חובב שאיחד גיאומטריה אוקלידית, היטלית, ומטרית.
הציג אינווריאנטים אלגבריים ומטריצות ששימשו במכאניקת הקוואנטים.

Bernhard Riemann 1826-1866

סטודנט של גאוס. הגיאומטריה של משטחי רימן.
מערכת קואורדינטות גיאודזיות, וטנזור עקמומיות ב- n ממדים

Felix Klein 1849-1925

תורת החבורות – דרך לארגן סימטריות ואינוואריאנטים תחת התמרות בגיאומטריה.
ממציא "בקבוק קליין" – דוגמא למשטח סגור עם צד אחד – הרחבה תלת ממדית לטבעת
מוביוס (ראה להלן).

David Hilbert 1862-1943

תורת האיננוואריאנטים.
1899 ביסס גיאומטריה על 21 אכסיומות, והציג 23 בעיות פתוחות לפתרון במאה ה-20

Oswald Veblen 1880-1960

פיתח מערכת אכסיומות לגיאומטריה והיטלים (עם ז'והן יאנג John Young).
טופולוגיה וגיאומטריה דיפרנציאלית שפירסם עם סטודנט שלו Henry Whitehead ובו הגדרת
מניפולד גזיר **differentiable manifold**

Donald Coxeter 1907-2003

פוליטופים רגולאריים ב- n ממדים (חבורת קוקסטר), גיאומטריה לא אוקלידית, תורת
החבורות, קומבינטוריקה.

גיאומטריה אנליטית

גרמניה (1862-1943) David Hilbert I

algebraic number theory, Euclidic geometry

Hilbert space, 23 problems, dictionary, basis theorem, zeros theorem.

למד באוניברסיטת קנינגסברג בגרמניה, שם הכיר את מינקובסקי.

על מאמר של תורת האינוריאנטים (גדלים כמו אנרגיה ותנע הנשמרים) כתב

פאול גורדן **Paul Albert Gordan** שזו "תיאולוגיה ולא מתמטיקה".

ב-1895 עבר בהשפעת פליקס קליין **Felix Christian Klein** (בקבוק קליין בטופולוגיה)

לגוטינגן-מרכז עולמי למתמטיקה, ושם נשאר עד מותו. הוא היה עד להגליה מגוטינגן של

היהודים (והאישה היהודיה היחידה שהיתה פרופסורית, אמי נתר **Emmy Noether**)

(בתשובה לשאלת שר המדע הנאצי: איך המתמטיקה בגוטינגן אחרי הניקוי הארי מהיהודים,

ענה: אינה קיימת)

תרומתו הידועה ביותר: מרחבי הילברט, שעליהם התבססה המתמטיקה של המכאניקה

הקוונטית. הם מגדירים מרחב וקטורי מעל שדה שלם (כגון המספרים הממשיים) עם ממדים

סופיים או אין סופיים עם מכפילה פנימית (שתוצאתה סקלר) שמגדירה נורמה (מקביל

לפונקצית מרחק בין נקודות במרחב).





Otto Hölder (1859-1937) גרמניה Astronomy

Hölder's inequality:

אם $p, q \in [1, \infty]$

וקיים $1/p + 1/q = 1$

אזי

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

למשל עבור $p=q=2$ מקבלים אי שוויון קושי-שווארץ

Cauchy-Schwarz inequality

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{או} \quad \left| \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |u_j|^2 \sum_{k=1}^n |v_k|^2.$$

זו מעין הרחבה של אי שוויון המשולש בכל מרחב.

המשך – Otto Hölder (1859-1937)

Jordan-Hölder theorem:

בתורת החבורות, **סדרה נורמלית** של חבורה G היא שרשרת של תת חבורות, שכל אחת היא תת חבורה נורמלית של קודמתה. כלומר, $1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_n = G$, כאשר המשולש מסמן שמדובר בתת-חבורה נורמלית. יש המגדירים סדרה נורמלית של חבורה G כשרשרת של תת חבורות, שכל אחת היא תת חבורה נורמלית של G ואז שרשרת של תת חבורות, שכל אחת היא תת חבורה נורמלית של קודמתה נקראת **סדרה תת-נורמלית**. **גורמי הסדרה** הם כל חבורות המנה מהצורה G_i/G_{i+1}

עידון של סדרה הוא סדרה ארוכה יותר, הכוללת את כל תת-החבורות של הסדרה הקודמת. אפשר לעדן סדרה נתונה אם קיימת חבורה L שמקיימת, $G_i \triangleright L \triangleright G_{i+1}$, $G_i \neq L \neq G_{i+1}$. במקרה זה הסדרה $G = G_0 \triangleright \cdots \triangleright G_i \triangleright L \triangleright G_{i+1} \triangleright G_k$ היא עידון של הסדרה המקורית. **סדרת הרכב** של חבורה היא סדרה נורמלית שמסתיימת ב- $\{e\}$ ולא ניתן לעדן אותה מבלי להוסיף חזרות. ניתן לראות שסדרה נורמלית היא סדרת הרכב אם ורק אם היא נגמרת ב- $\{e\}$ וכל הגורמים שלה חבורות פשוטות.

החשיבות הרבה של סדרות ההרכב נעוצה בעובדה שגורמי ההרכב של כל חבורה סופית G הם קבועים עד כדי איזומורפיזם והחלפת סדר, ואינם תלויים בסדרת ההרכב (משפט זורדן-הולדר). חבורה פתירה היא חבורה שיש לה סדרה נורמלית עם גורמים אבליים; לחבורה שאינה פתירה יש תמיד סדרת הרכב עם גורם שהוא חבורה פשוטה לא אבלית.

אירלנד (1805-1865) William Roan Hamilton

graph theory, quaternion algebra, vector analysis

Hamiltonian , Hamiltonian path, Hamiltonian mechanics

פורמליזם חדש למכאניקה קלאסית ואלקטרומגנטיות.

עקרון הפעולה המינימאלית: לגרנז'יאן: האנרגיה הקינטית פחות הפוטנציאלי $L = T - V$.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

המרחיב את עקרון ד'למבר D'Alembert

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{המילטוניאן } H \text{ מקיים משוואת תנועה} \\ \text{כאשר} \end{array}$$
$$H = H \left(q_1, \dots, q_N; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}; t \right)$$

$$S = S(q_1, q_2 \dots q_N, t)$$

בפיזיקה: q הקואורדינטות, p התנע



צ'רפ'ת Charles Hermit (1815-1897)

geometry, number theory Hermit constant,

Hermit interpolation

בניגוד לאינטרפולציה של ניוטון, המתאימה פולינום לערכים ב- n נקודות, זו של הרמיט מתאימה את ערכי הפונקציה הפולינומיאלית ואת נגזרותיה (עד לנגזרת ה- m) לסט מדידות ונגזרות.



צ'רפ'ת (1845-1922) O'lerly Tarcam

number theory, geometry Tarcam's circle, Tarcam's points,

prove Feuerbach's theorem on 9 point circle

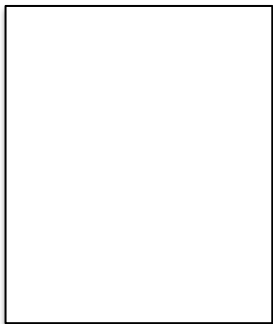
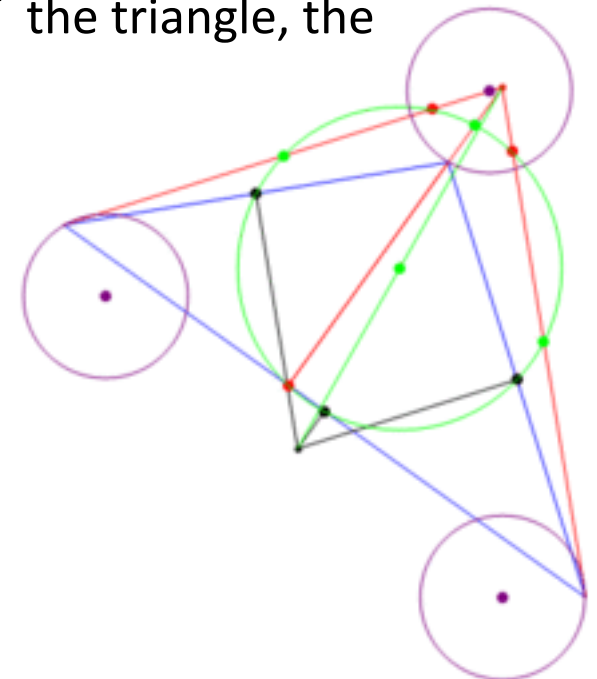
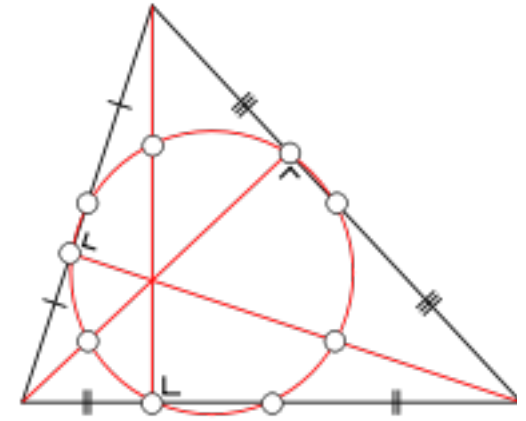
These nine points are:

The **midpoint** of each side of the triangle

The **foot** of each altitude

The **midpoint** of the line segment from each vertex of the triangle to the orthocenter (where the three altitudes meet; these line segments lie on their respective altitudes).

Even if the orthocenter and circumcenter fall outside of the triangle, the construction still works.



אנגליה (1802-1829) William Henry Young

number theory

Young's theorem:

אם פונקציה ונגזרותיה רציפות, הנגזרות החלקיות קומוטטיביות:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Young's inequality:

אם p, q הם מספרים ממשיים חיוביים המקיימים $p + 1/q = 1$ אזי:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

השוויון רק אם $a^p = b^q$



אם $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$

ונגדיר $\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

אזי $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$

כאשר * מסמל קונבולוציה (אי שוויון המשולש במימד אינסופי)

גרמניה Karl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

calculus Elliptical functions,

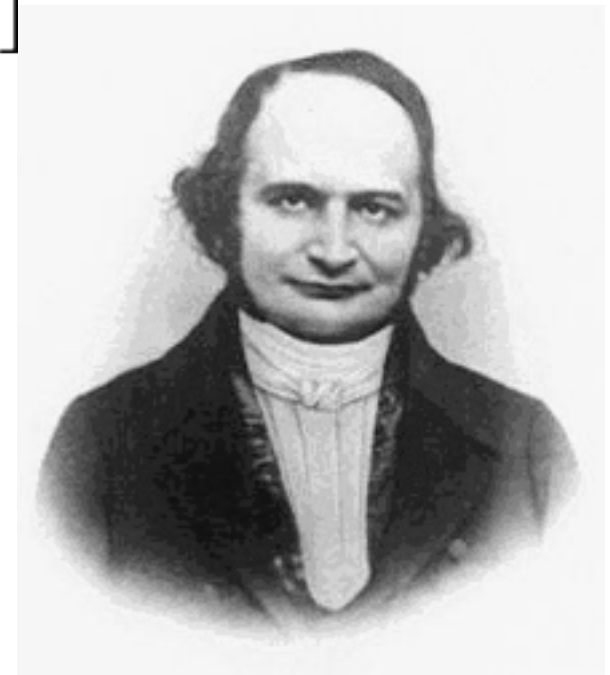
הפרופסור היהודי הראשון (שמונה כמובן אחרי שהתנצר) באוניברסיטה גרמנית

Jacobian determinant $J = \partial(f_1, \dots, f_m) / \partial(x_1, \dots, x_n) =$

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

זה הקירוב הליניארי בסביבת נקודה בפונקציה רב ממדית
מופיע בשינוי משתני אינטגרציה – הרחבה ממשתנה בודד

$$\int f(x) dx = \int f(y) \frac{dx}{dy} dy$$



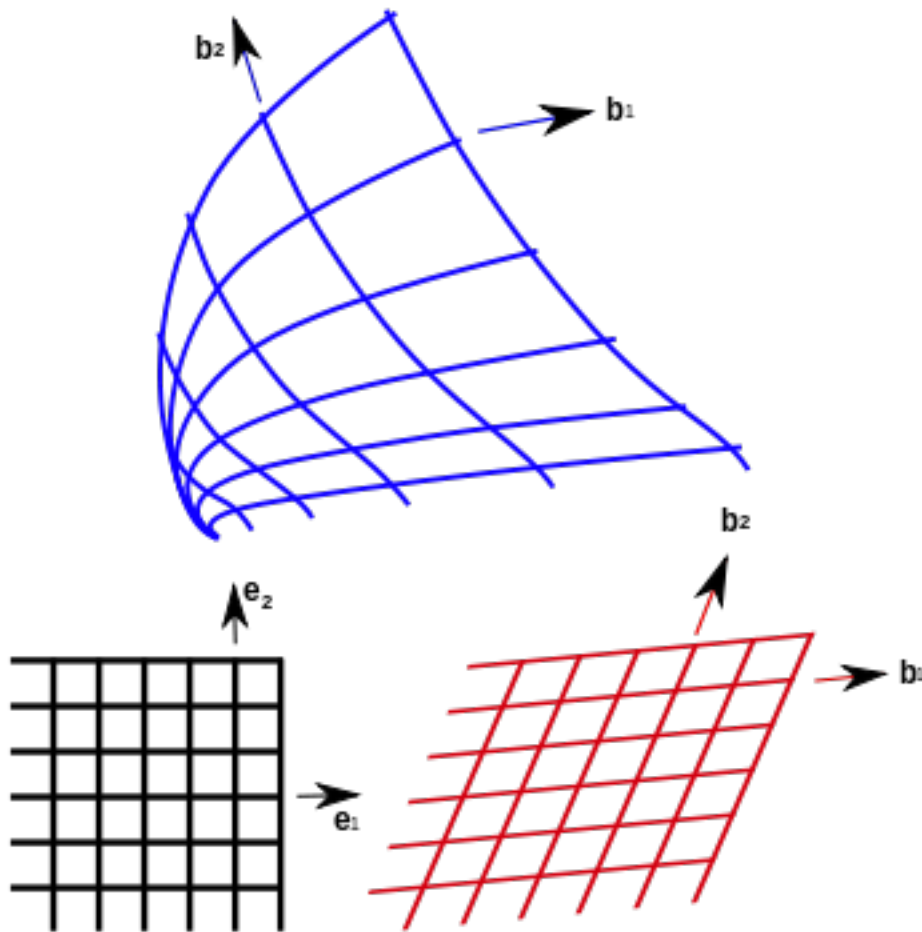
גבריאל לֵאון ז'אן באַפֿטיסט לאַמֶ (1795-1870)

number theory, calculus

Lamé's curve, Lamé constants, elasticity.

curvilinear coordinates:

local transformation Cartesian coordinates



צרפת (1842-1891) Eduard Lukas

number theory, Fibonacci's numbers.

Lukas series, Lukas-LeHamer test, Lukas-Karmeikle numbers,

$$\sum_{n=1}^N n^2 = M^2$$

יצירת ערימת כדורים חסומים בפירמידה

הציע אתגר: להוכיח כי הפתרון היחיד למשוואה הדיאופנטית

הוא $N=24$ $M=70$

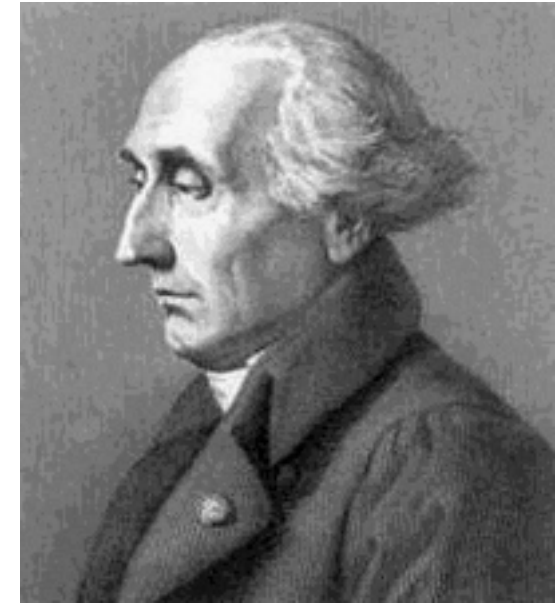
למשפט שהוכח ב-1918 חשיבות בתורת המיתרים...

חישב ש- $(2^{127} - 1)$ הוא ראשוני



Tower of Hanoy puzzle
פתרון איטרטיבי

איטליה-ברלין-פריז (1736-1813) Joseph Lewis Lagrange
see 18-th century



משוואת אוילר-לגראנג'

$$L_x(t, q(t), q'(t)) - \frac{d}{dt} L_v(t, q(t), q'(t)) = 0.$$

בפיזיקה - הלגרנג'יאן: $L = T - V$ מקיים משוואת לגראנג'.

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

מכפילי לגראנג': הופכת בעית מינימיזציה לפונקציה $f(\mathbf{x}_i)$ של n משתנים $\mathbf{x}_i$ עם k אילוצים $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_i)=0$ לבעית מינימיזציה של $h=f+l_k \mathbf{g}_k$ ב- $m+k$ משתנים בלי אילוצים.

דוגמא: מצא את המכסימום של xy על מעגל $x^2+y^2=1$

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = y + \lambda \frac{\partial (x^2 + y^2 - 1)}{\partial x} = 0 \rightarrow y = -2x\lambda \rightarrow \lambda = -\frac{y}{2x} \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = x + \lambda \frac{\partial (x^2 + y^2 - 1)}{\partial y} = 0 \rightarrow x = -2y\lambda \rightarrow x^2 = y^2 \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

צרפת (1752-1833) Adrian Murray Legendre

Legendre polynomials:

פתרונות למשוואה דיפרנציאלית המופיעה כחלק הרדיאלי של משוואת הגל של אלקטרון באטום המימן.
1806 מפתח, באופן בלתי תלוי בגאוס, התאמה ע"י מיזעור הסטיות הריבועיות, ופירסם ראשון את השיטה.



Joseph Liouville (1809-1882) צרפת

number theory

Liouville's number, Sturm-Liouville theorem, Liouville's equation, function, formula

Liouville's theorem:

כל פונקציה שלמה (יש לה טור טיילור) וחסומה חייבת להיות קבועה

1815 משפט ליוויל הראה שקיימים אינסוף מספרים טרנסצנדנטיים.
לדוגמא: מספר ליוויל:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.1100010000000000000000001000....$$

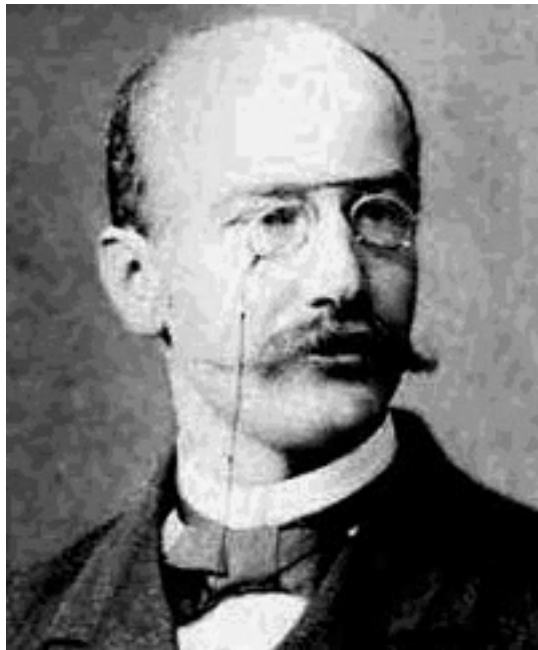


גרמניה (1862-1939) Karl Ferdinand Lindman

number theory, Lindman-Wierstrass theorem

1882 הוכיח שהגודל π אינו פיתרון של משוואה פולינומיאלית עם מקדמים ממשיים.
הרחבת המספרים האירציונאליים לטרנסצנדנטיים. וגם הוכחה שלא ניתן "לרבע את
המעגל" – בניה בסרגל ומחוגה של ריבוע השווה בשיטחו למעגל.
1873 שארל הרמיט הוכיח כי e הוא מספר טרנסצנדנטאלי.

ז'ורז' קנטור הראה שבעוד עצמת המספרים הרציונאליים היא $\aleph_0$ עצמת המספרים
הטרנסצנדנטיים היא $\aleph = 2^{\aleph_0}$

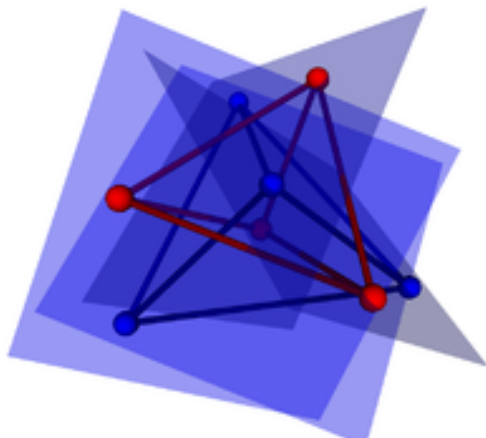
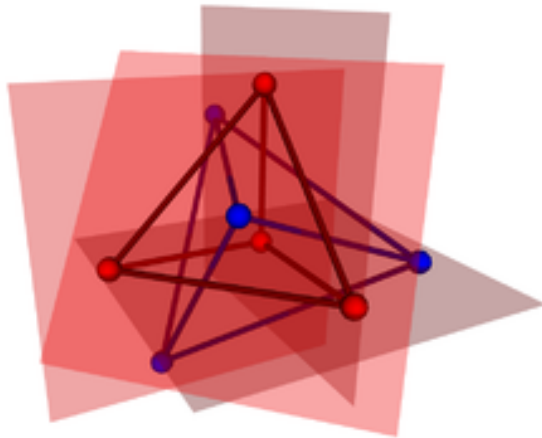


גרמניה (1790-1868) Augustus Ferdinand Möbius

number theory, topology. Moebius inversion formula

1858 בחקר משטחים עם צד אחד ממציא את טבעת מוביוס

Möbius configuration,
formed by two
mutually inscribed
tetrahedra



Moebius ring



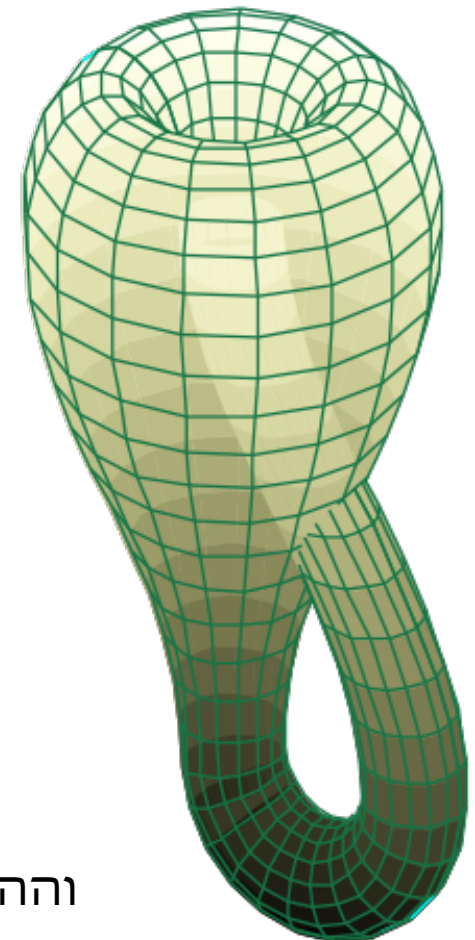
גרמניה (1858-1932) Christian Felix Klein

group theory, geometry Klein bottle, group, geometry, surface

1872 חקר התמרות חבורות גיאומטריות. שלשה סוגי גיאומטריות: Bolyai-
Lobachevsky לקו ישר שתי נקודות רחוקות אינסופית, Riemann הנקודות מדומות,
Euclid. במחקר זה המציא את בקבוק קליין ("הרחבה" תלת-ממדית לטבעת מוביוס),
וחבורת ארבע של קליין: החבורה הקטנה ביותר שאינה ציקלית.



*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

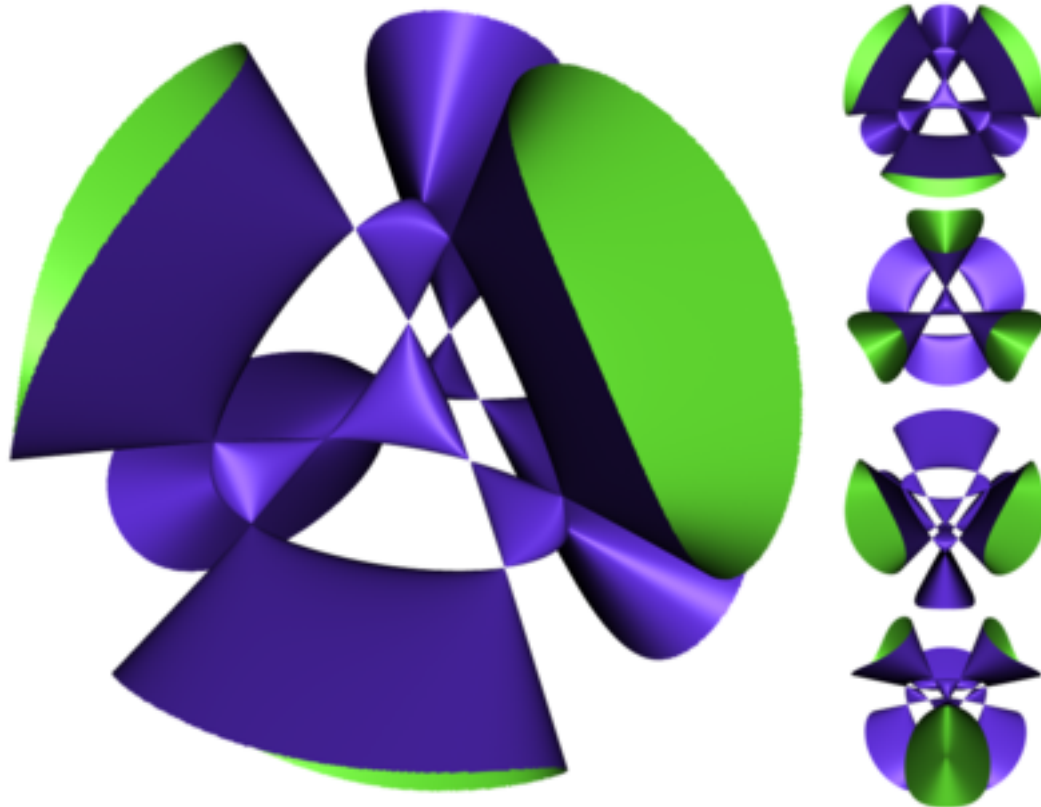


לוח הכפל לחבורת הארבע של קליין
וההצגה הגיאומטרית: a,b שיקוף ראי c סיבוב

Ernst Eduard Kummer (1810-1892) גרמניה

number theory. Kummer function, series,

Kummer surface: results from taking the quotient of a two-dimensional abelian variety by the cyclic group $\{1, -1\}$



בלגיה (1814-1894) Eugene Charle Catalan

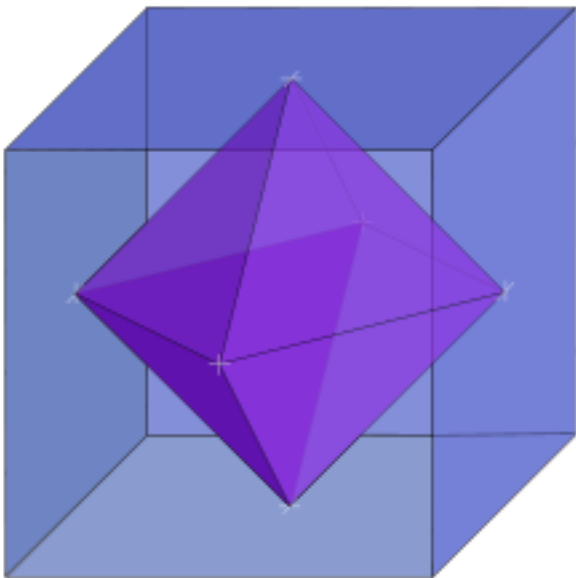
number theory Catalan numbers, constants, problem, equation

השערת קטלן: **Katalan conjecture** הפתרון היחיד לחזקות עוקבות של מספרים שלמים

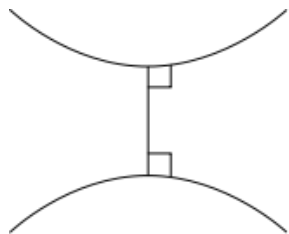
$x^a - y^b = 1$ עבור $a, b > 1, x, y > 0$ הוא $x = 3, a = 2, y = 2, b = 3$

Katalan solids: or **Archimedean dual**

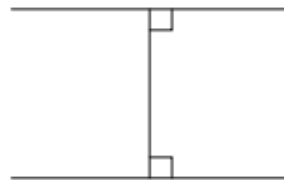
קדקדי פוליאדרון הנמצאים במרכזי פאות הפוליאדרון הדואלי



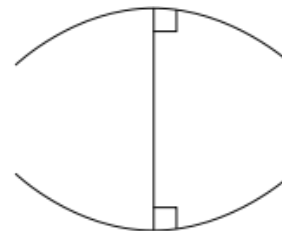
רוסיה 1826, Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)
לובצ'בסקי מפתח גיאומטריה היפרבולית (לא אוקלידית) בה יותר ממקביל אחד עובר
בנקודה. חשיבות ליחסיות כללית



Hyperbolic



Euclidean



Elliptic

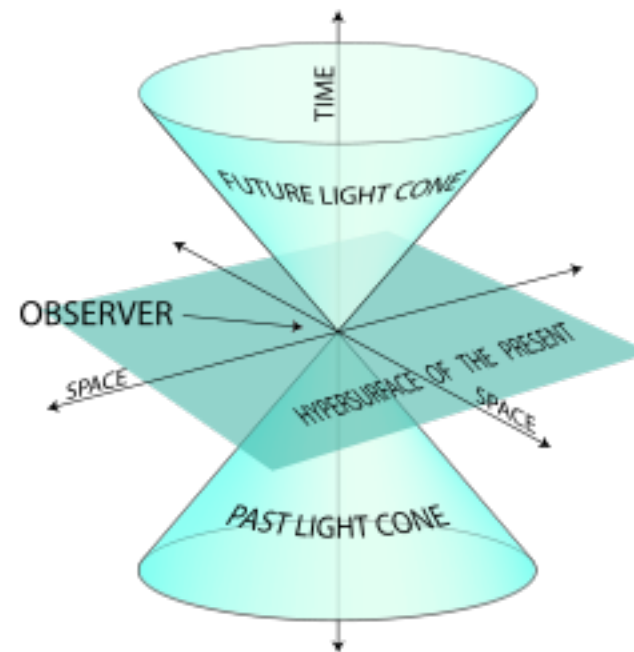


גרמניה (1864-1909) Herman Minkowski

number theory

Minkovski's theorem, inequality

מינקובסקי היה מורו של איינשטיין
מרחב מינקובסקי 4 ממדי: ייצוג גיאומטרי של היחסיות.



Marin Mersenne (1588-1648) צרפת

Mersen (1856-1922) ????

number theory, father of acoustics

Mersen's numbers (primes)



גרמניה (1882-1935) Emmy Noether

class theory, commutative algebra

Neter's normalization theorem, Neter's group

האשה (וגם יהודיה) הראשונה שקיבלה מישורה אקדמית בגרמניה. פוטרה מגוטינגן עם עליית הנאצים ועברה לארה"ב.

קשר בין סימטריה של משוואות מצב לחוקי שימור.
המשפט הראשון של נטר: כל סימטריה של חוקי התנועה של מערכת פיזיקאלית הניתנת לגזירה מתאים לחוק שימור.

למשל:

שימור תנע - נובע מסימטריה להעתקה מרחבית
שימור מומנט זוויתי - נובע מסימטריה לסיבוב
שימור אנרגיה - נובע מסימטריה להעתקה בזמן

מכאן ניבאו בדעיכת חלקיקים קיום של מוצרי פירוק שהיו קשים לגילוי ישיר (כמו הניוטרינו), ונגזרו חוקי השימור של מספרים קוואנטים נוספים המאפיינים חלקיקי יסוד, כגון שימור מטען, מספרים בריונים ולפטונים, זוגיות, מוזריות, ואיזו-ספין.



אירלנד George Gabriel Stokes (1819-1903)

Stokes theorem

מקשר בין אינטגרל נפח Ω על נגזרת ω לבין אינטגרל שפה $\partial\Omega$ על פונקציה סקלרית ω

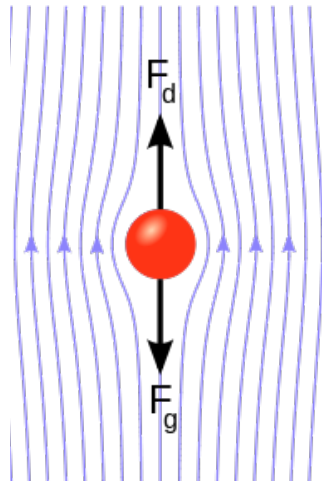
$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega.$$

Kelvin–Stokes theorem

מקשר בין אינטגרל נפח Ω על $\text{curl} F = \nabla F$ לבין אינטגרל שפה $\partial\Omega$ על הפונקציה הוקטורית F

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

חשיבות הקשרים האלה עצומה לפיתוח המתמטיקה של תורת השדות האלקטרומגנטיים. מתוכם ניתן לחשב את השדה החשמלי והמגנטי בכל נקודה במרחב אם נתון פילוג המטען או הזרם.



Stokes law:

ראה בפיזיקה: נפילת כדור בנוזל צמיג



Thomas Jean Stieltjes (1866-1894) הולנד

mathematical analysis

Riman-Stieltjes integral, Lebesgue-Stieltjes integral,





אנגליה (1814-1897) James Joseph Sylvester

Linear algebra, geometry. Sylvester's theorem

פתרון סגור לבעיית המטבעות של פרובניוס Frobenius :
הערך הגבוה ביותר שלא ניתן לשלם עם שני סוגי מטבעות.
למשל: עם מטבעות של 2 ו-5 אי אפשר לשלם 3,
אבל כן כל מספר גדול יותר.

א השוויון של סילוסטר לדרגה rank של מטריצות ממימד n

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB).$$

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(B) + \text{rank}(ABC).$$

דרגת מטריצה הוא המימד הגבוה ביותר של מרחב וקטורי הנפרש ע"י שורות המטריצה

תנאי הכרחי ומספיק לחיוביות postitively defined של מטריצה הרמיטית שכל המינורים המובילים שלה leading principal minors חיוביים.
מינור מוביל מסדר k למטריצה הוא הדטרמיננט של תת-מטריצת k השורות העליונות והעמודים השמאליים.

ביטוי פונציה של מטריצה $f(A)$ בעזרת ערכים ווקטורים העצמיים של A

$$f(A) = \sum_{i=1}^k f(\lambda_i) A_i ,$$

משפט הדטרמיננטים של סילוסטר: $\det(I_p + AB) = \det(I_n + BA)$,

ממדי A הם $p \times n$ וממדי B הם $n \times p$; כאשר I הן מטריצות היחידה

polymath צרפת (1854-1912) Jules-Henry Poincaré

מתמטיקאי תלמיד של הרמיט, שגם למד הנדסת מכרות ועבד בשטח במקביל למתמטיקה. במחקרו על משוואות דיפרנציאליות חקר את הקשר הגיאומטרי לפתרונות.

השערת פואנקרה : יריעה טופולוגית תלת ממדית פשוטת-קשירות, (סגורה קומפקטית, ללא שפה וללא חורים) הומיאומורפית לכדור. פתרון ע: יגריגורי פרלמן (יהודי רוסי) 2002-6
חבורת פואנקרה: החבורה המעתיקה ווקטורי מרחב-זמן במרחב מינקובסקי $xyzt$ תוך שימור המטריקה $ds^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$
במחקרו על בעית 3 גופים שהראה קיום פתרונות כאוטים למשוואות דטרמיניסטיות, כגון:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x,$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho x - xz - y,$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z.$$

ניסח את עקרון היחסיות- חוקי הפיזיקה זהים למערכת נעה.
1879 הראה איך להשתמש בפונקציות אוטומורפיות כקואורדינטות אחדות על עקומה אלגברית

התערב לטובת דרייפוס במשפטו וטען שההאשמות נגדו חסרות בסיס.



Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) physicist

1902 פרס נובל עם זימן Pieter Zeeman על התיאוריה והסבר אפקט זימן
מפתח את ההתמרה ה-4 ממדיית ששימשה את איינשטיין ביחסיות במרחב-זמן.

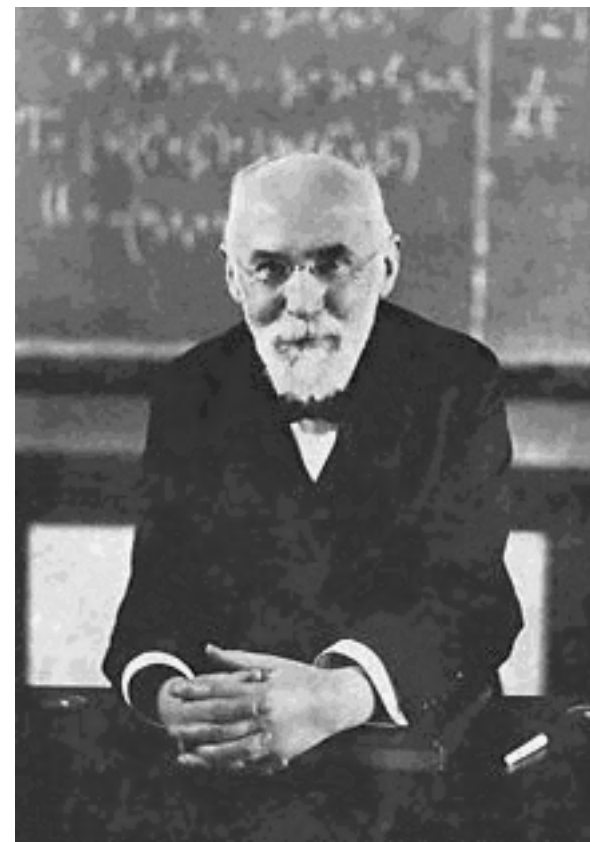
$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$$

$$x = \gamma (x' + vt')$$

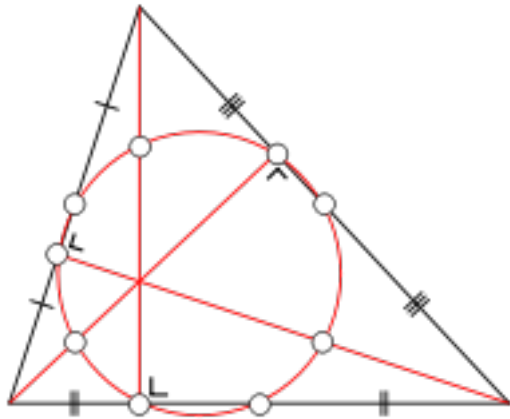
$$y = y'$$

$$z = z',$$

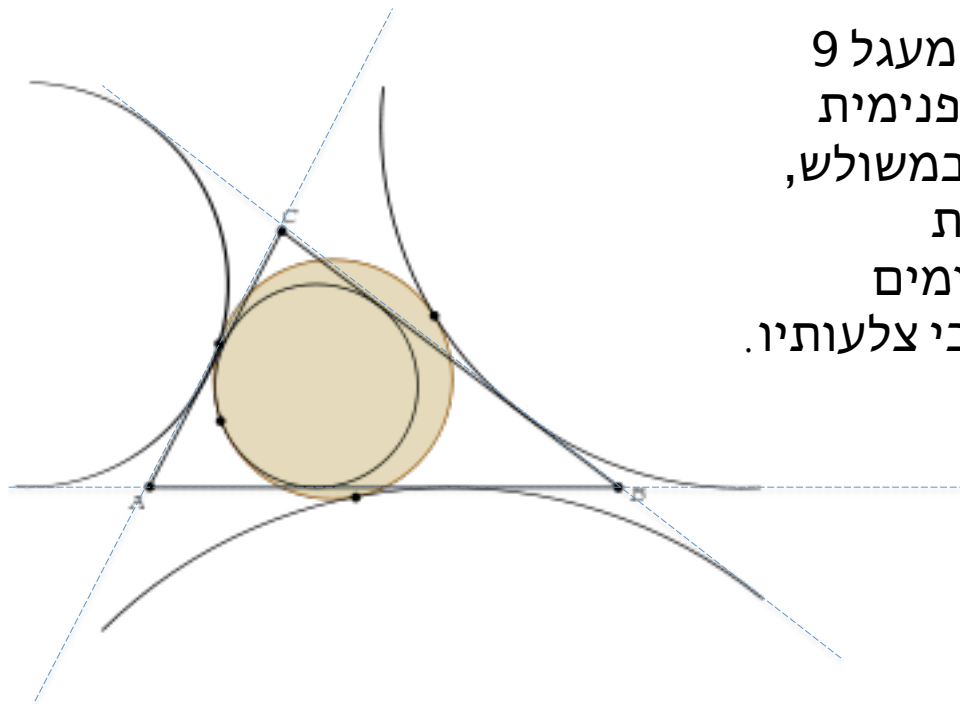


גרמניה (1800-1834) Karl Wilhelm Feuerbach

geometry. Feuerbach's theorem



ראה גם בעית 9 נקודות המעגל של Olery Tarcam
לכל משולש תשע הנקודות כלהלן נמצאות על מעגל:
3 מרכזי הצלעות,
שלשת נקודות הבסיס לאנכים,
ושלשת מרכזי קטעי האנכים בין הקדקדים ונקודת מפגשם.



משפט פויירבך: מעגל 9
הנקודות משיק פנימית
למעגל החסום במשולש,
וחיצונית לשלשת
המעגלים החסומים
חיצונית להמשכי צלעותיו.



איטליה (1858-1932) Giuseppe Peano

group theory, logics

Peano's projective plane,

1889 : אכסיומות פיאנו להגדרת המספרים הטבעיים, בדומה לאכסיומות הגיאומטריה של אוקלידס) מהווה בסיס עליו ניתן להגדיר פעולות ולהרחיב למספרים שליליים, רציונאליים ו:

1. האפס הוא מספר. (אך אינו עוקב לאף מספר)

2. אם a הוא מספר גם עוקבו הוא מספר.

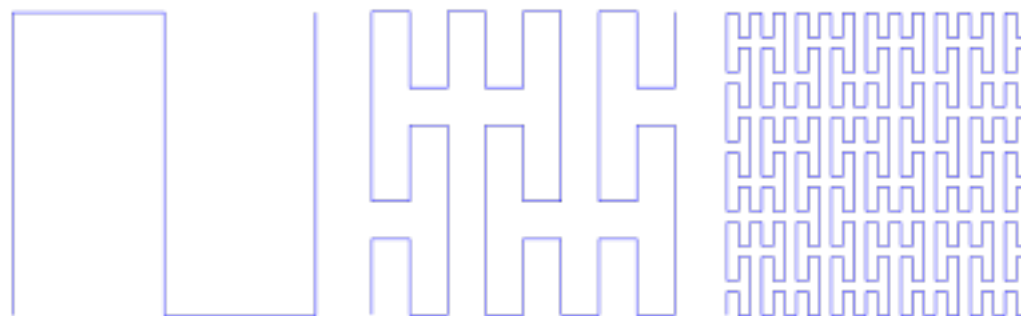
3. אפס אינו עוקב לאף מספר.

4. שני מספרים שעוקביהם זהים הם זהים בעצמם.

5. (אקסיומת האינדוקציה) אם קבוצה מכילה אפס וכל העוקבים, היא מכילה את כל המספרים.



שלשת האיטרציות הראשונות של בנית עקום פיאנו שבגבול ממלאת את המרחב



אנגליה (1857-1936) Carl Pearson

Probability & Pearson's match



תרומותיו של פירסון ביססו חלק נכבד מהשיטות הסטטיסטיות בהם אנו משתמשים היום:

1. מקדם קורלציה – (כנראה הוגדר לראשונה ע"י פרנסיס גלטון) והקשר להתאמה (רגרסיה) ליניארית
2. מומנטים – הושאל מפיזיקה להתאמת התפלגויות סטטיסטיות
3. פונקציות התפלגות רציפות – המוגדרת ע"י מומנטים עד סדר רביעי
4. דמיון בין שתי קבוצות χ^2 Test או קבוצה ומודל, בהנחת התפלגויות נורמאליות, הורחבה בהמשך למרחק מהלנוביס (Mahalanobis)

5. איכות התאמת מודל – P-value, ממשיך את לפלאס שבדק מובהקות עודף זכרים בחצי מליון ילודים): ההסתברות שהנחת המודל אינה נכונה, או הנפח המשלים לכדור ברדיוס χ^2 פירסון (אח"כ גם Jerzy Neyman and Egon Pearson) יצרו בסיס לאישוש סטטיסטי של הנחת מודל (שגיאה מסוג-ראשון false positives).
6. אנליזת רכיבים ראשיים principle component analysis להתאמה פונקצית רב-משתנים ליניארית במרחב רב ממדים.

השקפים הבאים מסכמים נושאים חשובים אלה, ורצוי לתרגל את החישובים על נתונים שונים.

המשך Carl Pearson (1857-1936)

עם כל חשיבות תרומותיו של פירסון לסטטיסטיקה, חייבים להזכיר פן כואב בעבודתו. בארה"ב תורת הגזע היתה נפוצה גם בין ביולוגים, שניסו לתת לה בסיס מדעי. פירסון המציא מקדם ל"קישור בין גזעים" המבוסס על מדידות שונות של ממדי הגולגולת. הוא לא היה יחיד בין המדענים. הומבולד Humboldt הגרמני שעשה מסע גילויים במרכז אמריקה, הסתכן והוציא גולגולות מקברים של שבטי ילידים כדי לבצע עליהן מדידות כאלה ולהסיק קשרי מוצא מינים עם אוכלוסית אירופה.

מקדם קורלציה

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))(y_i - E(Y)).$$

covariance שונות

$$\bar{x} = E(x) = \sum(x_i)/n$$

ממוצעים

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2},$$

סטית תקן standard deviation

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

מקדם קורלציה correlation coefficient

מבטא אם כאשר משתנה אחד גדל, גם השני גדל, קטן או אקרעי.

בהתאמה ליניארית מלאה בין שני המשתנים: $\rho=1$

”אנטיקורלציה” בין שני המשתנים: $\rho=-1$

linear regression $y_i = \beta x_i + \alpha$ פתרון התאמת קו

הקו המתאים ביותר לקבוצת n נקודות (x_i, y_i)

$$\beta = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

$$\alpha = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\text{Cov}[x, y]}{\text{Var}[x]}$$

$$= \rho_{xy} * \sigma_y / \sigma_x$$

$$\alpha = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x},$$

קשר מקדם הקורלציה להתאמת הקו:

מומנטים

מומנט מסדר n של פונקציה $f(x)$ סביב $x=c$

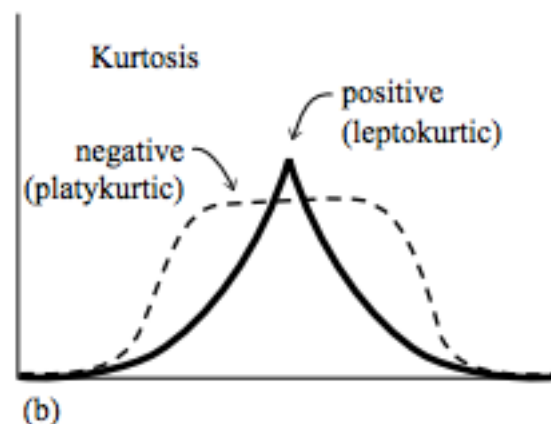
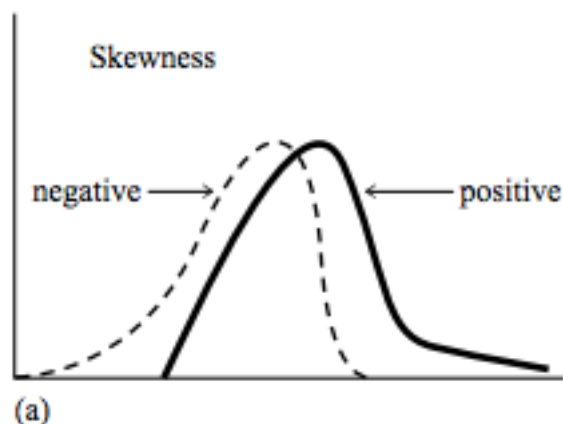
$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^n f(x) dx.$$

עבור סט סופי של נתונים, המומנט הראשון הוא הממוצע, המומנט השני סביב הממוצע הוא השונות, ריבוע סטית התקן עם תיקון $(n/(n-1))$:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

המומנט השלישי סביב הממוצע Skewness מבטא את סטיה חד צדדית של הפילוג

המומנט הרביעי סביב הממוצע מבטא את "משקל" זנבות הפילוג:

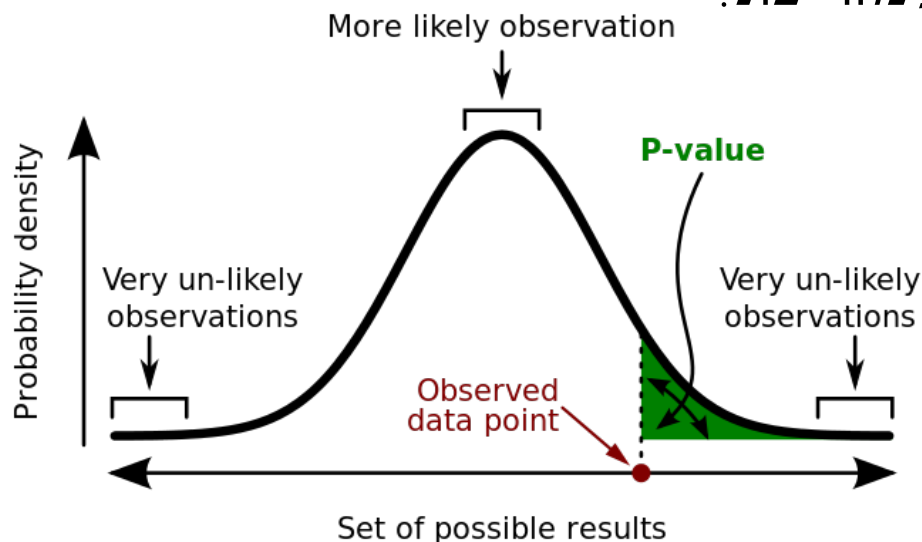


p-value

בהנחת מודל סטטיסטי "כהיפוטיזה" (כגון פילוג נורמאלי של המדידות) ועבור ערך נתון, מעריך את הסיכוי לקבל ערך קיצוני יותר. מבדילים בין מבחן "חד או דו צדדי". ככל ש-p-value קטן יותר, הערך הנתון יותר משמעותי סטטיסטית כמייצג את המערכת הנמדדת.

לדוגמא, אם מסדרת מדידות קיבלנו ממוצע c וסטית תקן s , ומניחים שהמדידות מפולגות בפילוג נורמאלי (גאוסיאן שמרכזו בממוצע ורוחבו הסטיה) הערך של p-value עבור $x+c$ ניתן מאינטגרל על "זנב" הגאוסיאן הנותן $\text{erf}(x) = \text{"פונקצית השגיאה"}$ ששמה נגזר משימוש זה.

דוגמא: הסיכוי לקבל 5 פעמים עץ בזריקת מטבע, בהנחה שהמטבע אינה מזוייפת, נותן $p\text{-value} = (1/2)^5 = 0.03$ (במבחן "זנב צד אחד" זו ההסתברות של האפשרות הקיצונית). אם מחליטים על ערך מובהקות של 0.05, קבלת עץ 5 פעמים שוללת הנחת מטבע שאינה מזוייפת – ז"א המטבע מזוייפת.



במבחן "שני זנבות"

$$1/2^{5*2} = 0.06$$

ולכן התוצאה אינה שוללת הנחת מטבע שאינה מזוייפת.

כמובן שהגדלת מספר הנסיונות משפרת מובהקות המסקנות.

p-value המשך

דוגמא נוספת בבדיקת זיוף מטבעות: מתוך 20 זריקות מקבלים 14 פעמים עץ.

מסכום הסיכויים ל-14 עצים, 15 .. ועד 20 פעמים עץ מתקבל right-tailed p-value

$$\begin{aligned} & \text{Prob}(14 \text{ heads}) + \text{Prob}(15 \text{ heads}) + \dots + \text{Prob}(20 \text{ heads}) \\ &= \frac{1}{2^{20}} \left[\binom{20}{14} + \binom{20}{15} + \dots + \binom{20}{20} \right] = \frac{60,460}{1,048,576} \approx 0.058 \end{aligned}$$

במבחן מובהקות של 5% ($p\text{-value} < 0.05$) התוצאה של 14 עצים לכן יכולה (אולי שולית) לקרות אם המטבע אינה מזויפת.

שגיאות מסוג I

Type-I errors = false positives

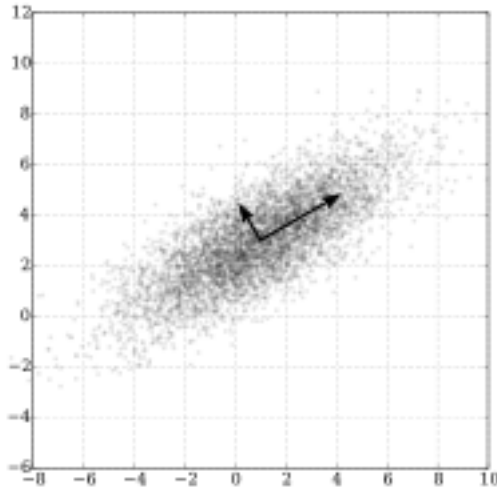
דחיית הנחה למרות נכונותה rejection of a null hypothesis that is actually true

שגיאות מסוג II

Type-II errors = false negatives

אי-דחיית הנחה למרות שהיא שגויה do not reject a null hypothesis that is false

אנליזת הרכיבים הראשיים Principal component analysis



אנליזה שימושית למרחב משתנים רב ממדי.
"מסובב" סיבוב רב ממדי את קואורדינטות הנתונים, כך
שהקואורדינטות החדשות (שהן קומבינציות ליניאריות של
הקואורדינטות המקוריות) ייצגו משתנים חסרי קורלציה.
לקואורדינטה הראשונה השונות הגבוהה ביותר, לשניה
(האנכית כלפי הראשונה) השונות השניה בגודלה וכו'.

בצבירת נתונים (למשל באוכלוסיה) אנו שומרים לכל דגם
מספר רב ככל האפשר של פרמטרים, אך ייתכן שחלק מהם פרמטרים תלויים במידת מה
(למשל משקל וגובה). אנליזת הרכיבים הראשיים מאפשרת להוריד את ממדיות
הבעיה, והצגת הנתונים בהטל לרכיבים הראשיים הראשונים (כמו השניים הראשונים
בדוגמא כאן).

מאחר והפרמטרים השונים לדגימה יכולים להיות שונים בסקלה (או אף ממדים שונים
כמו גובה ומשקל, ולכן גודל תלוי בסקלות שונות לכל פרמטר) מרחק אוקלידי בין
דגימות הוא פרמטר חסר משמעות. לכן מגדירים מרחק מהלנוביס, Mahalanobis בו כל
קואורדינטה ראשית מנורמלת בשונות שלה (תצוגת הדגימות בקואורדינטות
המנורמלות יוצרת כדור רב ממדי).

רוסיה (1821-1894) Pafnuty Tchebyshev [Tchebitcheff]

probability, number theory

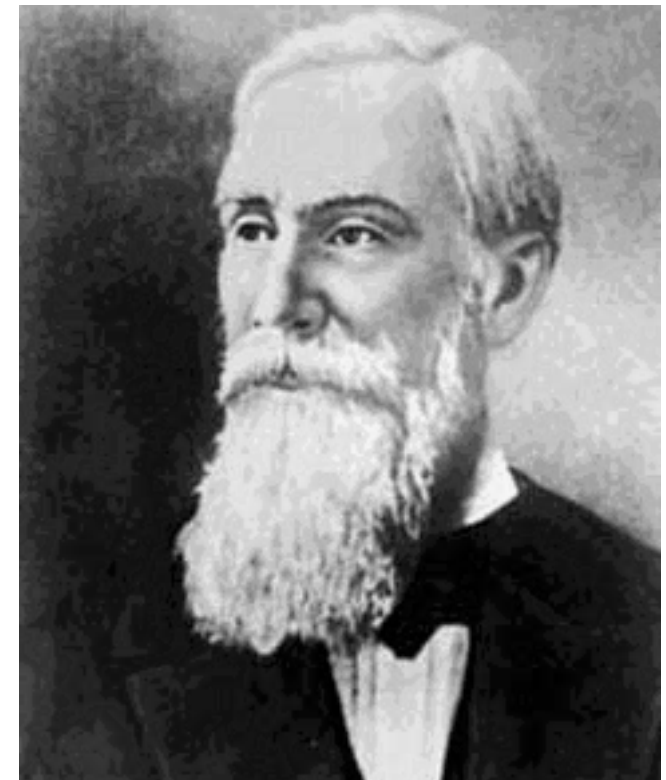
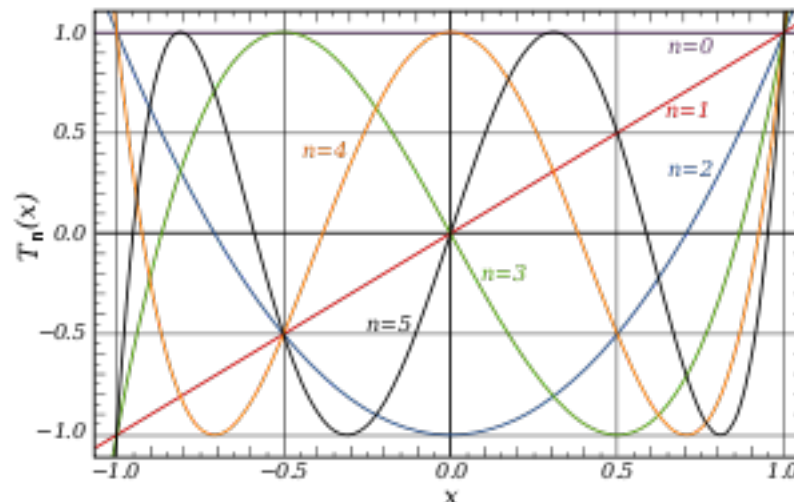
Tchebycheff's inequality, Bertrand-Tchebitcheff theorem,

אי-השוויון של צ'ביצ'ף: אם x הוא משתנה אקראי עם סטיית-תקן $\sigma > 0$ אזי ההסתברות ש- x יהיה במרחק מהממוצע $\langle x \rangle$ לא פחות מ- $a\sigma$ הוא

$$\Pr(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}.$$

משתמשים באי השוויון להוכחת החוק החלש של מספרים גדולים: לכל a קטן ככל הרצוי, ממוצע התוצאות עבור n מספיק גדול יהיה קרוב ל- $\langle x \rangle$

אורטוגונאליות בתחום $(-1,1)$ Chebyshev poloms:



גרמניה (1871-1953) Ernest Zermelo

set theory, games theory

Zermelo-Fraenkel

אכסיומות המגדירות את תורת הסטים
משפט זרמלו: שבכל משחק תורות סופי, בעל ידיעה שלמה וללא מזל של שני שחקנים
שבו לא תיתכן תוצאת תיקו, קיימת אסטרטגיה המבטיחה לאחד השחקנים ניצחון.



צרפת (1789-1857) Augustine Lewis Cauchy

Probability, Cauchy-Rimman equations, Cauchy theorem, test, equality, random variate
Rigorous calculus and complex analysis, functions with singularities,
Elasticity, stress tensor, Convergence [delta epsilon definition]
ברח מצרפת בזמן המהפיכה וחזר בזמן נפוליאון השלישי.

Cauchy integral theorem

משפט האינטגרל של קושי

אינטגרל פונקציה לאורך מסלול סגור ופשוט (ללא קשרים) מתאפס. $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Cauchy Residue theorem

ההרחבה לפונקציות סינגולאריות

אינטגרל מסלול שווה לסכום השאריות Residue בתחום שהמסלול סוגר

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z),$$

כאשר השארית של פונקציה בנקודה z היא:

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z),$$

ומכאן גם:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz,$$

ולכן אי תלות האינטגרל במסלול

עבודתו של קושי ניתקה בין פונקציות אנליטיות והצגתן הגראפית,
וביססה ריגורוזית את תורת הפונקציות.

החשיבות לתורת השדות נובעת מכך ששדה היא פונקציה
סינגולארית, ואינטגרלי מסלול מגדירים עבודה או אנרגיה שדה.



גרמניה (1846-1918) George Cantor

calculus, set theory

Cantor theorem, lemma, function

Set theory: one-to-one correspondence,

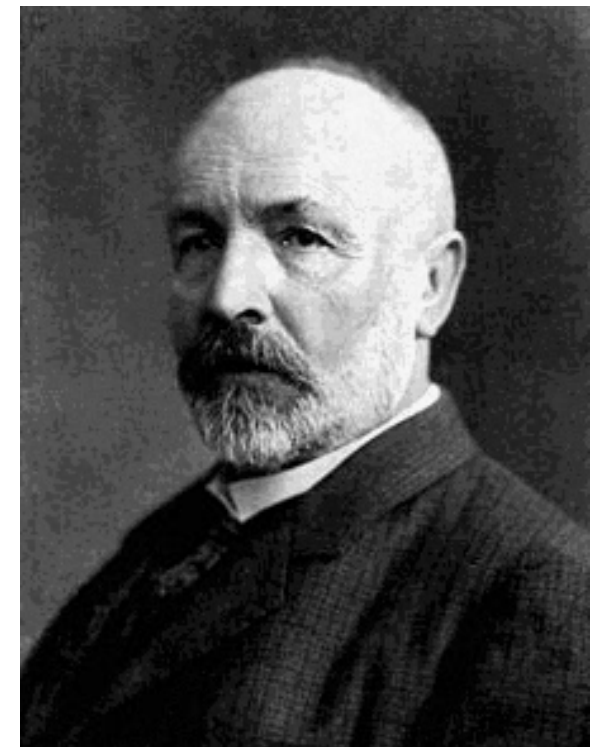
more real numbers than integers, infinity of infinities.

1869 קנטור מפרסם הוכחה (הפותרת פרדוקס כביכול) שקבוצה אינסופית אינה גדולה מחלק ממנה. הוכיח התאמה אחד-לאחד של קבוצת המספרים השלמים למספרים הזוגיים. ביסס את קבוצות האלמנטים הניתנים למניה (ספירה), והראה שקבוצת המספרים הרציונאליים ברת מניה, אך הממשיים אינה ברת מניה.

real numbers



natural (countable) numbers



$\mathbb{Z}_0$

סימן לגודל קבוצה ספירה. למשל, $1, 2, 3, 4, \dots$

למרות שבין 1 ו-2 יש אינסוף מספרים ראציונאליים ניתן לספור את כל המספרים הרציונאליים נראה זאת בהוכחה "קונסטרוקטיבית" ע"י מיפוי כל מספר ראציונאלי למספר שלם.



לעומת זאת לא ניתן "לספור" את המספרים האירציונאליים. נוכיח על דרך השלילה בשיטת קנטור של אלמנטים אלכסוניים:

נניח שרשמנו זיווגנו את כל אינסוף המספרים הממשיים בין 0 ל-1 למספרים השלמים. תחילת טבלת הזיווגים תיראה למשל כך

$1 \leftrightarrow 0.112452\dots$

$2 \leftrightarrow 0.743212\dots$

$3 \leftrightarrow 0.213945\dots$

$4 \leftrightarrow 0.432912\dots$

$5 \leftrightarrow 0.394854\dots$

אם ברשימה מספר ממשי עם מספר ספרות סופי אחרי הנקודה העשרונית נוסיף אינסוף אפסים. ניצור עכשיו מספר מהספרה הראשונה אחרי הנקודה השונה מהמספר הראשון ברשימה (אדום), הספרה השניה שונה מזו של המספר השני (ירוק) וכו' למשל:

$0.85863\dots$

אנו בטוחים שמספר זה לא הופיע ברשימה: כי לכל מספר ברשימה יש לפחות ספרה אחת השונה מהספרה המתאימה במספר שיצרנו: הנה ההשוואה לתחילת הטבלא:

0.11245...	0.74321...	0.21394...	0.43291...	0.39485...
0.85863...	0.85863...	0.85863...	0.85863...	0.85863...

זה נוגד את ההנחה שלנו, ולכן ההנחה אינה נכונה. המסקנה היא ש"חזק" (cardinality) קבוצת המספרים הממשיים גדול מחזק קבוצת המספרים השלמים, ואינו ניתן לספירה. קנטור הניח שאין קבוצה אינסופית שחזקה הוא בין הקבוצה הספירה לקבוצת המספרים הממשיים (היפוטיזת הרצף) אך הנחה זו לא הוכחה עד היום.

אנגליה (1842-1928) Alan Joseph Cunningham

number theory

Cunningham's numbers, $b^n \pm 1$ when b cannot be expressed as k^m (n, k, m integers)

$$2^{2^n} + 1$$

השאלה האם מספרי קנינגהם ראשוניים.
מזכיר את השאלה האם מספרי פרמה ראשוניים
ואת מספרי מרסן $2^n - 1$ שחלקם ראשוניים

Leopold Kronecker (1823-1891) גרמניה

logics, number theory

Kronecker's delta function

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j, \\ 1 & \text{if } i = j. \end{cases}$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \delta_{ij} = a_j.$$

Dirac delta function

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) f(x) dx = f(y),$$



ארה"ב (1879-1967) Robert Carmichael

number theory, relativity

Lukas-Carmichael number, conjecture

מספרי לוקאס-קרמייקל n מקיימים $b^n = b \pmod{n}$

מציאת המספרים והוכחת תכונותיהם המעניינות מעסיקות מתמטיקאים עד היום.



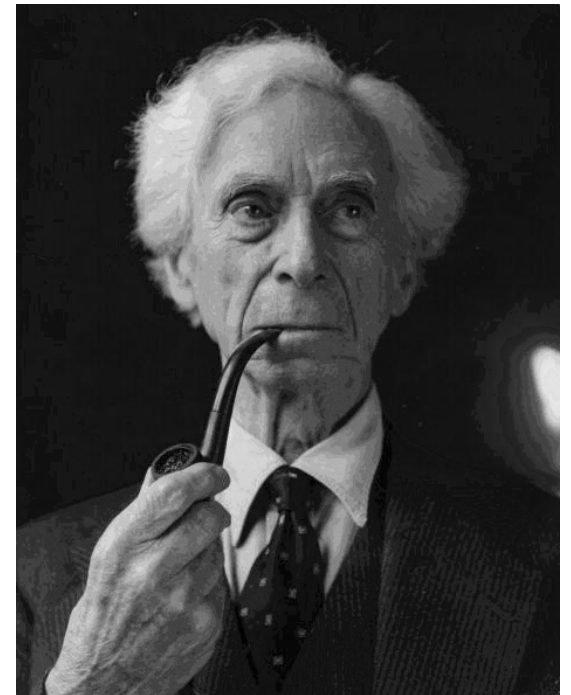
אנגליה (1872-1970) **Bertrand Russell**

group theory, logics and language

Russell paradox helped redefine the axioms of Cantor's set theory

Nobel prize in literature.

היה פציפיסט במחה"ע הראשונה, אך "הותמר" לנוכח היטלר.

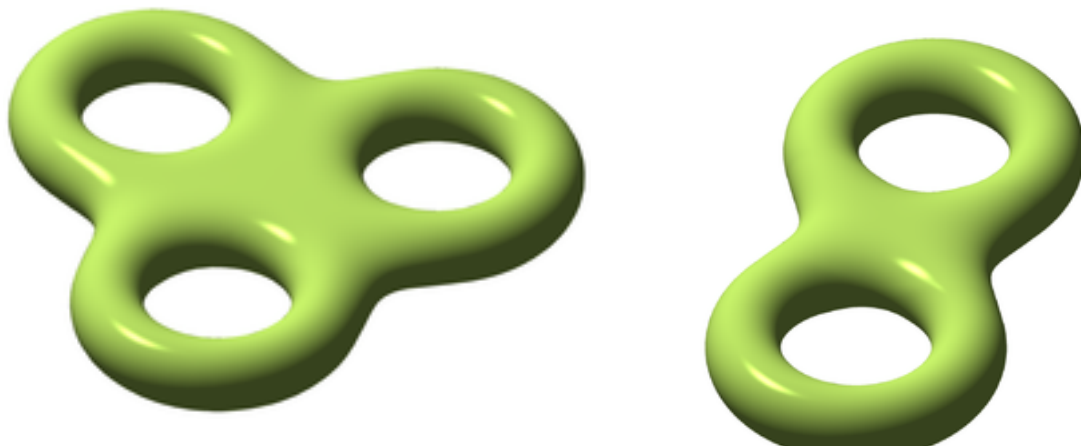


גרמניה (1839-1866) Gustav Roch

complex analysis, analytical geometry

Riemann-Roch theorem

מקשר בין הגנוס של משטח רימן (מספר החורים במשטח) והתכונות האנליטיות של פונקצית המשטח

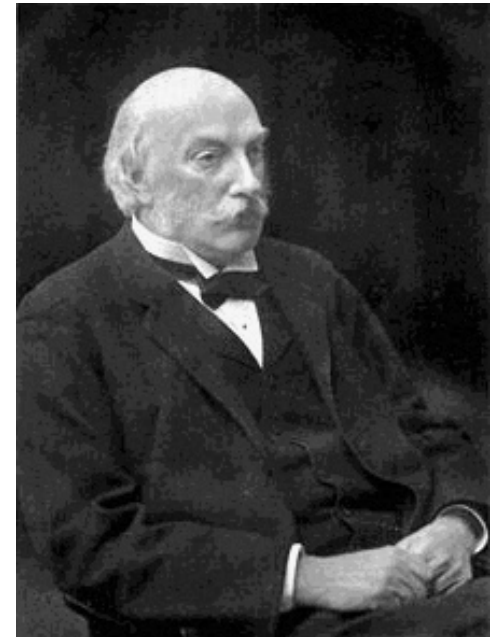


John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh (1842-1919) אנגליה

probability

Raileigh 's density function:

עיקר תרומותיו (וגם פרס נובל-1904) בפיזיקה.



גרמניה (1826-1866) George Bernhard Riemann

calculus, number theory

Riemann's hypothesis, zeta function, Riemann space, integral, sum

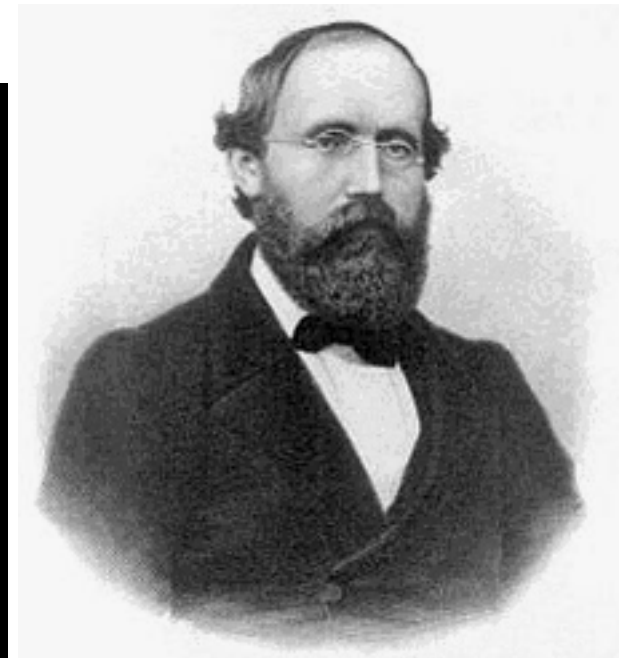
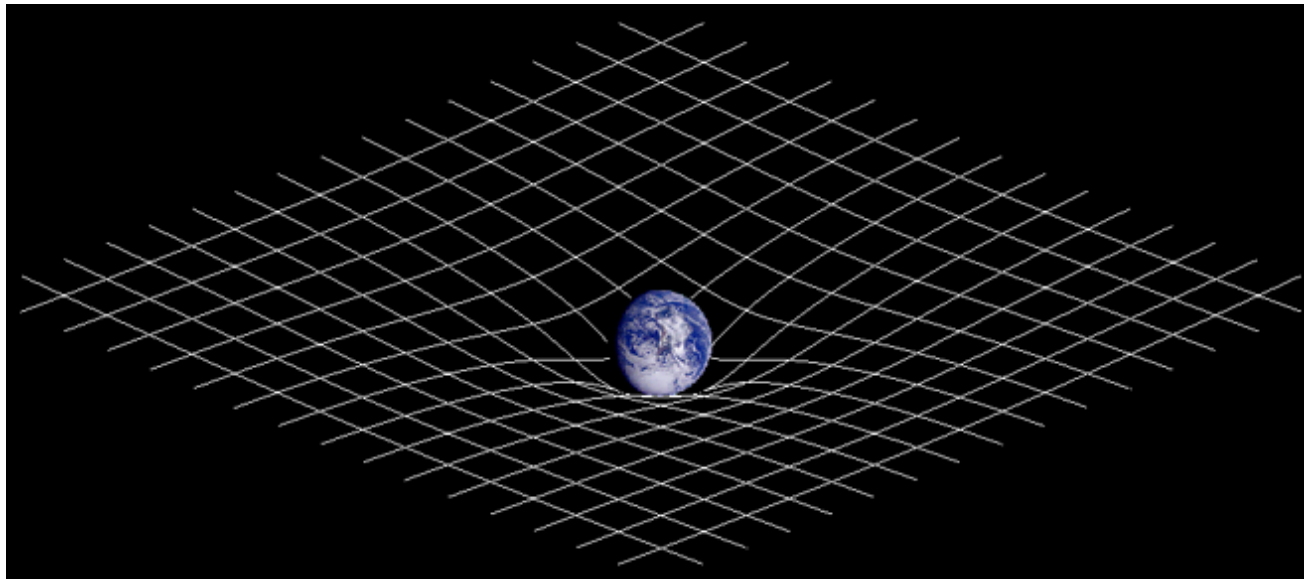
Cauchy-Riemann equations general relativity

1854 מרחב רימן – מרחב בו המטריקה שונה מנקודה לנקודה. תחליף להנחת

אוקלידה ה-5 (לקורקו מקביל אחד מנקודה)

1859 הרחיב גיאומטריה דיפרנציאלית של גאוס למרחב n ממדי

הבסיס ליחסיות הכללית



הודו (1887-1920) Srinivasa Ramanujan Iyengar

number theory, mathematical analysis

Ramanujan's conjecture on divisions, Tau function

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots}}}$$



גרמניה (1843-1921) Karl Hermann Amandus Schwarz

complex analysis

אישוויון קושי-שווארץ Cauchy-Schwarz inequality

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle,$$

or (כלל המשולש)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

or

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \sum_{k=1}^n |y_k|^2.$$

and

$$\text{Var}(Y) \geq \frac{\text{Cov}(Y, X) \text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)}.$$

Schwartz lemma

אם $|z| < 1$ מגדיר דיסק פתוח במישור הקומפלקסי, ו- $f(z)$ היא פונקציה גזירה בכל סביבה בדיסק, אזי אם $|f(z)| \leq |z|$ אזי: $|f'(0)| \leq 1$

למרות שהוכחו משפטים חזקים יותר, כמו משפט המיפוי של ריימן, משפט זה מבטא את הקשיחות של פונקציות קומפלקסיות גזירות.

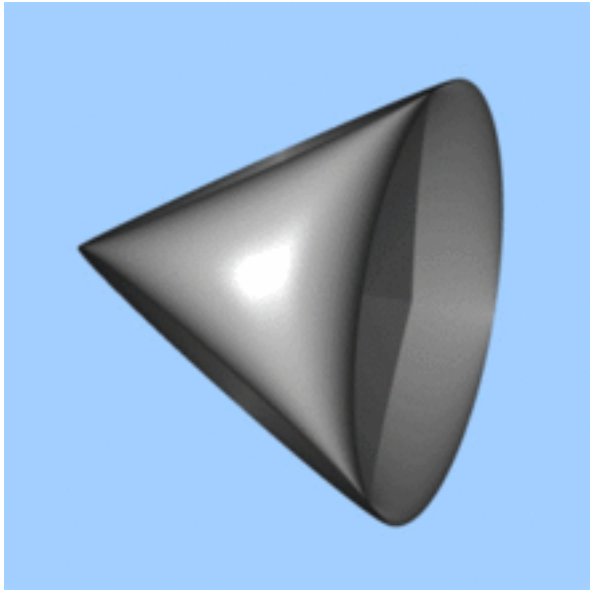


Jacob Steiner (1796-1863) שוייץ

geometry, mathematical analysis

Steiner's problem, Minkovsky-Steiner equation

Steiner's surface: $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - r^2xyz = 0$



פולניה (1882-1969) Waclaw Sierpinski

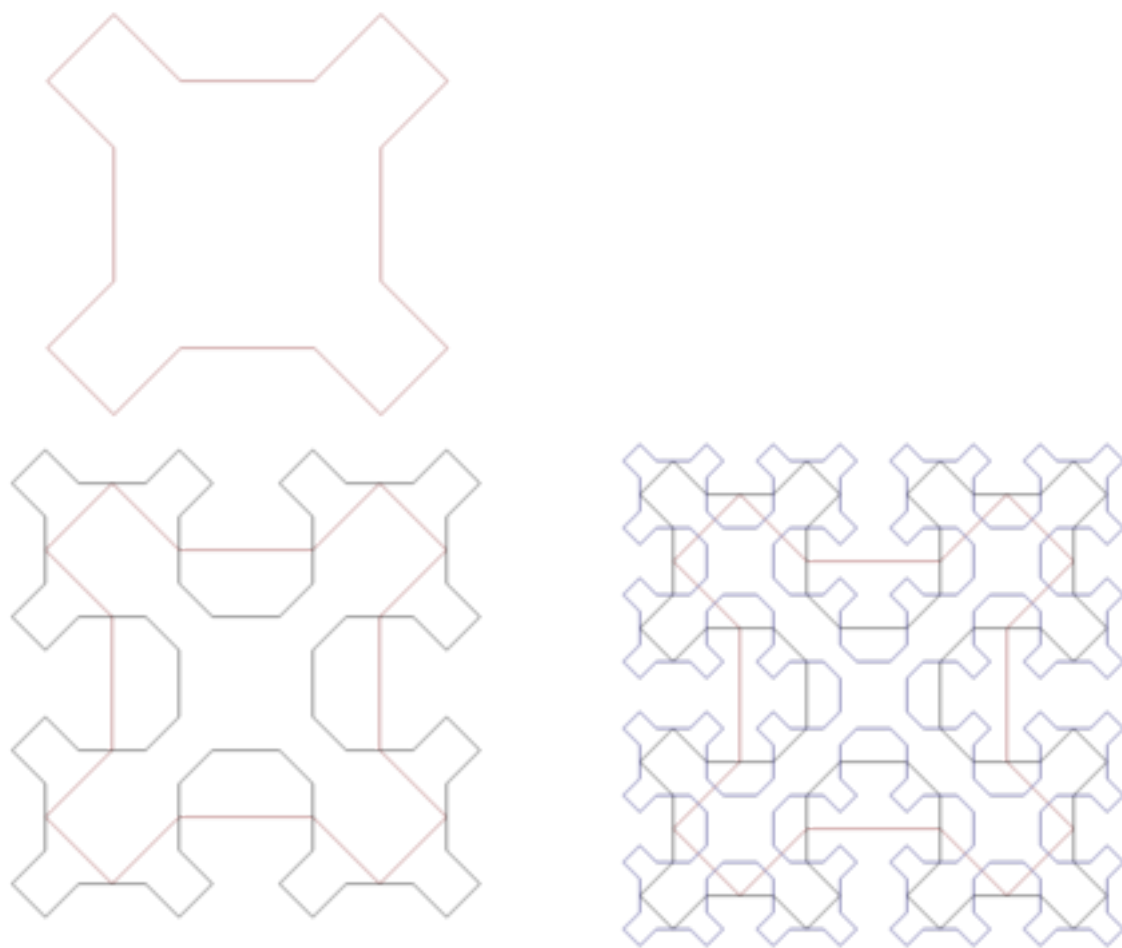
set theory, number theory, topology

sierpinski's triangle, carpet

sierpinski's curves of orders 2 & 3:

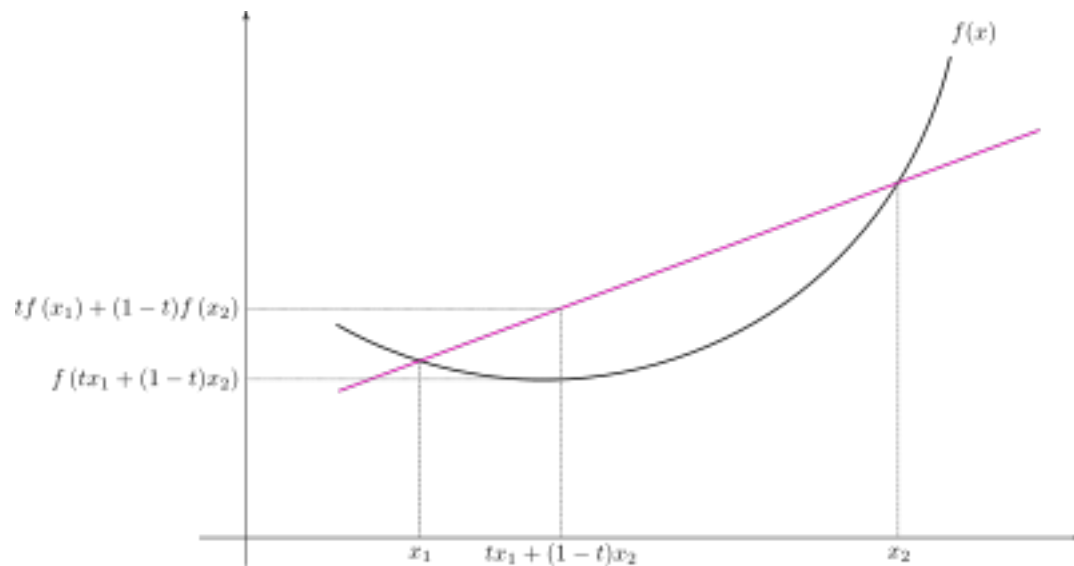
פרקטלים עם שטח המתכנס ל-5/12

$$l_n = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{2})2^n - \frac{1}{3}(2 - \sqrt{2})\frac{1}{2^n}$$



Johan Jensen 1859-1925 דנמרק Number theory

Jensen's inequality: relates the value of a convex function of an integral to the integral of the convex function:

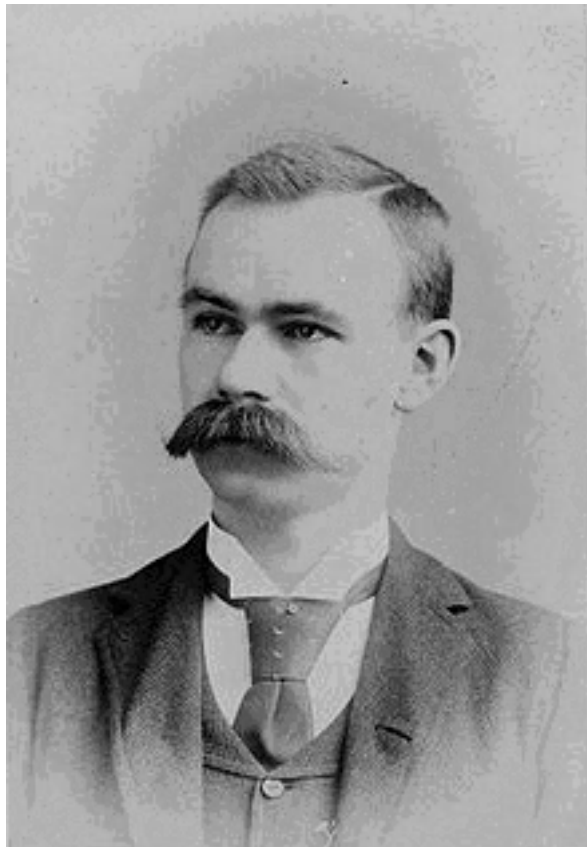


הרחבת המשפט שקו החותך עקומה קעורה
נמצא מעל כל נקודה בעקומה שבין שתי
נקודות החיתוך.



ארה"ב Herman Hollerith

1890 ממציא כרטיסים מנוקבים ומכונת קיטלוג ומיון ששימשו בארה"ב בסקרי אוכלוסיה, והופצו כבסיס לעיבוד נתונים במסחר. הקים חברה שהתאחדה בהמשך והקימה את IBM



1	1	3	0	2	4	10	On	S	A	C	E	a	c	e	g		EB	SB	Ch	Sy	U	Sh	Hk	Br	Rm
2	2	4	1	3	E	15	Off	IS	B	D	F	b	d	f	h		SY	X	Fp	Cn	R	X	Al	Cg	Kg
3	0	0	0	0	W	20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	1	1	1	1	0	25	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	2	2	2	2	5	30	B	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
C	3	3	3	3	0	3	C	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
D	4	4	4	4	1	4	D	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
E	5	5	5	5	2	C	E	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
F	6	6	6	6	A	D	F	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Q	7	7	7	7	B	E	Q	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
H	8	8	8	8	a	F	H	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
I	9	9	9	9	b	c	I	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9



נספח:

רשימת המדענים במאה הרומנטית

Adrain

Germain

Barlow

Poinsot

Gauss

Hecht

Brisson

Spence

Wronski

Gompertz

Crelle

Somerville

Poisson

Bolzano

Plana

Claude Mathieu

Briançon

Kulik

Bessel

Dupin

Navier

Binet

Arago

Horner

William Hamilton

Fresnel

Poncelet

Ohm

Cauchy

Möbius

Peacock

Savart

Petit

Babbage

Herschel

Coriolis

Lobachevsky

Olivier

Hopkins

Chasles

Green

Dandelin

Taurinus

Holmboe

Louis Richard

Lamé

Morin

Carlyle

Léger

Quetelet

Steiner

Sadi Carnot

Brashman

Bienaymé

Duhamel

Saint-Venant

Savary

Finck

von Staudt

Gudermann

Bobillier

Franz Neumann

Calpeyron

Gräffe

Talbot

Feuerbach

Clausen

Plücker

Airy

Cournot

Ostrogradski

Plateau

Abel

Bolyai

Libri

Sturm

Bellavitis

Doppler

Weber

Verhulst

Jacobi

Bunyakovsky

Jerrard

Sang

Dirichlet

Hamilton

Minding

Kirkman

De Morgan

Petzval

Listing

Dupré

Grassmann

Lioville

Benjamin Peirce

Pratt

Menabrea

MacCullagh

Kummer

Le Verrier

Hesse

Galois

Shanks

Göpel

Anstice

Duncan Gregory

Pierre Laurent

Schläfli

Catalan

Sylvester

Wantzel

Somov

Boole

Weierstrass

Lovelace

Frenet

Delaunay

Rosenhain

Wolf

Ferrel

Borchardt

Briot

Genocchi

Joachimsthal

Adams

Arnhold

Stokes

Serret

Bouquet

Salmon

Bonnet

Puiseux

Rankine

Jonquières

Todhunter

Heine

Chebyshev

Cayley

Helmholtz

Seidel

Clausius

Galton

Lissajous

Bertrand

Hermite

Hoüel

Eisenstein

Schlömilch

Betti

Amsler

Kronecker

Davidov

Codazzi

Kirchhoff

Thomson

Brioschi

Dase

Balmer

Carl Bjerknes

Spottiswoode

Vashchenko

Faó di Bruno

John Walker ??

Battaglini

Meissel

Riemann

Smith

Christian Wiener

Merrifield

Henry Watson

Roberts

Peterson

Bruno

Schroeter

Moritz Cantor

Christoffel

Hirst

Cremona

Routh

Tait

Mannheim

Dedekind

Maxwell

du Bois-Reymond

Dodgson

Carl Neumann

Lipschitz

Bour

Sylow

Clebsch

Fuchs

Laguerre

Venn

Newcomb

Josef Stefan

Emile Mathieu

Jevons

Méray

Beltrami

Casorati

Amringe

Weingarten

Gordan

Bachmann

Lexis

Tilly

Bugaev

Königsberger

Jordan

Hill

Reye

Thiele

Gibbs

Hankel

Adolph Mayer

Zeuthen

Barbier

Peterson

Charles Peirce

Saicci

Mertens

Neuberg

Lemoine

Thomae

Henrici

Abbe

McClintock

Rudolf Sturm

Loyd

Hermann Laurent

Schröder

Sokhotsky

Lucas

Stolz

Heinrich Weber

Darboux

Rosanes

Reynolds

Brill

Rayleigh

Lie

D'Ovidio

Schwartz

Geiser

Tarry

Pasch

Paul Tannery

Niven

Boltzmann

Lueroth

Mansion

Muir

Max Noether

Halphen

Wangerin

Tisserand

Cantor

Clifford

Brocard

Darwin

Dini

Edgeworth

Schoute

Mittag-Leffler

Poretsky

Bertini

Zhukovsky
Zolotarev
Killing
Greenhill
Castigliano
Suter
Jules Tannery
Korteweg
Schubert
Netto
Weyr
Eötvös
Bruns
Glaisher
Frege
Andreev
Gegenbauer
Sonin
Klein
Kempe
Frobenius
Lamb

Julius König

Woodward

Kovalevskaya

Heaviside

Gram

Ball

Pringsheim

Chrystal

Dickstein

Schottky

FitzGerald

Elliott

Le Paige

Lindemann

Burnside

Upton

Ricci-Curbastro

Pincherle

Schönflies

Lorentz

Maschke

Halsted

Poincaré

Veronese
MacMahon
Rydberg
Brillouin
Mellin
Sleszynski
Juel
Rohn
Boys
Appell
Guccia
Biamchi
Markov
Emile Picard
Rudio
Meyer
Runge
Hobson
von Dyck
Stieltjes
Pearson
Bolza
Lyapunov

Lamor
Dudeney

Koenigs

Planck

Goursat

Forsyth

Johnson

Peano

Scott

Henry Fine

Georges Humbert

Cajori

Cesáro

Hurwitz

Shatunovsky

Jensen

Meshchersky

Hölder

Bukreev

Lerch

Hollerith

D'Arcy Thompson

Volterra

Pieri

Stott

Weldon

Morley

Whitehead

Mathews

Duhem

Bendixon

Burali-Forti

Heawood

Molin

Cole

Heath

Burkhardt

Hensel

Engel

White

Slaught

Hilbert

Eliakim Moore

Macaulay

Vilhelm Bjerknes

Kneser

Study

Campbell

Jules Richard

Stäckel

Thue

Love

Fields

Miller

Aleksei Krylov

Corrado Segre

Grave

Young

Painlevé

Padé

Adler

Zaremba

Richmond

Van Vleck

Vailati

Steklov

Wien

Osgood

Kürschák

Minkowski

Macdonald

Landsberg

Vessiot

Dixon

Castelnuovo

Kotelnikov

Bohl

Nielsen

Jacques Salomon Hadamard 1865–1963

Fiske

Wirtinger

Bortolotti

Cosserat

Fredholm

Baker

Valée Poussin

Tauber

Scheffers

Brown

Kolosov

Bôcher

Kutta

Arthur Dixon

Sintsov

Couturat

Voronoy

Bortkiewicz

Padoa

Sommerfeld

Lasker

Chisholm Young

Kagan

Chaplygin

Cartan

Hausdorff

Egorov

Snyder

Koch

Lindelöf

Carslaw

Enriques

Fano

Borel

Yule

Drach

Steinitz

Epstein

Zermelo

Galerkin

Heegaard

Sitter

Russell

Levytsky

Pfeiffer

Vacca

Blichfeldt

Levi-Civita

Loewy

Carathéodory

Coolidge

Schwarzschild

Whittaker

Baire

Dickson
Huntington
Schur
Bromwich
Max Abraham
Takagi
Lebesgue
Fischer
Vitali
Cantelli
Eisenhart
Schmidt
Esclangon
Montel
Bliss
Gosset
Wilczynski
Hedrick
Hardy
Landau
Jeans
Mason
Faber

Boggio
Felix Bernstein
Fatou
Grossman
Löwenheim
Fréchet
Dehn
Lukasiewicz
Erlang
Coble
Kellogg
Fubini
Einstein
Severi
Edwin Wilson
Hahn
Jourdain
Sommerville
Nikolai Krylov
Ehrenfest
Riesz
Fejér

