העולם העתיק והקלאסי

לפה"ס ועד המאה ה-5

גיאומטריה

נאסף ונערך בעברית ע"י פרופ' צבי קם

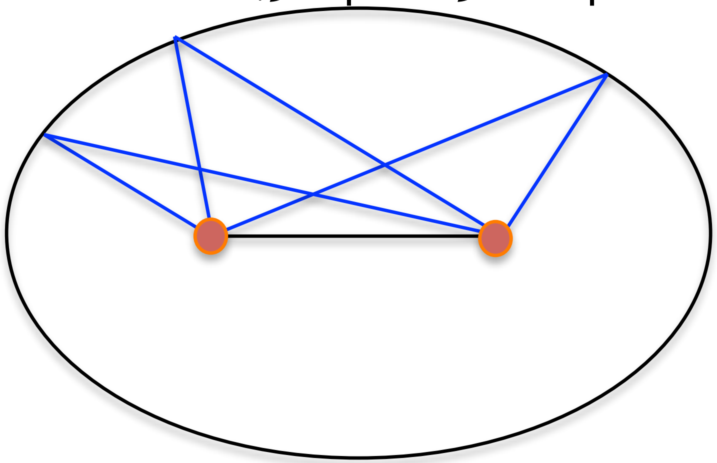
הגיאומטריה הוותה שטח מרכזי במתמטיקה של העולם הקדום והקלאסי.
צורות גיאומטריות סימטריות היו סמלים לאסטטיקה וסדר בעולם.
הגיאומטריה היתה השטח הראשון במתמטיקה שחוקיו הוגדרו לוגית בעזרת אכסיומות ומשפטים הנגזרים מהן.

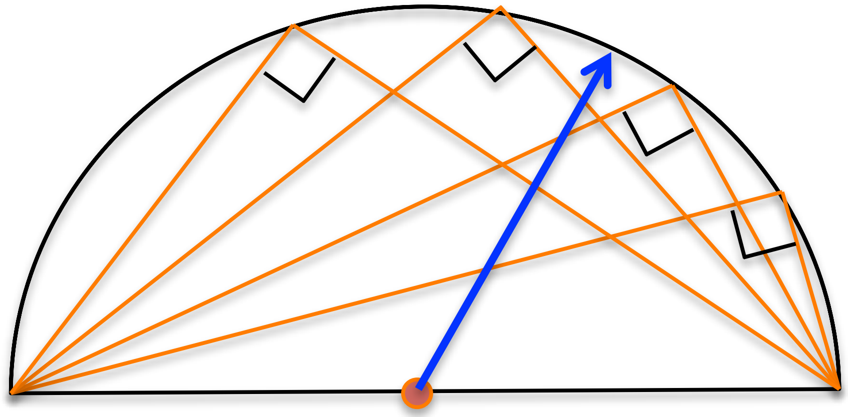
אך הגיאומטריה היתה כלי חשוב:
היא קשורה במדידות כמויות מזון, שטח ובניינים על הארץ, ובמדידות אסטרונומיות בשמיים.
והיא שימשה לחישובים (מכפילות וחלוקות מספרים).

1900–1600 לפה"ס בבבל (שומר) במסופוטמיה –
טבלאות אורכי צלעות במשולשים ישרי זוית (3,4,5)(5,12,13)
שימוש לטבלאות כפל

1680–1620 לפה"ס **אחמס Ahmes** כותב את הפפירוס
מריינד Rhind – חוקי חלוק
ו-87 בעיות מתמטיות כולל פתרון משוואות ונפחים

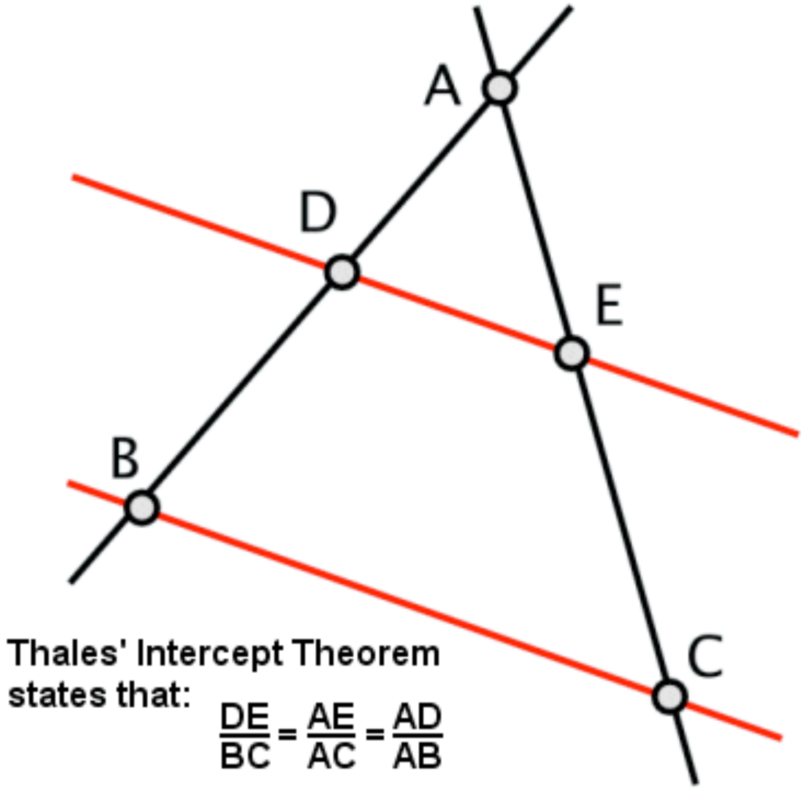
624–547 לפה"ס **תלס Thales of Miletus**
מפתח גיאומטריה של משולשים.
מעגל – כל הנקודות עליו במרחק שוה ממרכזו = הרדיוס.
משולש הנשען על מיתר חצי מעגל יוצר זוית ישרה.
אליפסות: סכום המרחקים משתי נקודות הפוקוס לכל הנקודות עליה קבוע.



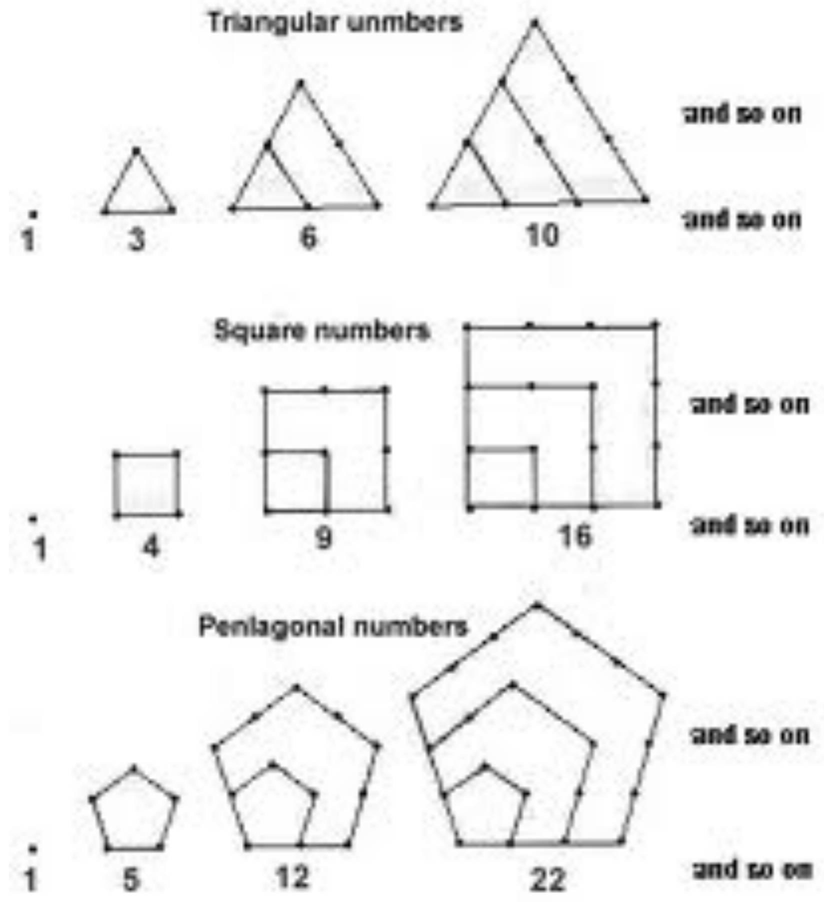


ציור אליפסה – חוט ושני נעצים.

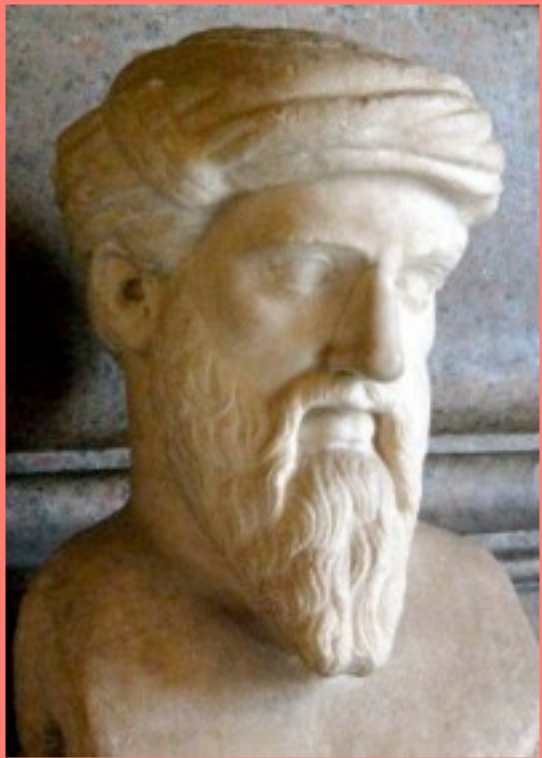
חוק החוצים של תלס – יחסים בין משולשים דומים. הקוים DE ו– BC מקבילים (יוצרים זויות שוות עם AB או EC)

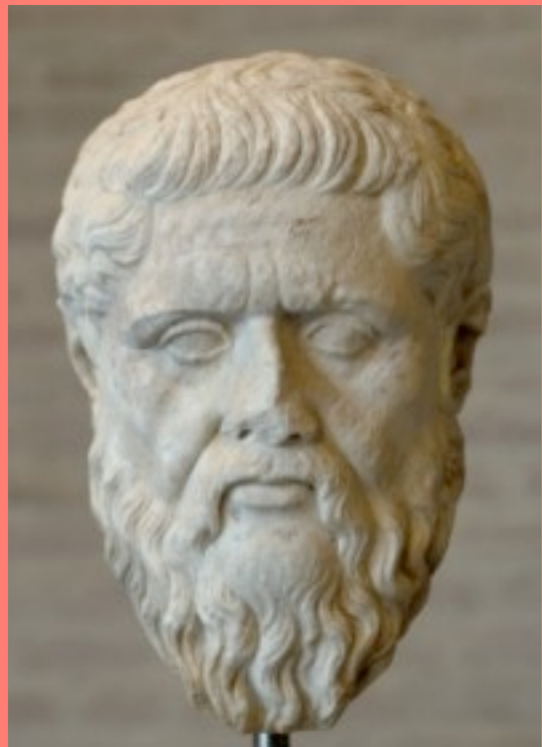


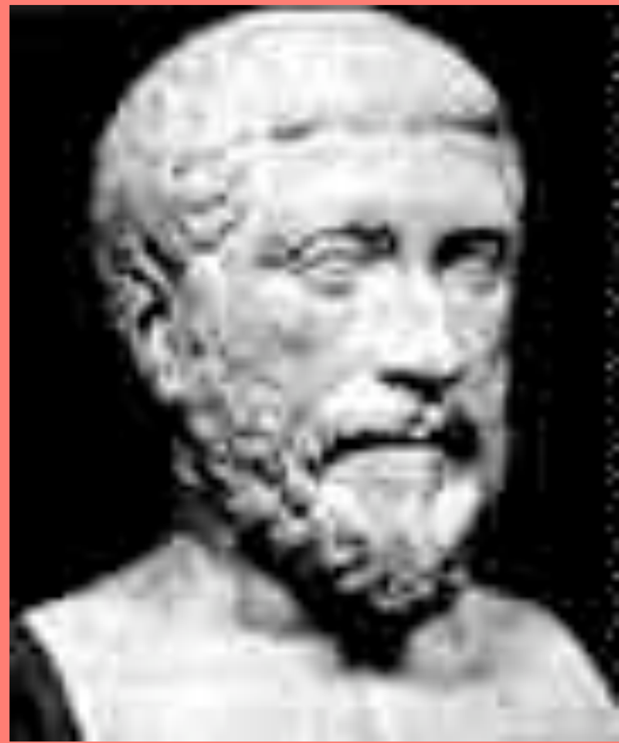
דמיון צורות גיאומטריות

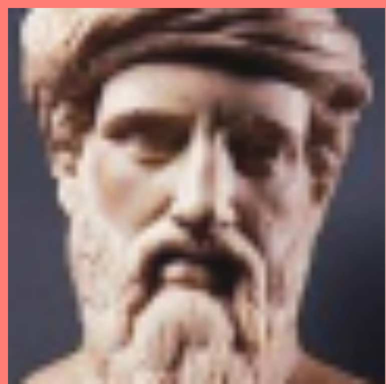


569-475BC פיטגורס Pythagoras of Samos



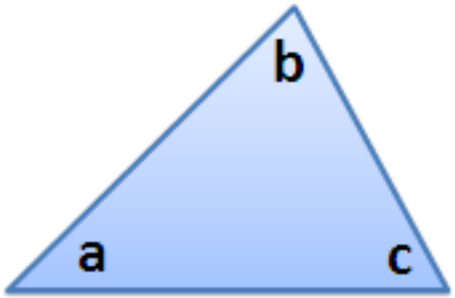


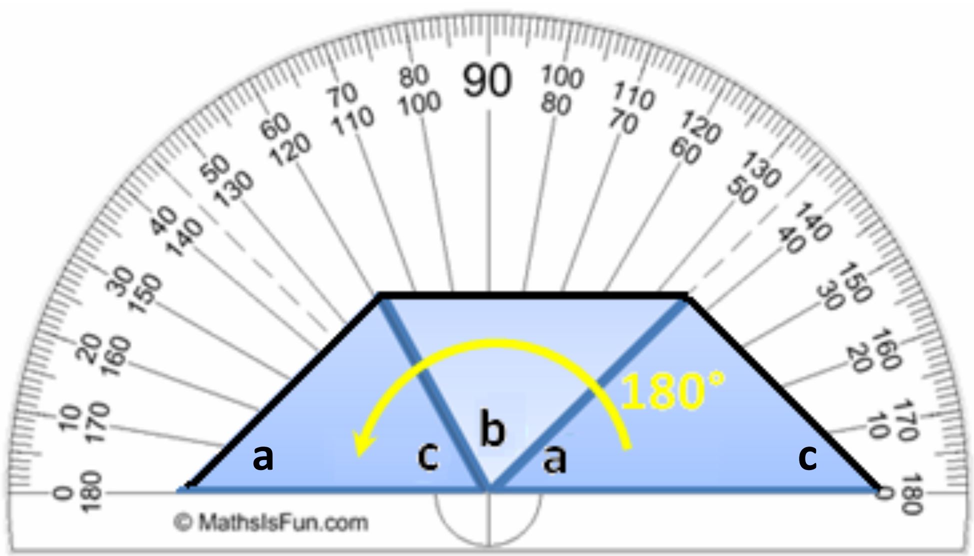




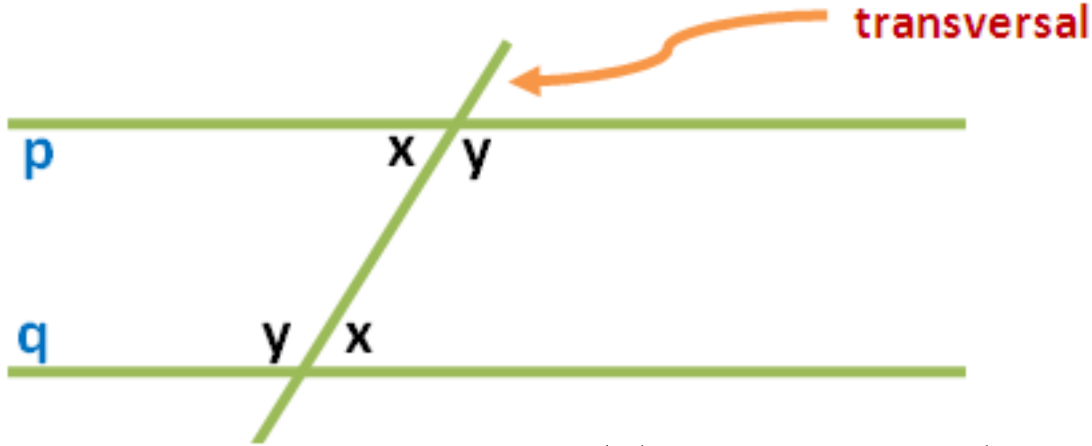
פיטגורס היה סטודנט של תלס. אמונה ביופים של מספרים שלמים ושברים.
מקיש עובדות גיאומטריות מעקרונות בסיסיים– הוכחה גיאומטרית:
משפט פיטגורס הידוע למיתר במשולש ישר זוית – ראה הוכחות לעיל

סכום זויות המשולש 180 – הוכחה ויזואלית פשוטה:
מבוססת על זויות שוות במשולשים דומים

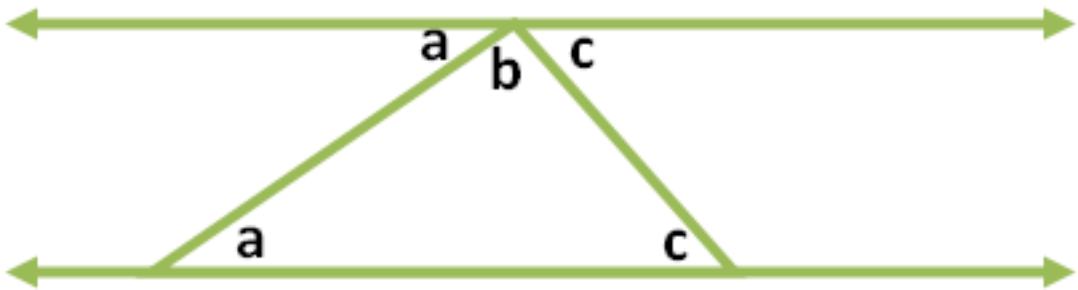




הוכחה פורמאלית: נשתמש בחוק הזויות המתחלפות (אוקלידס הנחה חמישית)
אם הקוים p ו–q מקבילים הזויות x,y שקו שרירותי יוצר עם q שוות לזויות המתחלפות שאותו קו יוצר עם p



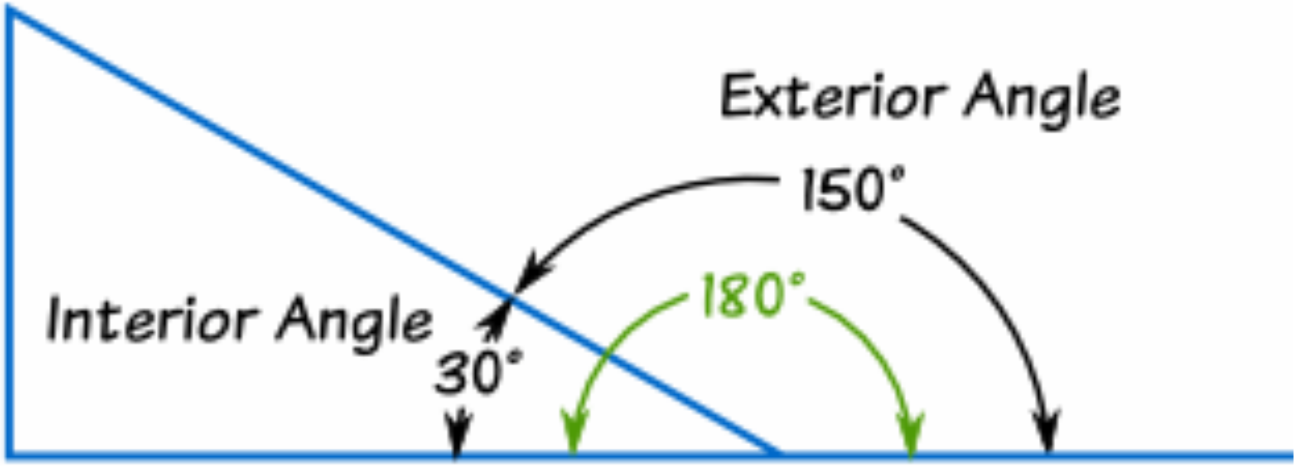
נצייר את המשולש נבנה קו מקביל לבסיסו העובר דרך קדקודו והזיות המתחלפות a,c

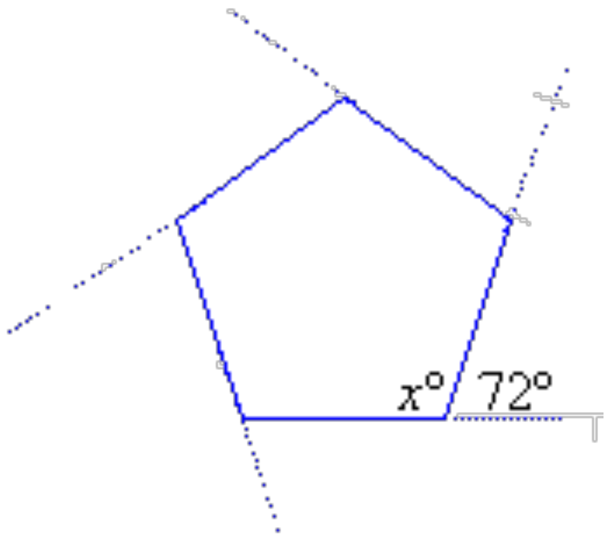


ולכן – $a+b+c=180$

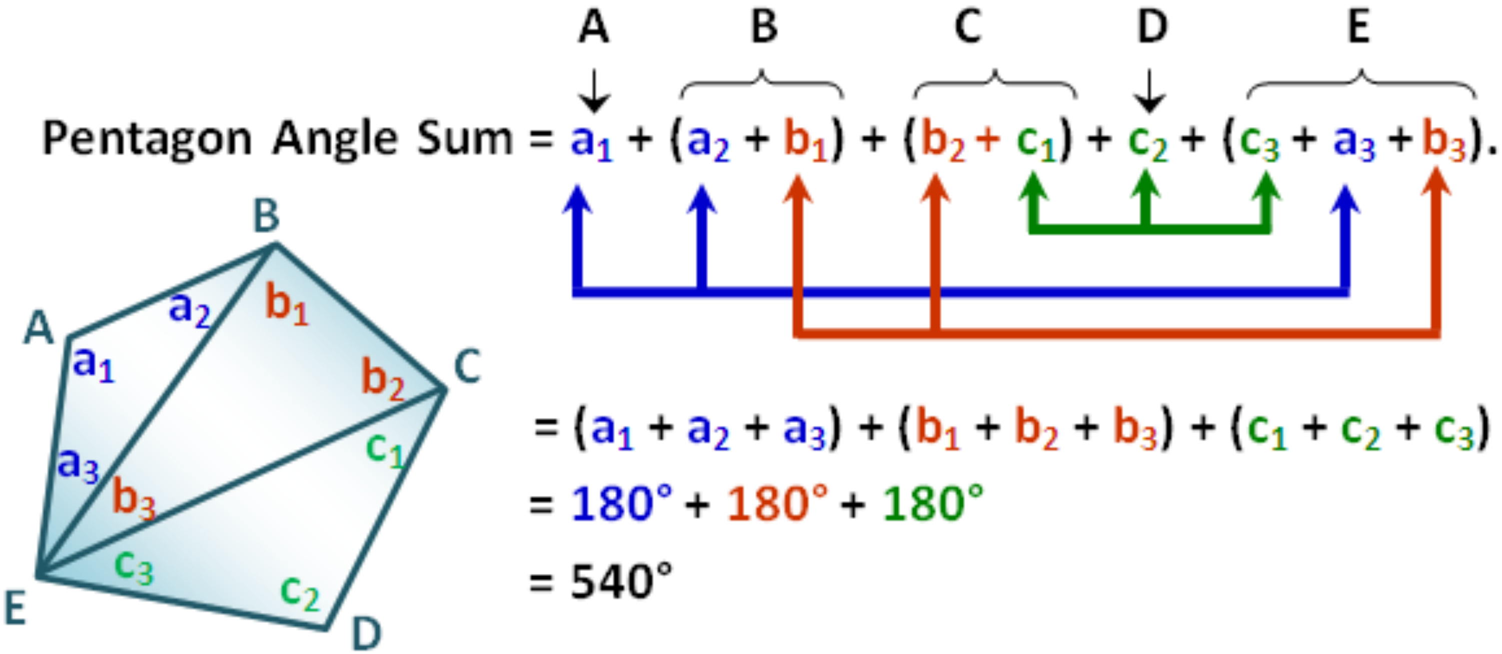
סכום זויות פנימיות של פוליגון עם n צלעות הוא $180(n-2)$

סכום הזויות החיצוניות שוה 360





הוכחה: מקדקד אחד של הפוליגון נצייר קוים אל כל שאר הקדקדים מלבד שני הקדקדים הסמוכים לו. נוצרו n-3 קוים המחלקים את הפוליגון ל n-2 משולשים. סכום הזויות הפנימיות שלהם שווה לסכום הזויות הפנימיות של הפוליגון. להדגמה לפנטגון:



הוכחת סכום הזויות החיצוניות: נסמן את הזויות הפנימיות ב-ai

SUM[n(180-ai)] = 180n - SUM[ai] = 180n-180(n-2)=180*2=360

הסבר באופן אינטואיטיבי מדוע הסכום קבוע למרות שמוסיפים עוד צלעות?

יותר צלעות - אבל כל צלע בזוית קרובה יותר לקודמתה.

500 לספירה – אריאבהטה המתמטיקאי ההודי מתאר פונקציות טריגונומטריות: סינוס וקוסינוס

בעתיד נלמד את חוק הקוסינוס במשולש [$a^2+b^2-2ab\cos(\theta)=c^2$]

550 לפה"ס פיטגורס ניסח את החוק:

אם זווית המשולש ישרה אז $a^2+b^2=c^2$ וההפך

אם הזווית $\neq 90^0$ אז גם $a^2+b^2 \neq c^2$

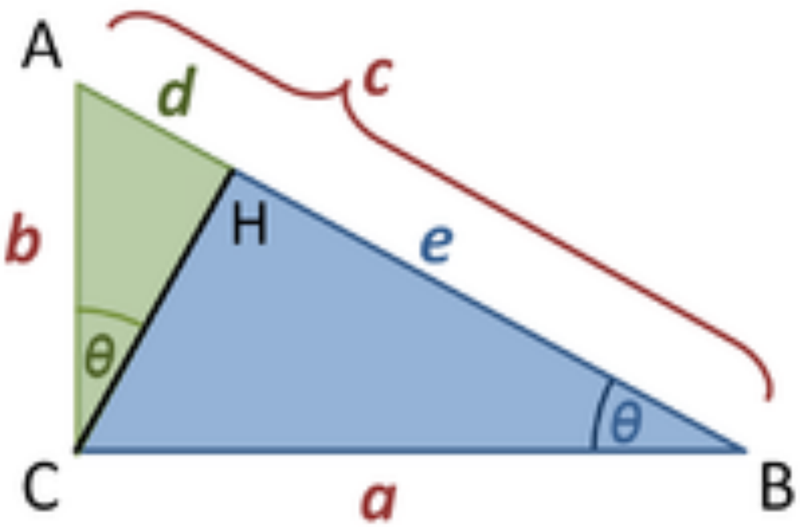
הרבה פעמים יש דרכים שונות להוכיח משפט מתמטי. נראה כמה דרכים

1. הוכחה על סמך יחסי הצלעות במשולשים דומים

$a/c=e/a \quad b/c=d/b$

$a^2=c*e \quad b^2=c*d$

$a^2+b^2=c*(e+d)=c^2$



2. הוכחת אוקלידס בספר 1 משפט 47 Proposition 47 in Book 1

שני המשולשים הכחולים חופפים: צלעות $a=AB, b=AC$ וזוית ביניהם שוות $ABD =\sim FBC$

שטח המשולש ABD הוא חצי משטח המרובע הורוד BDLK $ABD=1/2BDLK$

מאחר והבסיס BD משותף והגובה BK שוה

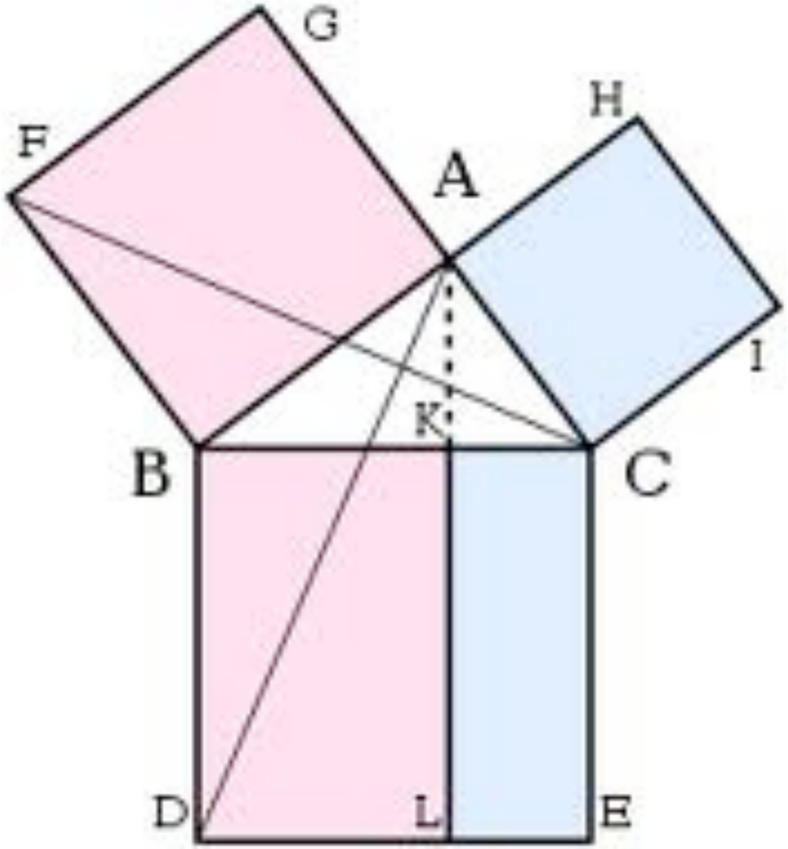
וכך גם שטח המשולש FBC הוא תצי משטח המרובע BAGF $FBC=1/2BAGF$

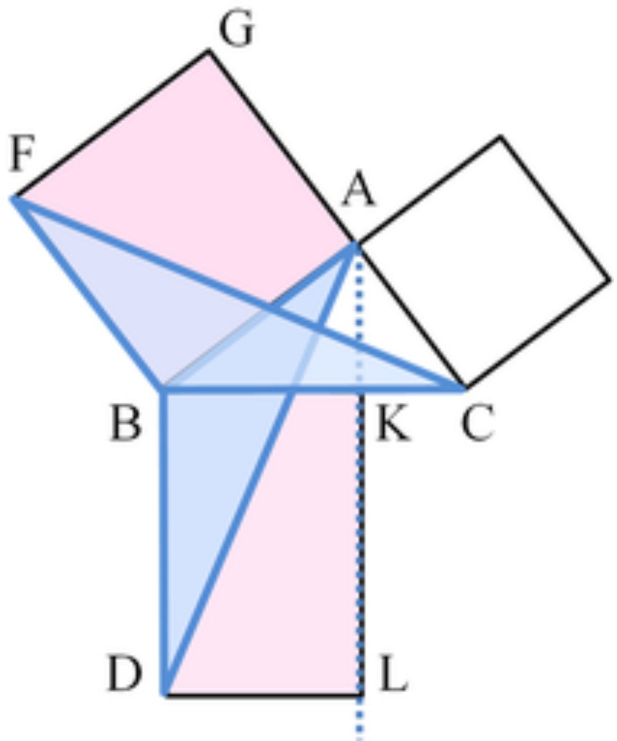
ולכן $BDLK=BAGF=AB^2=a^2$

וכך גם $CKLE=ACIH=AC^2=b^2$

ולכן $AB^2+AC^2=BDLK+CKLE=BC^2$

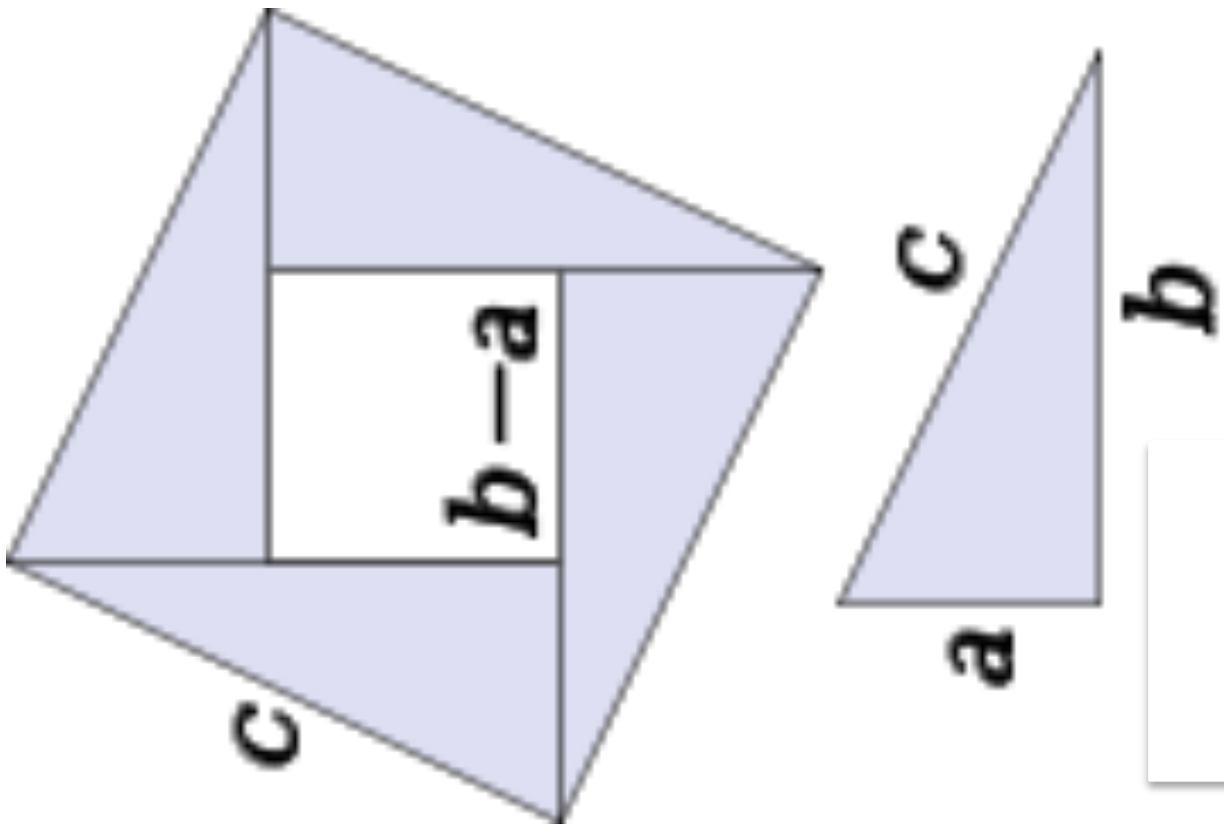
$a^2+b^2=c^2$





3. הוכחה אלגברית.
שטח הריבוע = סכום חלקיו

$$c^2=(b-a)^2+4*ab/2=a^2+b^2$$



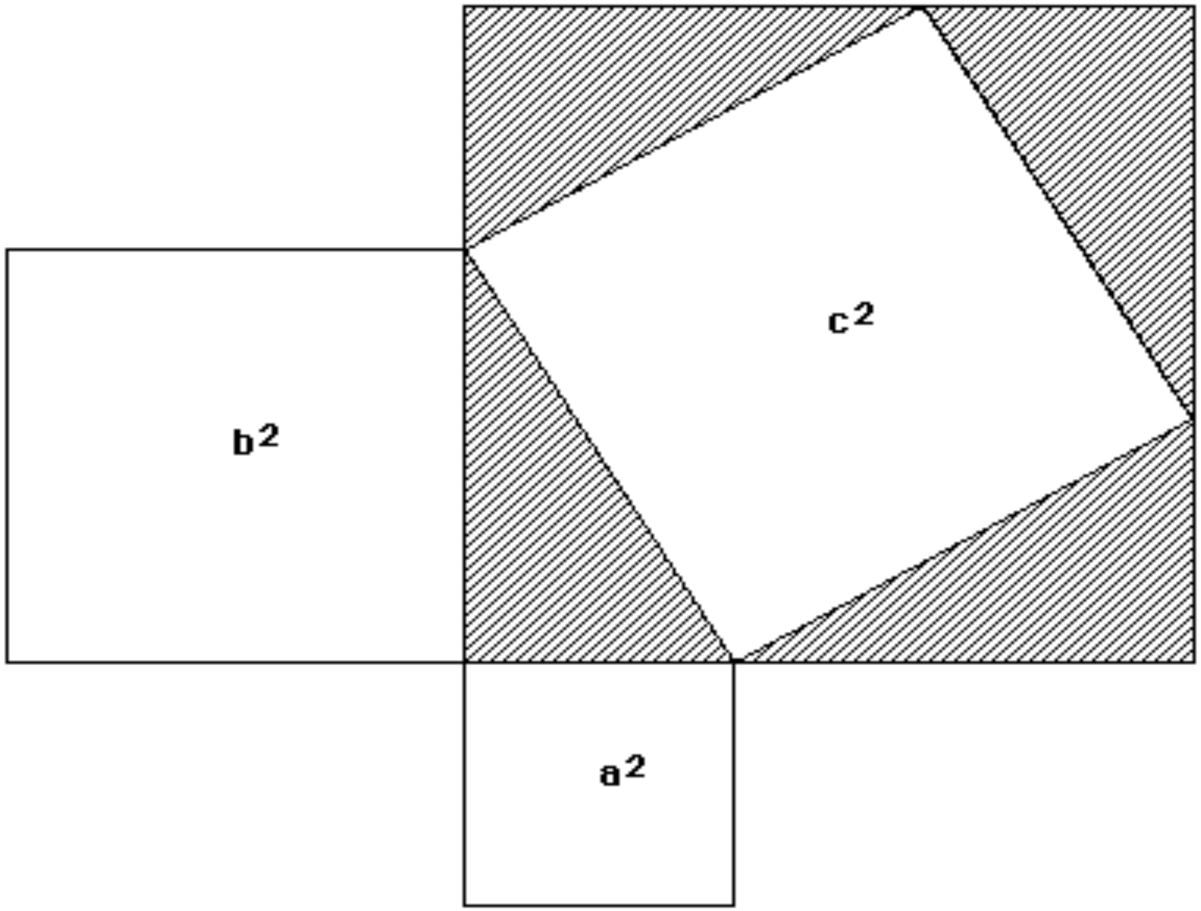
שטח הריבוע הגדול

$= (a+b)^2$

הוא מורכב מארבעה משולשים בשטח ab ומריבוע בשטח c^2

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2=c^2+4ab/2$

$a^2+b^2=c^2$



למשפט פיתגורס קיימים ערכים שלמים כמו 3,4,5 או 5,12,13

האם יש אינסוף שלשות מספרים שלמים (שלשות פרימיטיביות) המקיימות יחס זה?

(5 ,4 ,3)	(13 ,12 ,5)	(17 ,15 ,8)	25 ,24 , 7)
(20, 21, 29)	(12, 35, 37)	(9, 40, 41)	(28, 45, 53)
(11, 60, 61)	(16, 63, 65)	(33, 56, 65)	(48, 55, 73)
(13, 84, 85)	(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(65, 72, 97)

אוילר הראה כי אפשר לקבל עבור כל n,m

$$a = m^2 - n^2,\ \ b = 2mn,\ \ c = m^2 + n^2$$

את כל השלשות הפרימיטיביות והכפלה במספר שלם נותנת את כל השלשות האפשריות

האם יש שלשות מספרים שלמים המקיימים עבור $n>2$:

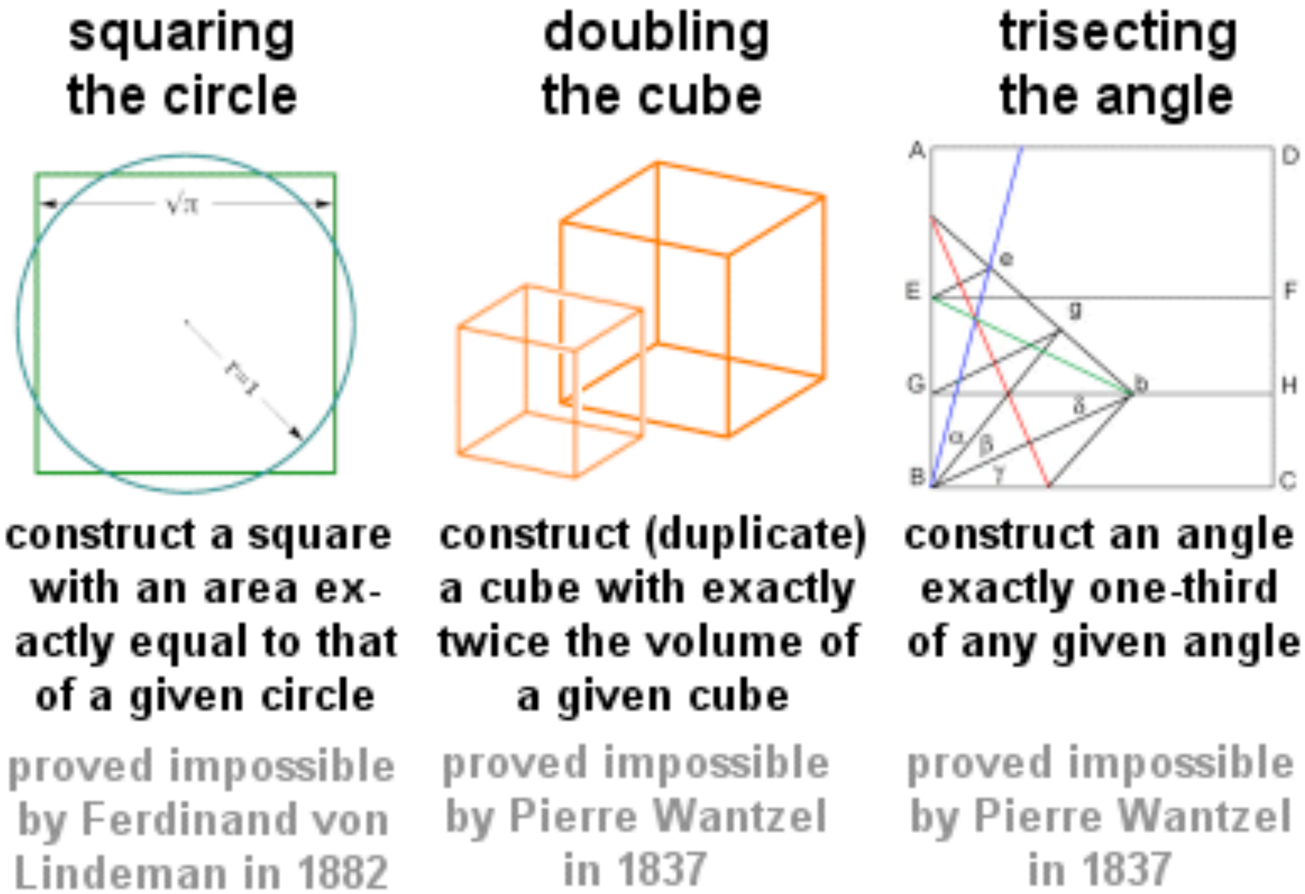
$a^n+b^n=c^n$

פרמה Fermat 1601-1665 כתב הערה בשולי ספר שהצליח להוכיח כי אין מספרים כאלה.

ההוכחה נתנה רק לאחרונה: ויילס ב-1995, בשיטות של מתמטיקה מודרנית.

לא ברור אם אכן הוכחת אוילר היתה נכונה...

3 בעיות מרכזיות במתמטיקה היוונית שהוגדרו ע"י פיתגורס



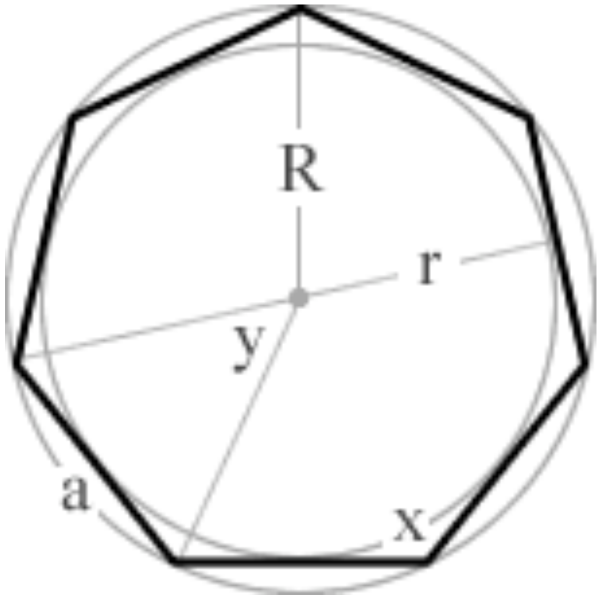
סכום הזויות בפוליגון עם n צלעות = $180^*(n-2)$

צלע פוליגון שוה צלעות מתוך רדיוס המעגל החוסם והחסום

$A=2r\sin(180°/n)=2R\tan(180°/n)$

$x = ((n-2)\pi / n)$ radians $= (((n-2)/n) \times 180°)$ degrees

$y = (2\pi / n)$ radians $= (360° / n)$ degrees



חישוב π : ראה ארכימדס בהמשך הפרק

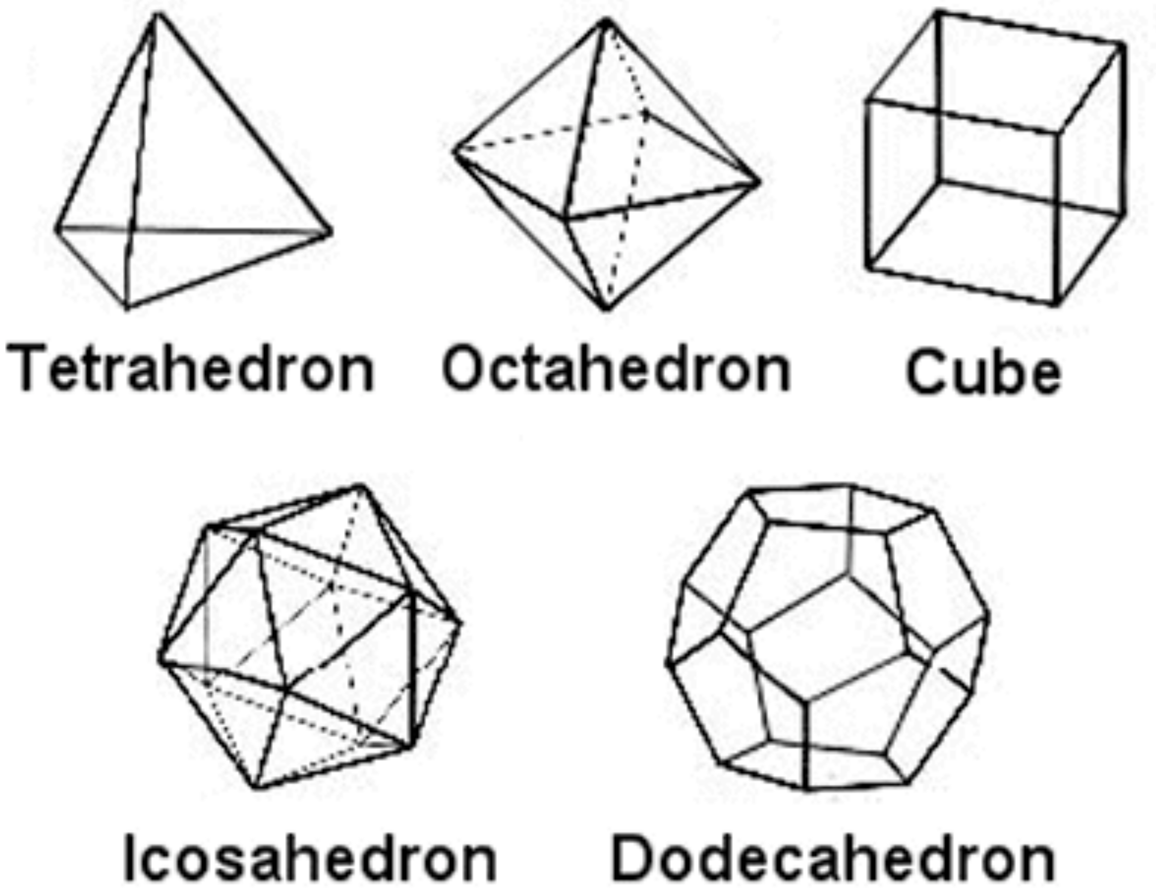
ע"י בניה גיאומטרית פתר את המשוואה $a(a+x)=x^2$ (ראה חתך זהב פרק א.1.1)

מספרים אירציונאליים (הוכחה ש- $\sqrt{2}$ אינו רציונאלי – ראה פרק א.1.1)

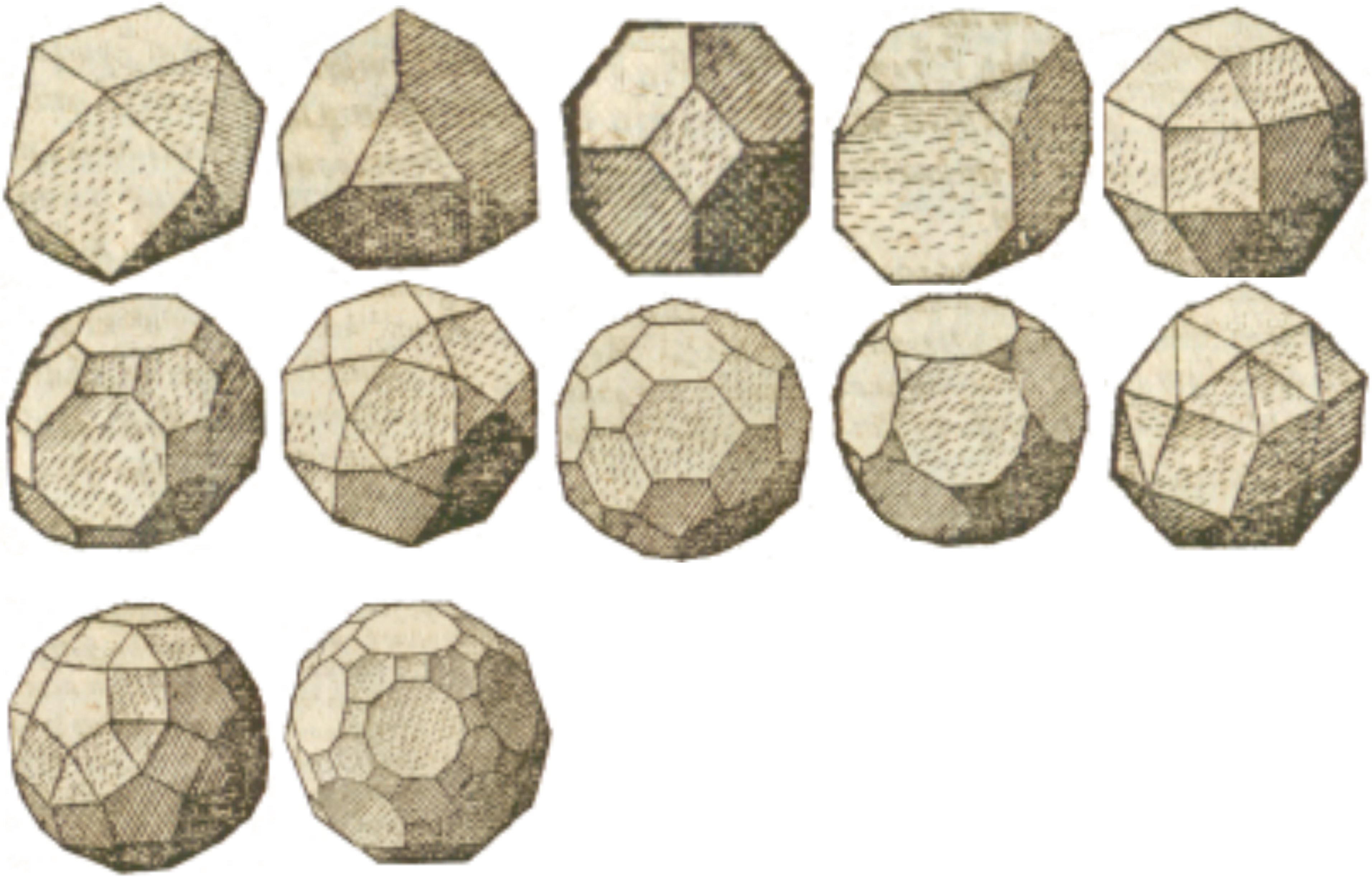
תרומות לאסטרונומיה של פיתגורס: הארץ הוא כדור במרכז העולם, מסלול הירח נוטה כלפי קו המשוה של הארץ, ונוס כוכב הערב זהה לונוס כוכב הבוקר.

פיטגורס: 3 גופים סימטריים עם פאות וצלעות שוות: טטרהדרון, אוקטהדרון וקוביה
אפלטון: שני גופים נוספים איקוזהדרון ודודקהדרון
אוקלידס: הוכיח 200 שנים אח"כ כי אין יותר גופים כאלה
ארכימדס: (כנראה למד אצל אוקלידס) תאר גופים עם צלעות שוות אך פאות שונות

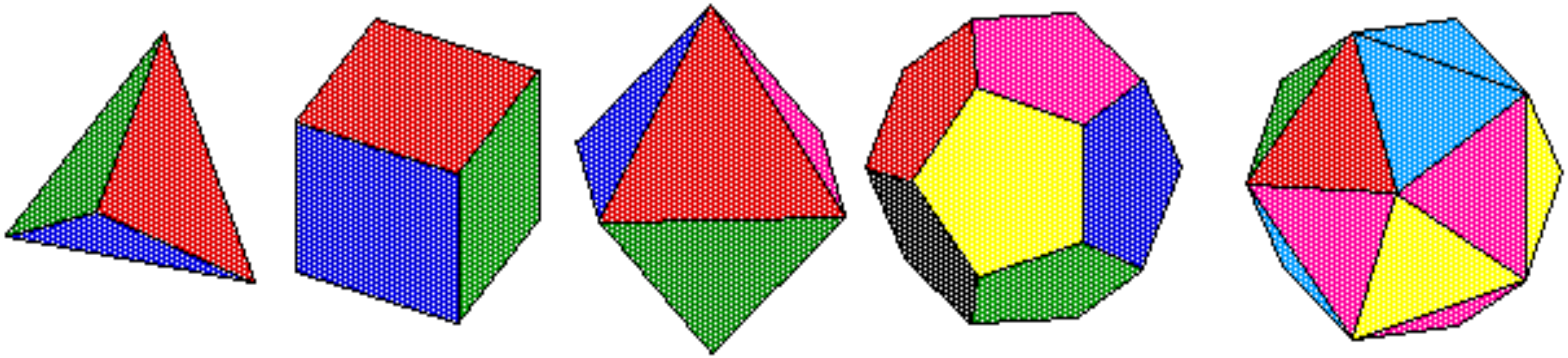
3 פוליטופים רגולאריים של פיתגורס +2 נוספים של אפלטון



ארכימדס תיאר 13 גופים שבקדקדיהם נפגשים אותו מספר צלעות אך פאותיהם אינן זהות



חמישת הגופים המשוכללים של אפלטון



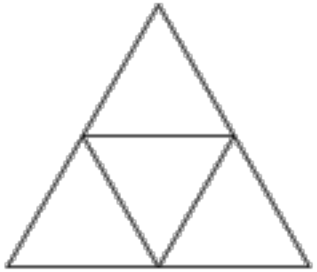
The Tetrahedron **The Cube** **The Octahedron** **The Dodecahedron** **The Icosahedron**

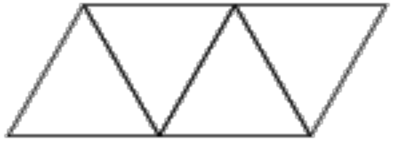
The five regular solids discovered by the Ancient Greek mathematicians are:

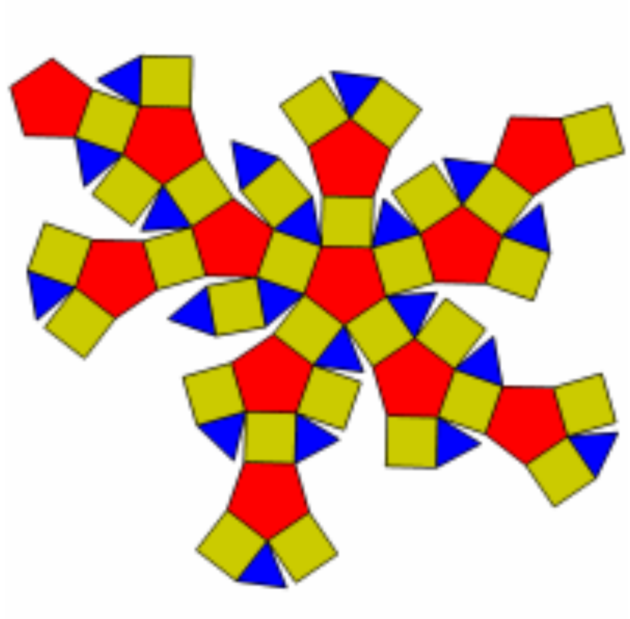
The **Tetrahedron**:	4 vertices	6 edges	4 faces	each with 3 sides
The **Cube**:	8 vertices	12 edges	6 faces	each with 4 sides
The **Octahedron**:	6 vertices	12 edges	8 faces	each with 3 sides
The **Dodecahedron**:	20 vertices	30 edges	12 faces	each with 5 sides
The **Icosahedron**:	12 vertices	30 edges	20 faces	each with 3 sides

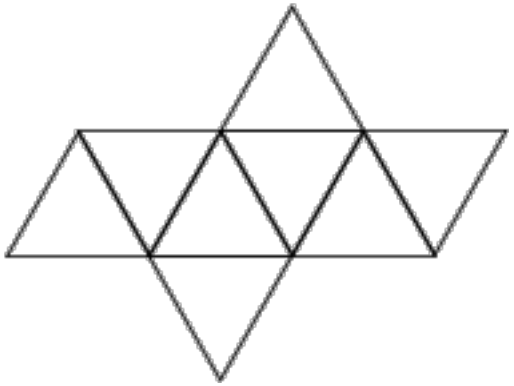
אפלטון – חמשת הפוליטופים הרגולארים –טטראדר, קוביה, אוקטאדר, דודקאדר ואיקוזאדר
אותו מספר צלעות נפגשות בכל הקדקדים וכל המאות שוות

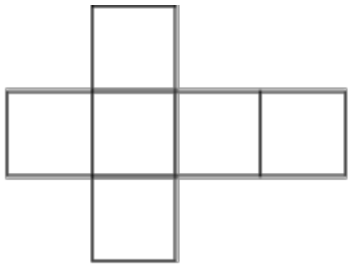
פריסות הגופים המשוכללים:

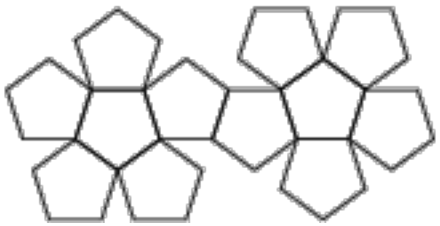


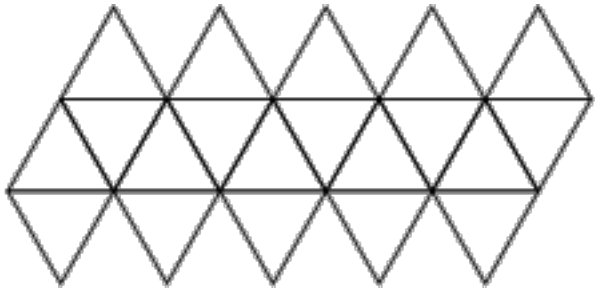










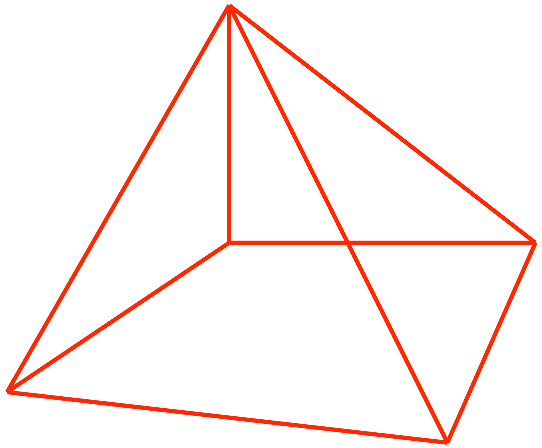


אוילר (1707-1783) **Leonhard Euler**

נוסחת אוילר: לכל פיאון (פוליהדרון) קמור-

מספר פאות פלוס מספר קדקדים מינוס מספר צלעות =2

אם מדובר בפיאונים משוכללים: f פאות, לכולן אותו מספר צלעות, n, ובכל קדקד נפגשים m פאות. מספר הצלעות = f * n/2 ומספר הקדקדים = f*n/m



לפי נוסחת אוילר

$$f + f \cdot \frac{n}{m} = f \cdot \frac{n}{2} + 2$$

ולכן

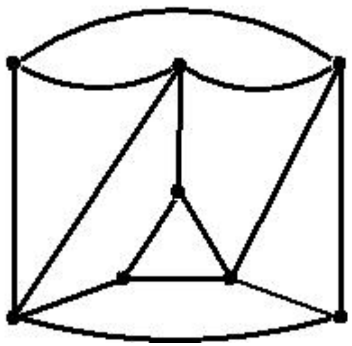
$$f = \frac{4m}{2m - (m-2)n}$$

זו משוואה דיאופנטית ועבור m,n>2 יש לה 5 פתרונות

(ראה 5 הגופים המשוכללים של אפלטון בפרק - גיאומטריה)

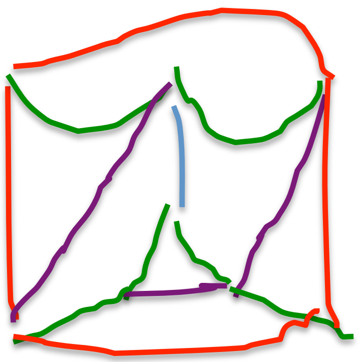
הרחבה:

מספר פאות פלוס מספר קדקדים מינוס מספר צלעות =
2 פחות פעמיים מספר החורים



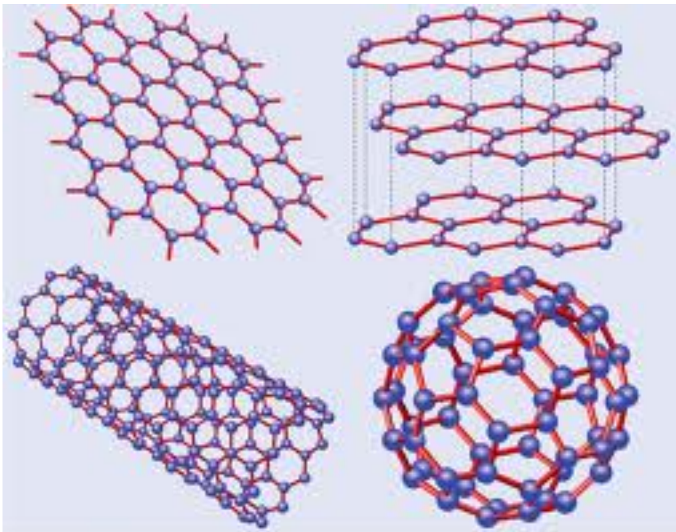
משפט אוילר תקף גם לגרף מישורי (הקשתות אינן נחתכות) וקשיר (מסלול מכל קדקד לכל קדקד):

מספר קשתות פלוס מספר הפאות מינוס מספר הצמתים =2



הוכחה: נמחוק קשתות המשתתפות במעגל החיצון: מוריד מספר קשתות באחד ומספר פאות באחד. לאחר שלא נותר מעגל נשאר עץ ופאה אחת. נמחק צומת וקשת, עד שנשארים עם צומת אחת וקשת אחת.

כדורגל



כיפה גיאודזית

Buckminster Fuller

גרפין

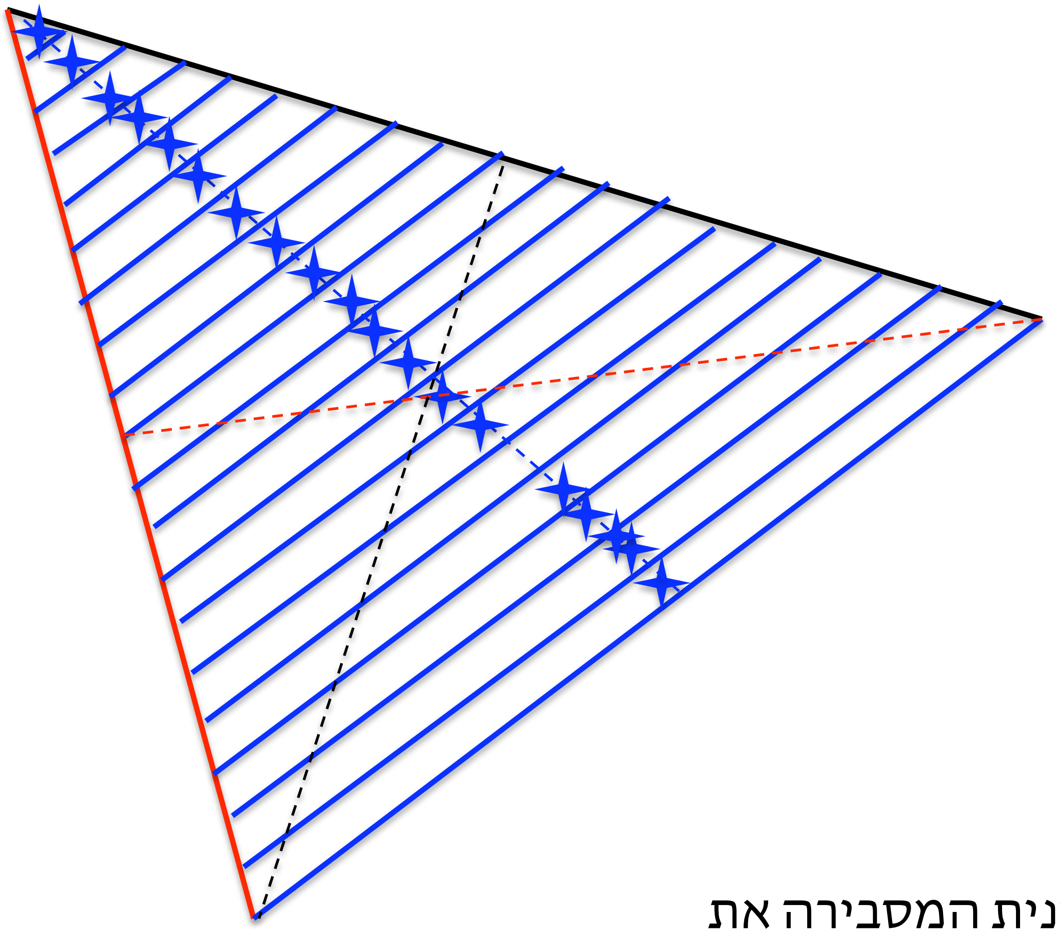
Nobel, 2010 A.Geim and K.Novoselov

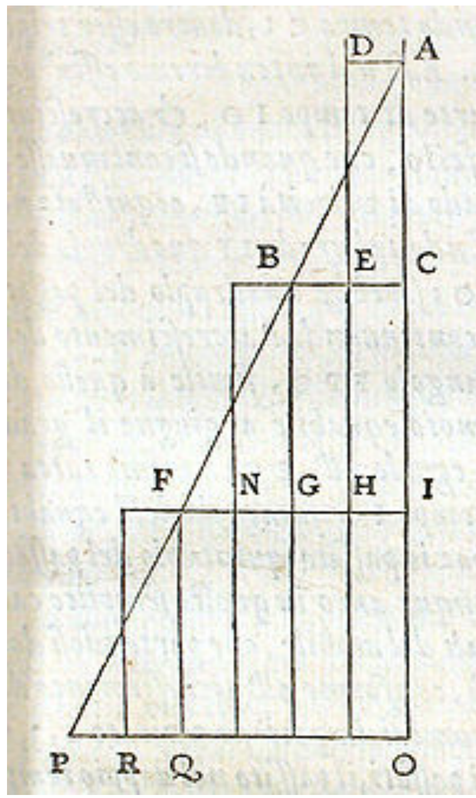
ננו–צינוריות

C_{60} Buckball (Fullerine)

H.Kroto, R.Curl and R.Smalley Nobel 1996

מרכז כובד של משולש – הוא במפגש חוצי הצלעות: בעזרת חלוקה אינפיניטסימאלית
אפשר להוכיח ששלשת החוצים נפגשים בנקודה אחת? בהמשך.

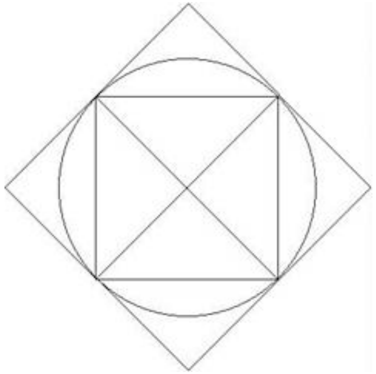


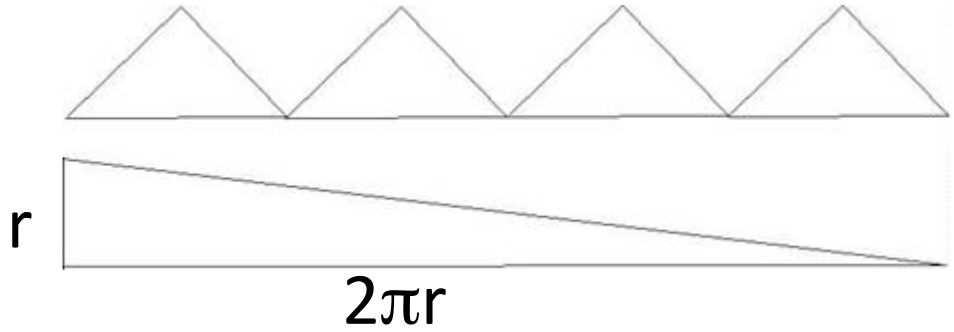


דיאגרמה יונית המסבירה את
סה"כ הדרך שעושה גוף
עם תאוצה קבועה
כגון בנפילה חפשית

ריבוע המעגל

השימוש במונח מתייחס לשרטוט צלע ריבוע ששיטחו שוה לשטח מעגל עם קטר נתון.
אין פתרון לבעיה!
ארכימדס הוכיח ששטח המעגל שוה לשטח משולש ישר זוית עם צלעות באורך הרדיוס והקפו בהתאמה.



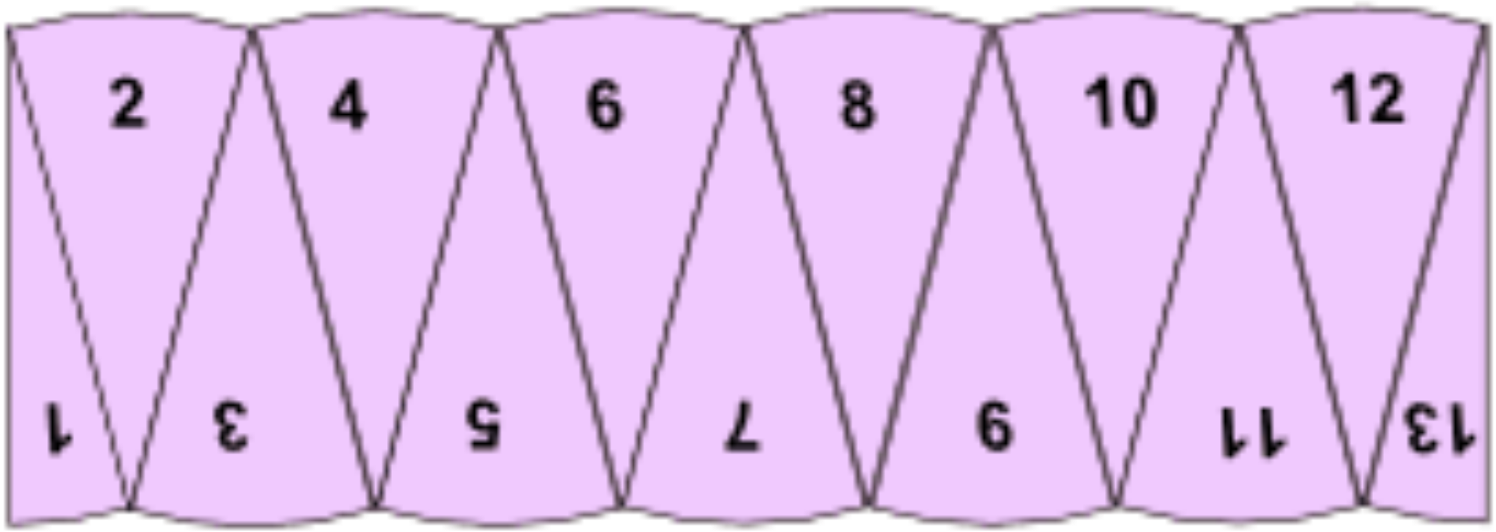


רעיון ההוכחה הוא:
ריבוע החסום בכדור מחולק ל-4 משולשים ישרי זוית עם צלע h ובסיס b=2h
שטח הריבוע החסום = 4 פעמים שטח המשולש = 2hb
שטח זה שוה לשטח משולש בגובה h ובסיס 4b שהוא הקף הריבוע החסום.
קירוב טוב יותר - אוקטגון. גם האוקטגון מתחלק למשולשים ישרי זוית שגבהם כמרחק בין המרכז לאמצע צלעות האוקטגון. גם שטחם הוא גובה המשולשים כפול הקף האוקטגון.
נוכל כך להמשיך בפוליגון חסום עם 16 צלעות וכו.
אם אנו בשלב של פוליגון עם n צלעות עבור n מאד גדול גובה המשולשים מתקרב לרדיוס המעגל, והקף הפוליגון מתקרב להקף המעגל. ולכן:

$$\tfrac{1}{2}\times \text{base}\times \text{height} = \tfrac{1}{2}\times 2\times \pi\times r\times r = \pi\times r^2$$

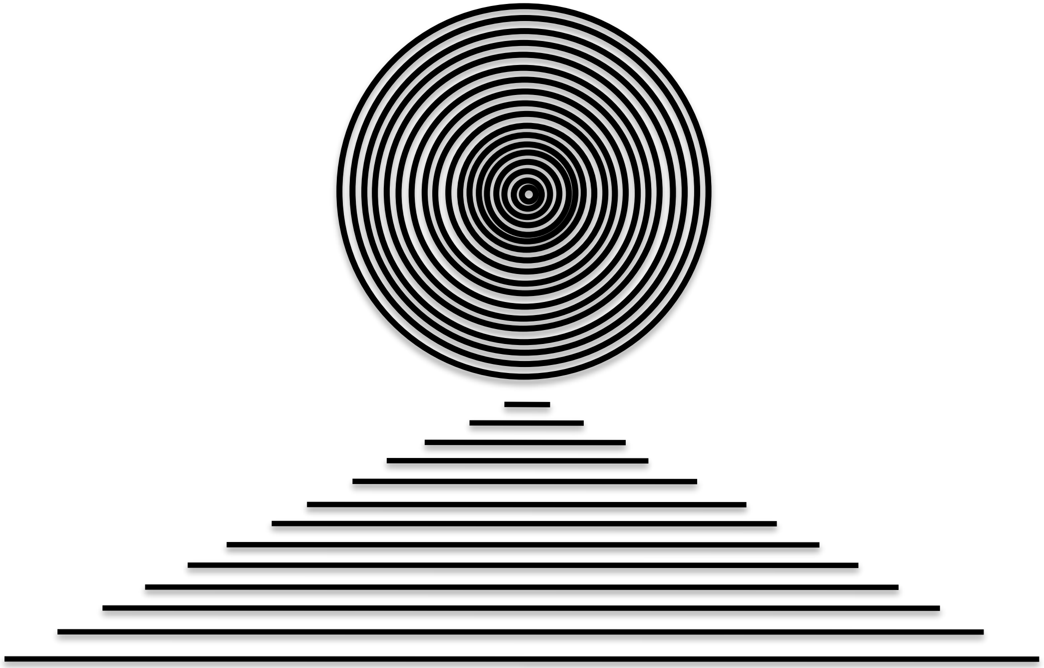
בצורה אחרת:

הקשר בין רדיוס R שטח המעגל A והקפו S הוא: $A = RS/2$



הסבר אחר ניתן רבי אברהם בר חיא הנשיא (בסיפרו "חבור המשיחה והתשברת" הוצאת חברת מקיצי נרדמים, תרע"ג ברלין) וזה לשון ההוכחה:
"והאות [=הוכחה] על התשבורת [=מידת השטח] הזה ידענו: אם תפתח שטח העיגול מצד אחד ותיישר כל הקוים הסובבים מקו החיצוני עד המרכז, יתפשטו המקיפים שטח העיגול ויחזרו לקוים מתמעטים והולכים עד שחוזרים אל נקודה אחת, והיא נקודת המרכז – החיצון גדול מכולם, ואשר לפנים ממנו קטן ממנו וגדול מאשר לפנים ממנו, וכן הולכים עד הנקודה, ובזה נולדה לנו צורת המשולש, ותשבורת המשולש כבר בארנו, היא כדי העמוד [=גובה] בחצי התושבת [=בסיס], וזה מחצית הקוטר [=רדיוס] במחצית הקו המקיף [=הקף]"

אנו נכתוב: $\pi R^2 = 2\pi R*R/2$



כך גם הקשר בין שטח פני הכדור וניפחו, המורכב מפירמידות בגובה הרדיוס שסכום שטח בסיסם הוא שטח פני הכדור. אנו נכתוב: $4/3\pi R^3 = 4\pi r^2 * R/3$

הנ"ל קושר את נוסחאות השטח וההקף לאותו יחס גודל π

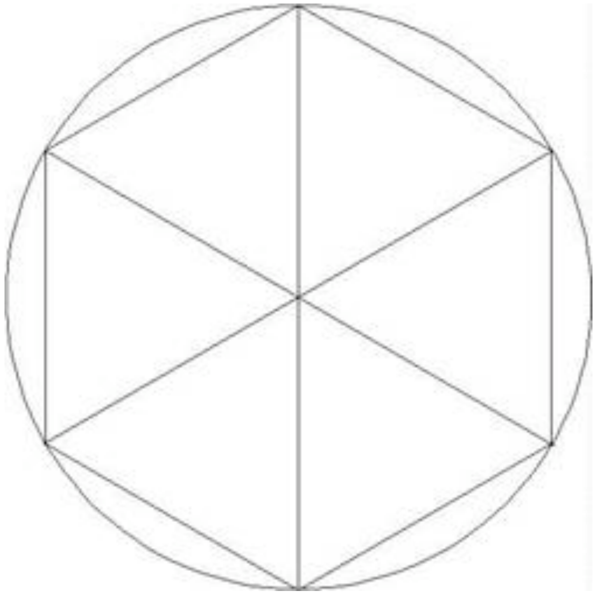
אך ארכימדס גם חישב ערך של π בדיוק רב מהקף פוליגון עם $n \to \infty$

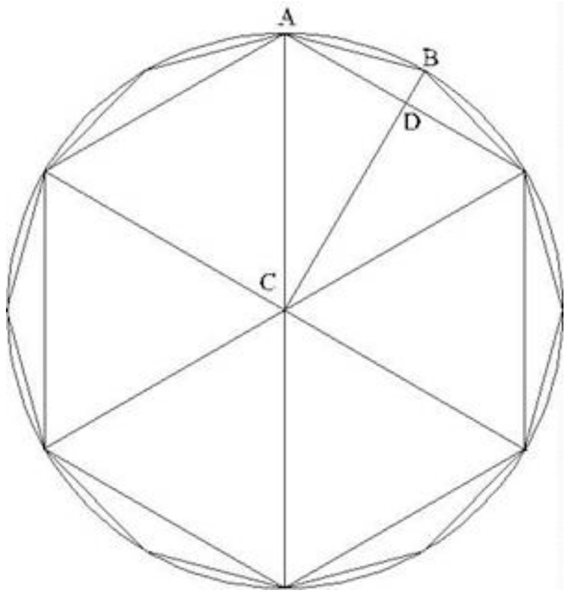
נובע מנוסחת **אינדוקציה** המבוססת על משפט פיטגורס:

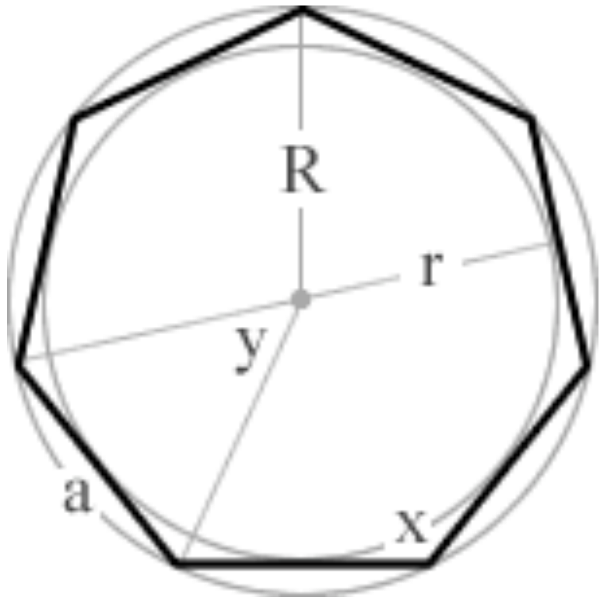
ידוע צלעות משושה

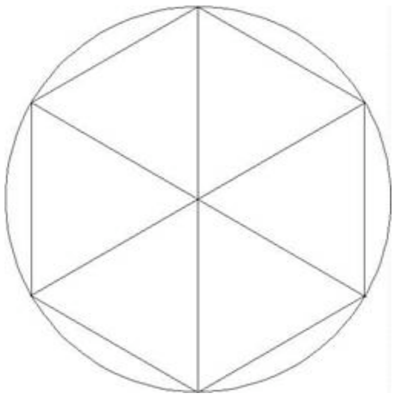
מתוך הצלעות של פוליגון עם 6n צלעות

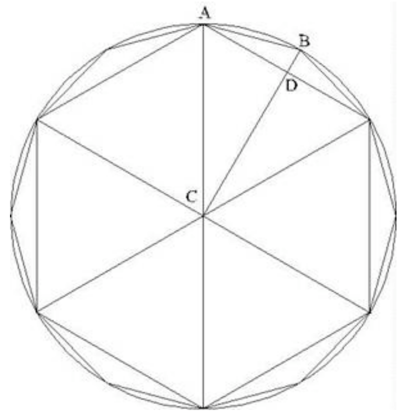
חישב צלעות פוליגון של 12n צלעות











אם נצייר בתוך מעגל עם רדיוס = 1 ששה משולשים שוי צלעות – מאחר וזויות קדקדיהם 180/3=60 הם יוצרים משושה החסום במעגל. הקפו = 6 קטן מהקף המעגל. לכן pi גדול מ-3. נוכל להתקרב למעגל ע"י פוליגונים עם מספר צלעות הולך וגדלץ ארכימדס היכפיל בכל שלב את מספר הצלעות: 6, 12, 24, 48, 96 וכו

אם נביט בדודקגון נוכל לחשב את הצלע שלו, AB, ממשפט פיטגורס:

AD=1/2

$CD=sqrt(1-AD^2)=sqrt(3/4)=sqrt(3)/2$

$DB=1-CD=1-sqrt(3)/2$

$AB=sqrt(AD^2+DB^2)=sqrt(1/4+1+3/4-sqrt(3))=sqrt(2-sqrt(3))=0.517638\ldots$

pi ~< 12AB=6.211657…

שימוש בטריגונומטריה:

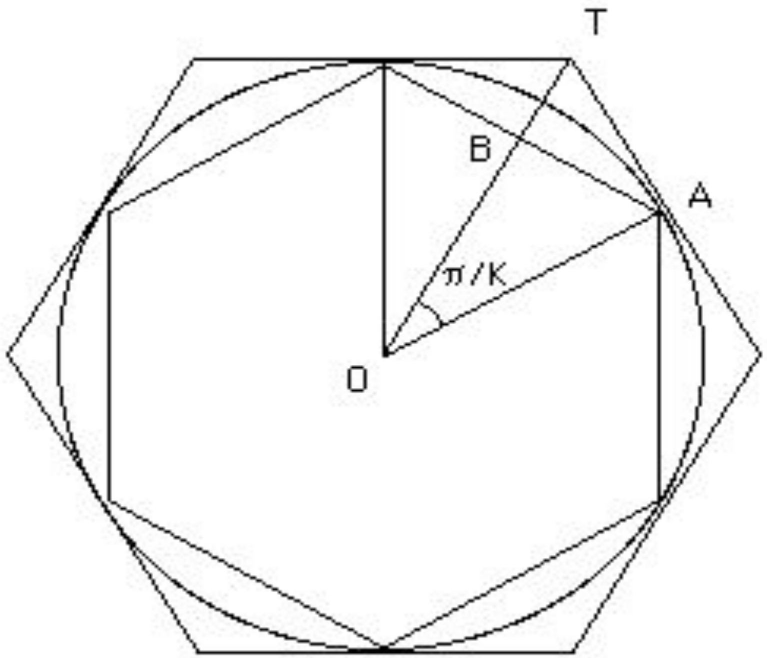
$a_n = K\tan(\pi/K)$, $b_n = K\sin(\pi/K)$,

$a_{n+1} = 2K\tan(\pi/2K)$, $b_{n+1} = 2K\sin(\pi/2K)$,

$a_1=3\tan(\pi/3)=3\sqrt{3}$ & $b_1=3\sin(\pi/3)=3\sqrt{3}/2$

$(1/a_n + 1/b_n) = 2/a_{n+1}$

$a_{n+1}\, b_n = (b_{n+1})^2$



OA = 1

AB = sin(π/K)

AT = tan(π/K)

where $K = 3 \times 2^{n-1}$

עבור -24פוליגון שוב שימוש במשפט פיטגורס פעמיים (**תרגיל בית**) והתשובה 6.26
למעשה ארכימדס השתמש תמיד בקירובים ראציונאליים מהטבלאות הבבליות, למשל:
265/153 < sqrt3 < 1351/780
ארכימדס הגיע עד -96פוליגון. ואז חישב סידרה דומה לפוליגונים החוסמים את ה המעגל
מבחוץ וכך קיבל חסם עליון ותחתון (בדומה לשרש 2)
3 10/71 < pi < 3 1/7
ממוצע של החסמים הוא 3.14185 הערך הנכון הוא 3.14159...

זו דוגמא של חישוב המבוסס על עקרונות של אינפי

symbol	value	symbol	value	symbol	value
α	1	ι	10	ρ	100
β	2	κ	20	σ	200
γ	3	λ	30	τ	300
δ	4	μ	40	υ	400
ϵ	5	ν	50	ϕ	500
(digamma) ϛ	6	ξ	60	χ	600
ζ	7	o	70	ψ	700
η	8	π	80	ω	800
θ	9	(koppa) ϙ	90	(sampi) ϡ	900

$$\sigma\pi\zeta = 287$$
$$'\gamma\sigma\pi\zeta = 3287$$
$$M^{\epsilon} = 50,000$$
$$M^{\alpha\beta}\sigma\pi\zeta = 120,287$$

שיטת כתיבה של **<u>מספרים גדולים</u>**:
מבוסס על הנוסחא:

$$10^a 10^b = 10^{a+b}$$

המיספור היוני הוגדר עד M = 10,000
שנקרא myriad "לא ניתן למניה", מעין אינסוף

ארכימדס החליט על "בסיס" של 10^8
שקרא לו 1st myriad

2nd myriad $$(10^8)^{(10^8)} = 10^{8\cdot 10^8}$$

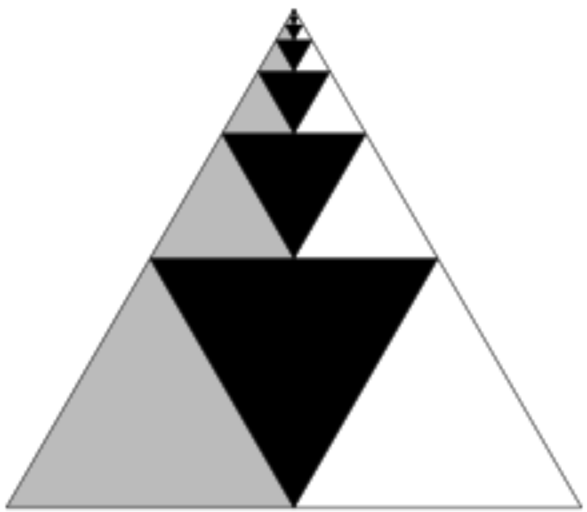
3rd myriad $$\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{(10^8)} = 10^{8\cdot 10^{16}}.$$

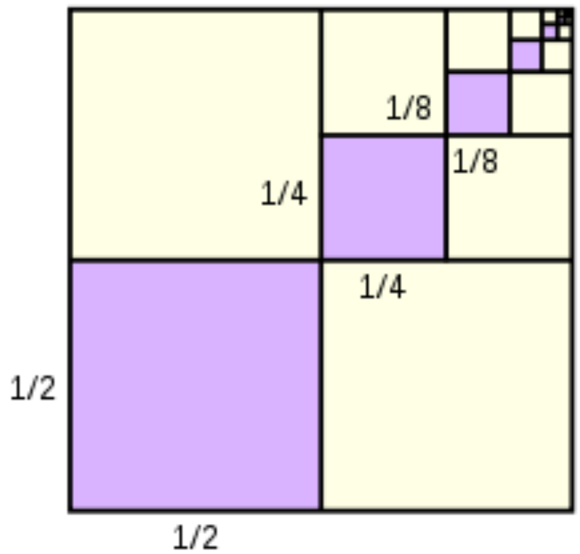
"מחשב החול": ארכימדס חישב מספר גרגרי החול שיכול להכיל העולם:
בכתיבה שלנו $8x\ 10^{63}$

<u>טורים אינסופיים</u>

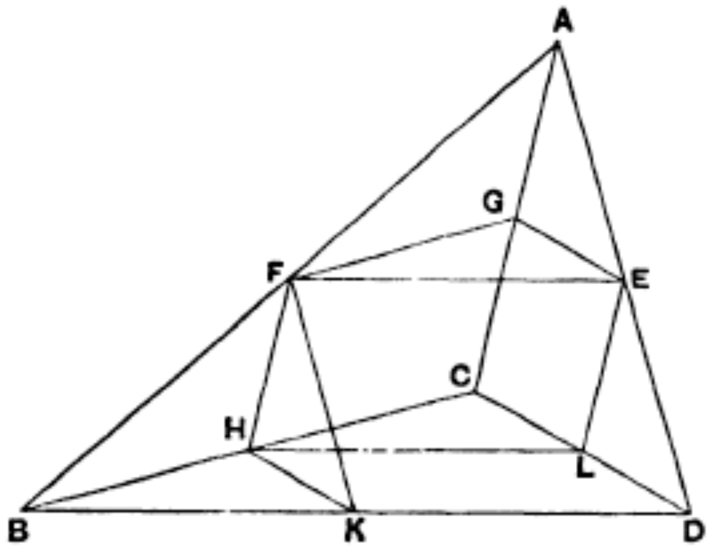
$$1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 + \ldots = \ ?$$

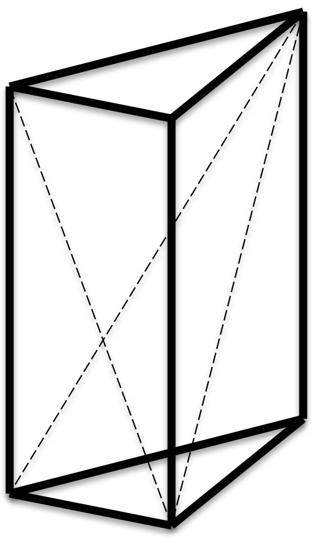
אם שטח הריבוע = 1, הריבועים הסגולים שוים בשטחם לצהובים שמעליהם וכן לצהובים
שמימינם, ומאחר וכולם מכסים שטח = 1 סכום הסדרה $1/3$.
טיעון דומה למשולשים.





פירמידות (דלתונים) דומות: אם נכפיל צלעות פי 2 הנפח גדל פי 8 – ראה איך להכניס 8
פירמידות קטנות בגדולה:
3 פירמידות נכנסות בכל אחת מהפריזמות HFGELC ו– HKFLDE כאשר שטח בסיסן וגובהם
כשתי הפירמידות בפינות BKHF ו– AFGE



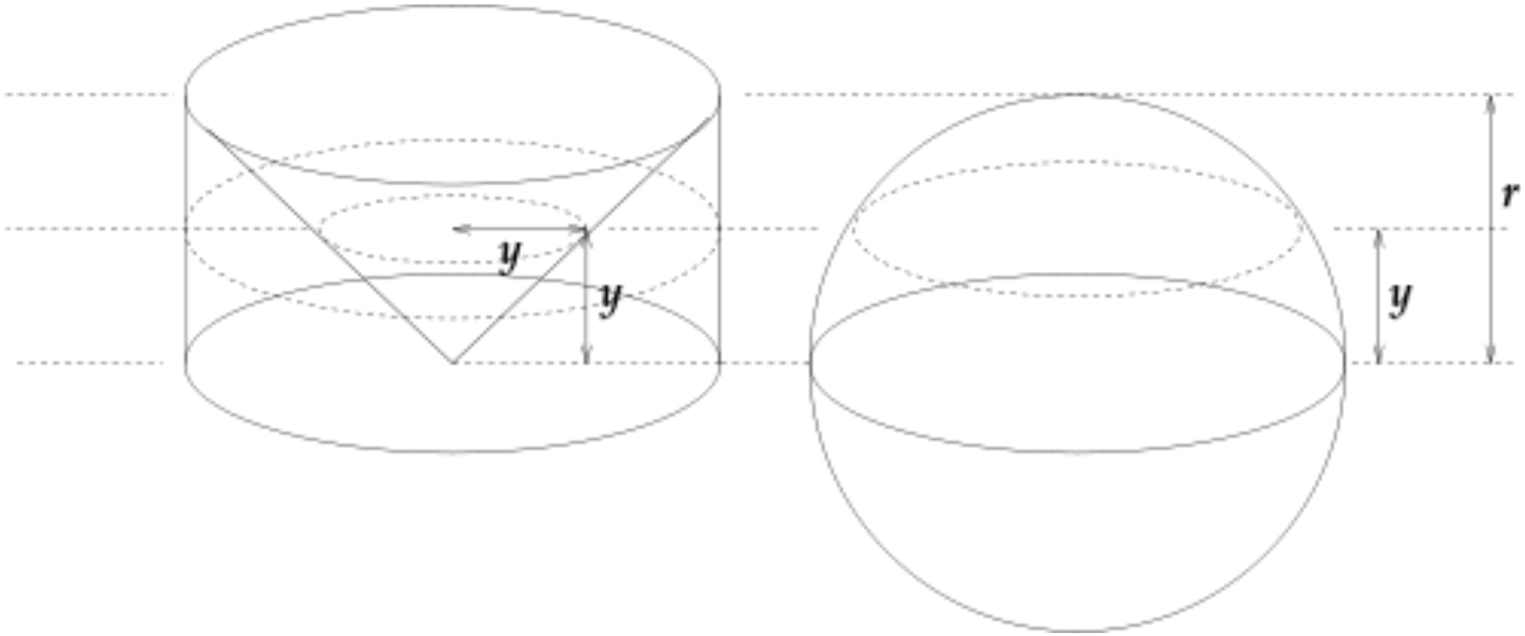


כל מנסרה משולשת ניתן לחלק לשלש פירמידות שוות נפח

משפט קבאליירי 1598-1647 **Bonaventura Francesco Cavalieri**

נכון לשטחים ולנפחים: אם שתי צורות שוות באורך/שטח בכל חתך שלהן אזי שטחיהן/נפחיהן שווים.
התמונה ממחישה ששתי ערימות המטבעות שוות בנפחן

דוגמא א: נפח כדור שוה לפעמיים נפח גליל להוציא חרוט שרדיוס בסיסו וגובהו שוים לרדיוס הכדור: בכל חתך שטח חתך הכדור (r^2-y^2) π וזה גם שטח חתך הגליל בלי הקונוס. נפח הקונוס $\pi r^3/3$ לכן נפח הכדור 2/3 מנפח הצילינדר $r^3(1-1/3)2=4/3\pi r^3$

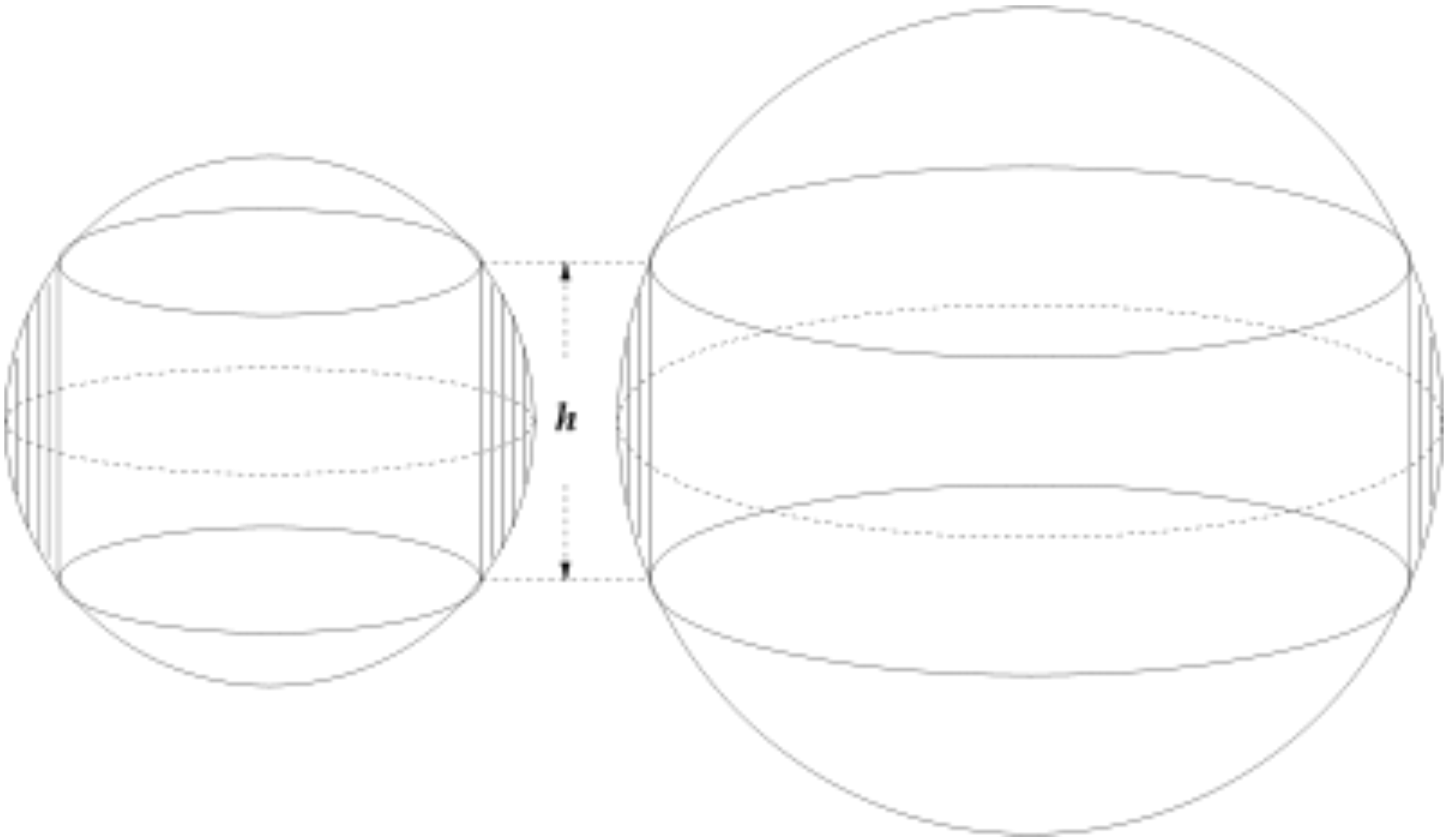


גם שטח פני הכדור, $4\pi r^2$ הוא $2/3$ משטח (כולל בסיסיו) הצילינדר החוסם אותו: $4\pi r^2+2\pi r^2$

דוגמא ב: אם נקדח בכדור חור כך שתשאר מעטפת בגובה h הנפח שישאר לאחר הקידוח אינו תלוי ברדיוס הכדור. שטח הטבעת עבור מרחק y מהמרכז הוא π כפול ההפרש בין העיגול החיצוני לפנימי שהוא

$$(r^2-y^2)-(r^2-(h/2)^2)=(h/2)^2-y^2$$

ואינו תלוי ב- r. באופן אינטואיטיבי תוצאה מפתיעה זו נובעת מהעובדה שככל שהרדיוס גדל ההקף של החמר שנשאר אמנם גדל אך עוביו קטן.



התמונה של כדור
החסום בגליל
שארכימדס ביקש
לצייר על קיברו,
עדות לחשיבות ממצא
זה בעיניו
(לפי ציצרו 75 לפה"ס)

ארכימדס מיחס לאיודוקסוס Eudoxus
נפח פירמידה = 1/3 מנפח פריזמה עם אותו בסיס
נפח קונוס = 1/3 מנפח גליל עם אותו בסיס
נפחי קונוסים שוי גובה כיחס שטחי בסיסיהם
נפחי קונוסים שוי גובה לגלילים כיחסי שטחי בסיסיהם
וכו'
אנחנו היינו כותבים לפירמידות וקונוסים: $V=A*H/3$

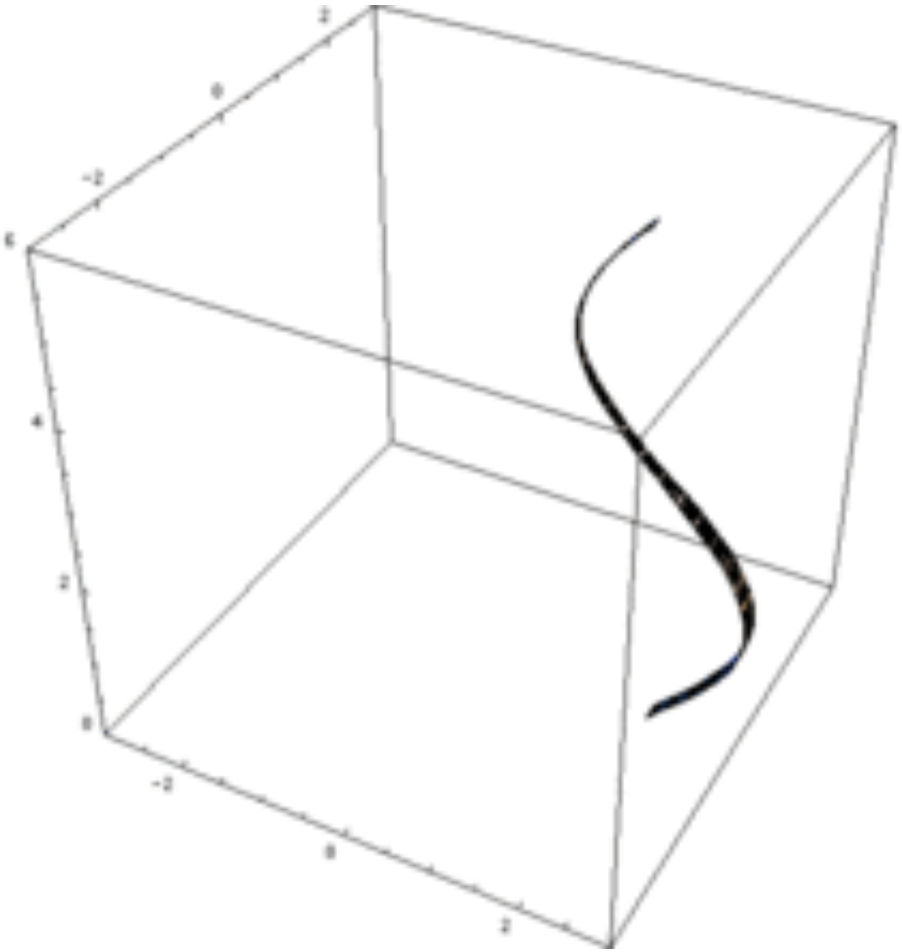
<u>יחס נפחי כדורים כיחס הרדיוסים שלהם בחזקה שלישית</u>
<u>אנחנו היינו כותבים: $V \sim R^3$</u>

שטח פנים ונפח גופי סיבוב : משפט גולדין   Paul -Habakkuk Guldin 1577-1643

(למעשה נוסח תחילה ע"י פאפוס 290-350 Pappus of Alexandria)

Pappus-Guldinus theorem

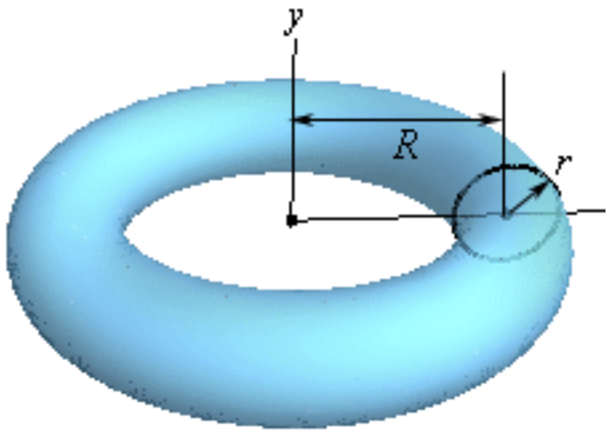
אם עקום מישורי סגור בעל אורך S (שטח A) מסתובב סביב ציר, כך שכל האורך (השטח) למעט נקודות קצה נמצא בצידו האחד של הציר, ויוצר גוף סיבובי, שטחו (נפחו) של גוף זה שווה לאורך (לשטח) כפול הקף המעגל שיוצר מרכז הכובד שלו, 2πRS (2πRA)



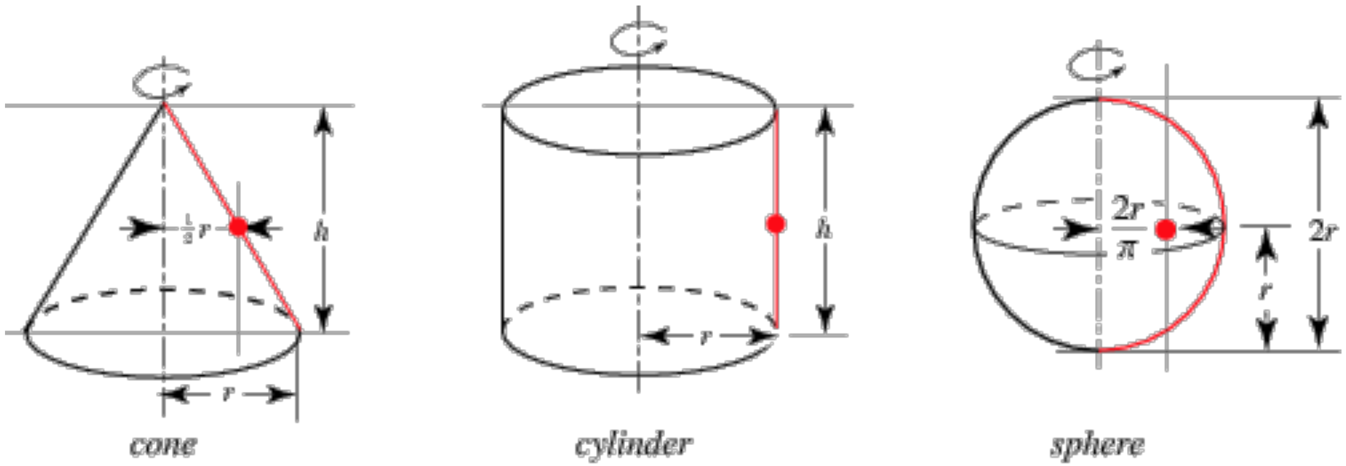
לדוגמא : לטורוס שרדיוסו הקטן (עוביו) r ורדיוסו הגדול R

$$A = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 Rr.$$

$$V = (\pi r^2)(2\pi R) = 2\pi^2 Rr^2.$$



Pappus's Centroid Theorem



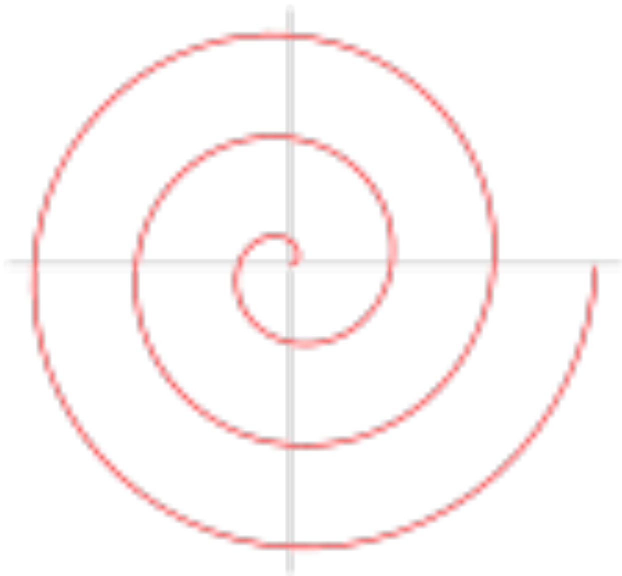
	לחרוט	לגליל	לכדור
אורך הקו	$\sqrt{r^2+h^2}$	h	πr
רדיוס מרכז הכובד	$\frac{1}{2}r$	r	$2r/\pi$
שטח פנים 2p	$\pi r\sqrt{r^2+h^2}$	$2\pi r h$	$4\pi r^2$
שטח הצורה	rh/2	rh	$\pi r^2/2$
מרכז הכובד	r/3	r/2	$4r/3\pi$
נפח	$\pi r^2 h/3$	$\pi r^2 h$	$4/3\pi r^3$

<u>ספירלה (של ארכימדס)</u>

משאיבה ספירלית

קל לצייר במערכת צירים קטבית (מעגלית)

$$r = a + b\theta$$



בנית צורות משחק הסטומכיון – Stomachion game

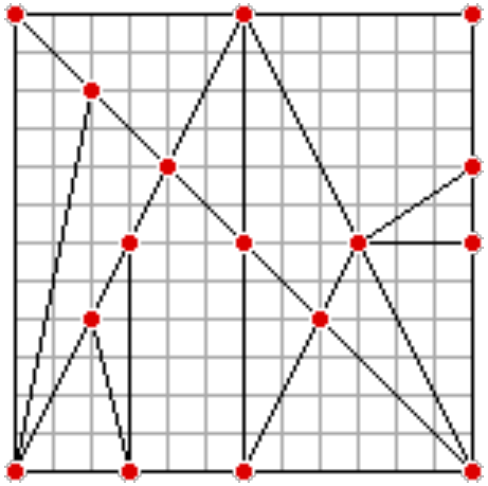
נשרטט על ריבוע שריג של ריבועים שצלעם – 1/12 מהריבוע.

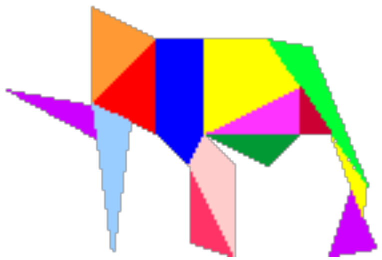
ונחלק את הריבוע למשולשים שקדקדיהם יושבים על קדקדי השריג (נקודות אדומות)

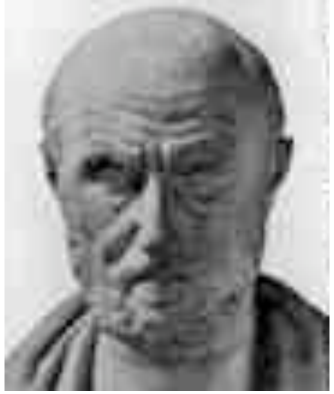
שטחי המשולשים 3, 3, 6, 6, 6, 6, 9, 12, 12, 12, 12, 12, 21, 24

ויחסי השטחים 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 7, 8

יש 536 דרכים לסדר את המשולשים בריבוע

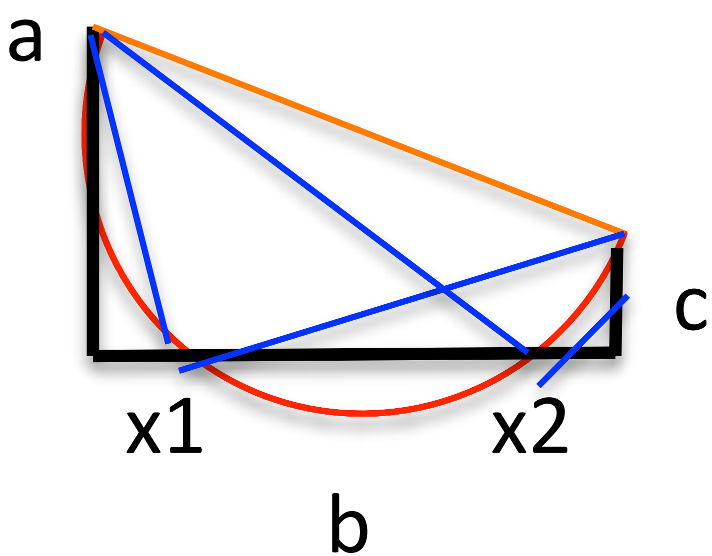


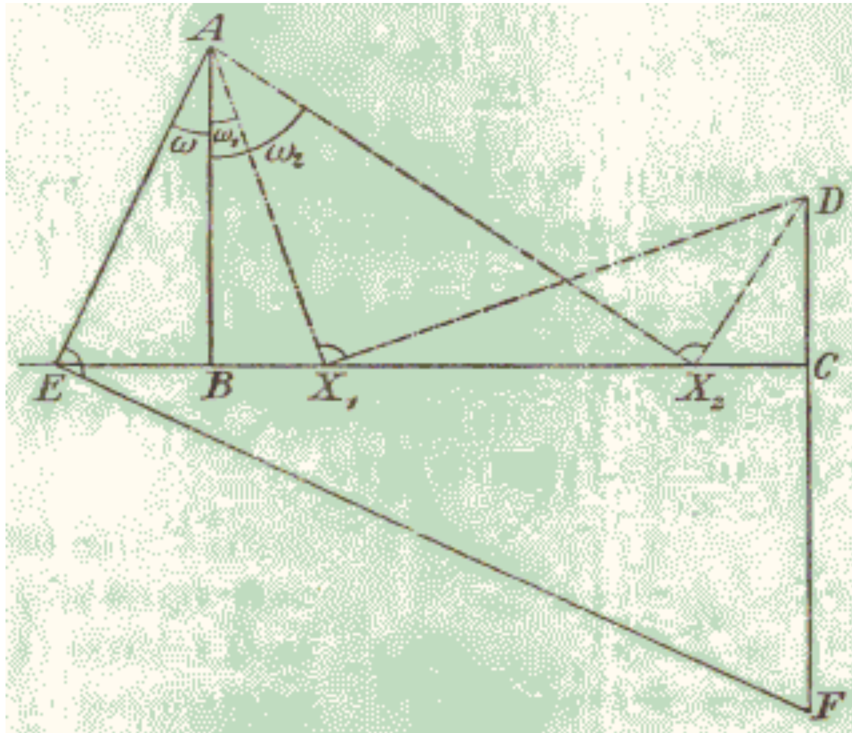




470–410 לפה"ס **היפוקרטס Hippocrates of Chios**
תלמיד של פיתגורס כתב "אלמנטים של גיאומטריה
(לא היפוקרטס מקוס 460–370 לפה"ס
" שלו מיוחסת שבועת הרופא **Hippocrates of Cos**)

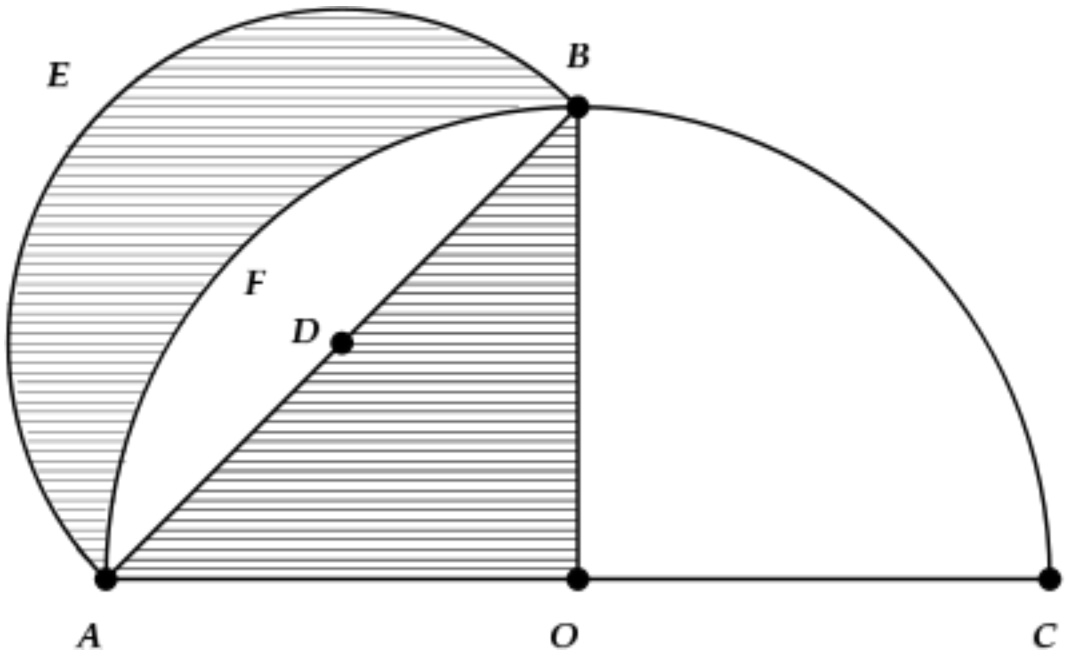
פתרון משוואות ריבועיות ע"י בניה גיאומטרית.





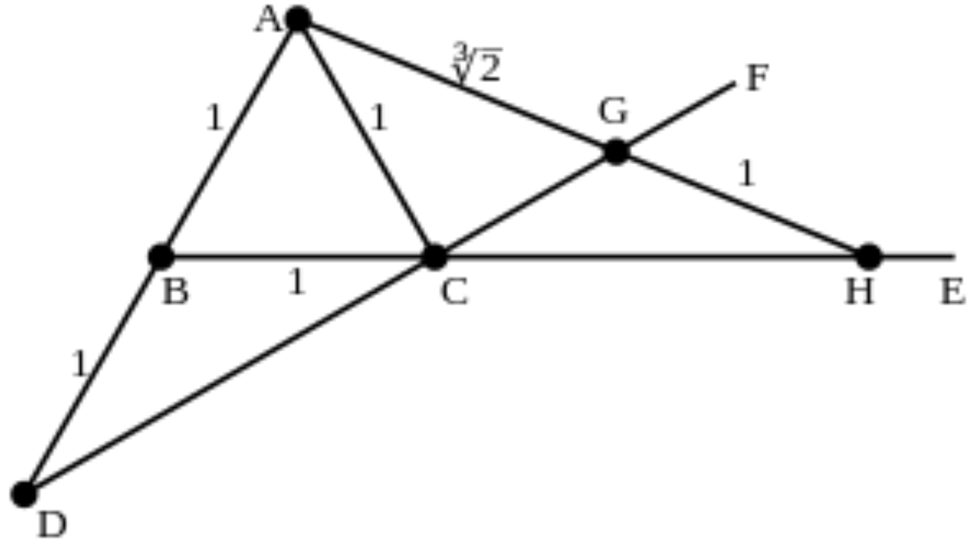
ניסה לראשונה: יחס שטחי מעגלים כריבוע יחס הרדיוסים שלהם.

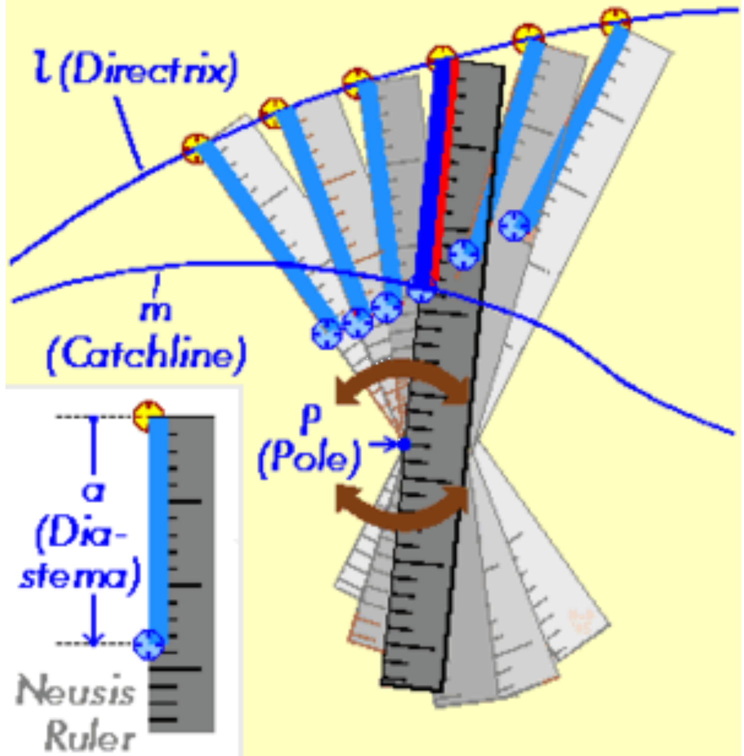
אלמנטים של אינטגראלים לבעית **<u>ריבוע המעגל</u>**.
הירח של היפוקרטוס: הוכיח שהשטחים המוצלים A,a שווים. חשב שזה צעד לקשור שטח מעגל לשטח משולשים או מרובעים.



$R=AO$ $r=AD=\mathrm{sqrt}(2R^2)/2=R/\sqrt{2}$ $A=R^2/2$
$a=\pi r^2/2-(\pi R^2/4-A)=\pi R^2/4-\pi R^2/4+A=A$ מ.ש.ל.

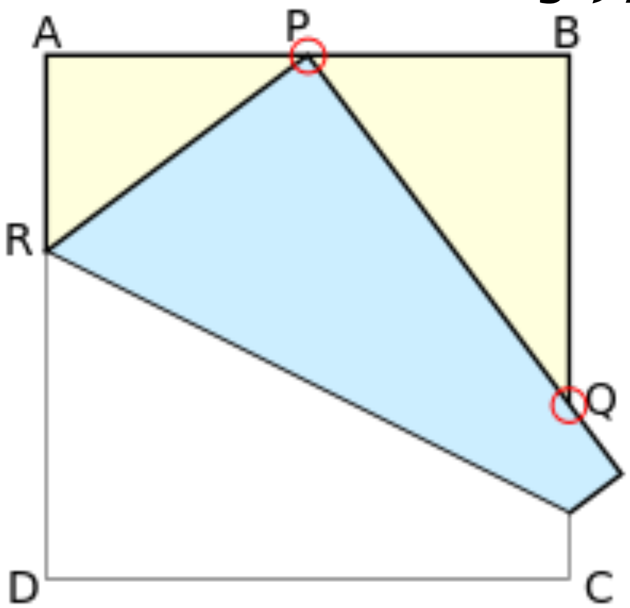
בניה גיאומטרית של $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$
לא ניתן לבנות בסרגל ומחוגה,
אבל ניתן עם neusis (התאמת קטע בין שתי עקומות כך שהמשכו יעבור בנקודה p)





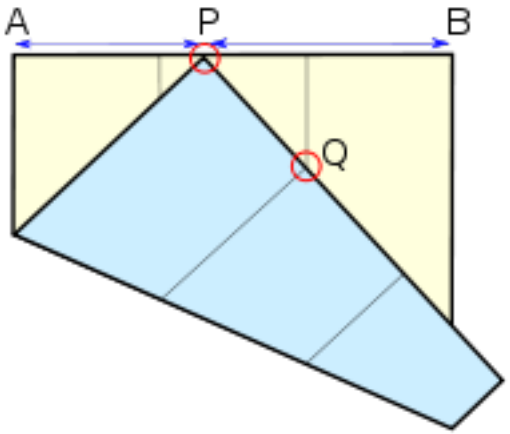
קטע היחידה – GH
בנה משולש שוה צלעות – ABC
המשך את הצלע AB בעוד יחידה – לנקודה D
המשך את הצלע BC לכוון E
המשך DC לכוון F
סובב סרגל סביב A כך שהמרחק בין חיתוכיו עם CF ו– CE בנקודות G ו– H יהיה יחידה
שוה באורכו לשרש שלישי של AG 2

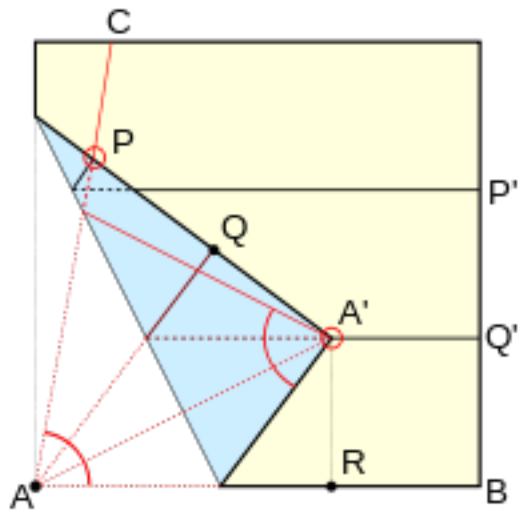
משפט אגאס – וחלוקת זוית ל-3



$$BQ = \frac{2AP}{1+AP}.$$

אם מחלקים ריבוע לשלש ומקפלים כך שהקדקד יפול על הצלע וקוי השליש ייפגשו ב–Q
אז: $PB=PA^{*}\ 2^{1/3}$
וכך גם ניתן לחלק זוית לשלש כאשר הנקודה P נופלת על צלע הזוית המלאה A מחלק לשליש





אנופידס מכיוס Oenopides of Chios 400 לפה"ס מבדיל בין "אכסיומות" לבין "בעיות" שניתן לפתור על סמך האכסיומות, ומנסח שלש אכסיומות מתוך חמש שעליהן בנה אוקלידס את הגיאומטריה:

1. שתי נקודות מגדירות קו (יחיד)
2. קטע (חלק של קו ישר) ניתן להמשכו בקו ישר (יחיד)
3. מרכז ורדיוס מגדירים מעגל (יחיד)
4. כל הזויות הישרות חופפות
5. אם קו ישר יוצר עם שני קוים אחרים זויות (פנימיות) שסכומן אינו שוה 180 מעלות הקוים נפגשים בהמשכם לכוון שסכום הזויות פחות מ-180

הנחה חליפית: דרך נקודה מחוץ לקו עובר קו מקביל יחיד

אוקלידס גם קבע הגדרות: "common notions"

1. שני דברים (Things) השוים לדבר שלישי שוים ביניהם
2. אם מוסיפים שני זוגות ערכים שוים התוצאות שוות
3. אם מחסרים שני זוגות ערכים שוים התוצאות שוות
4. תכונה משקפת (רפלקטיבית): שני דברים חופפים שוים ביניהם
5. השלם גדול מחלקיו

הוכחות הן משני סוגים: קונסטרוקטיבית, והוכחה על ידי סתירה
מדדים בגיאומטריה אוקלידית: מרחקים וזויות. חופפות=מרחקים וזויות שוים. דמיון=זויות שוות, בין המרחקים יחס קבוע.

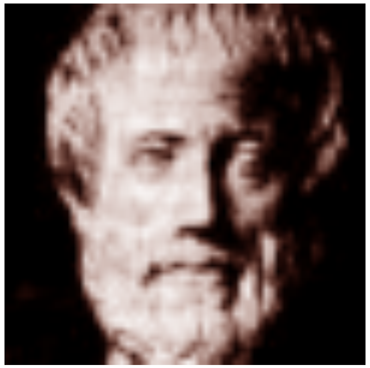
משפטים:

1. אם במשולש זויות הבסיס שוות השוקיים שוות ולהפך
2. סכום זויות המשולש = 180
3. משפט פיטגורס
4. משפט תלס: זוית הנשענת על קוטר עיגול היא זוית ישרה
5. שטח צורות דומות יחסי לריבוע כל אחד מממדיו (אוקלידס הוכיח למיקרים מיוחדים)
6. נפח צורות דומות יחסי לחזקה שלישית של כל אחד מממדיו

האקדמיה באתונה אפלטון ואריסטו במרכז – ציור של רפאל

Plato אפלטון 427-347 לפה"ס

לוגיקה מתמטית, יסודות הגיאומטריה
מיסד את "האקדמיה". 387 לפה"ס כותב את "Phaedo" בו מתאר עצמים מתמטיים מושלמים: קו עם אורך אך ללא עובי. מושג הגדרה היפותיזה והוכחה שסללו את הדרך לאוקלידס
העולם מורכב **<u>מואקום ואטומים</u>** המתחברים ליצור את כל החמרים - דוממים וחיים



אריסטו Aristotle 384-322 BC

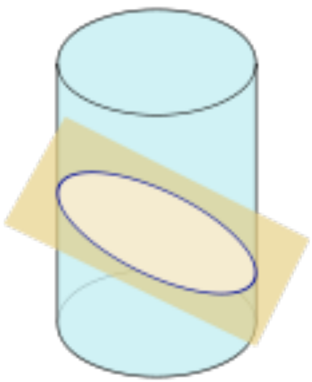
תלמיד של אפלטון. העולם מורכב מארבעה "יסודות" – אש, אדמה, אויר ומים.
ייסד את הליסאום ("Lyceum"). ביסוד אמונתו שהאמת קיימת בלי תלות בנסיונות שבודקים אותה.

אפלטון ואריסטו היו מורים של אלכסנדר הגדול 356-323 לפה"ס.

תיאתטוס תלמידו של אפלטון **Theaetetus of Athens 417–369 BC**
גיאומטריה מרחבית של גופים – אוקטאדר, איקוזאדר (כרך 13 אוקלידס) מספרים רציונאליים ואירציונאליים – כרך 10

Theatetus Menaechmus 380–320 BC תיאטטוס
חתכי גליל וקונוס

כל האפשרויות למשוואות במישור xy מדרגה שניה $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$



עיגול או אליפסה

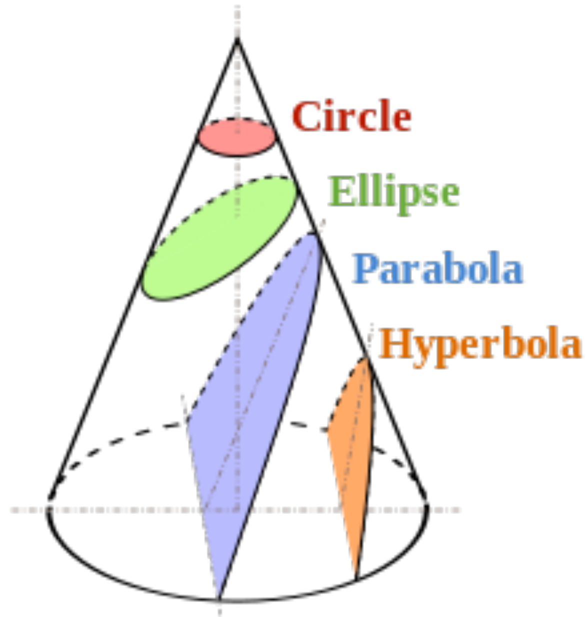
המשוואות ה"קנוניות" של חתכי הקונוס:

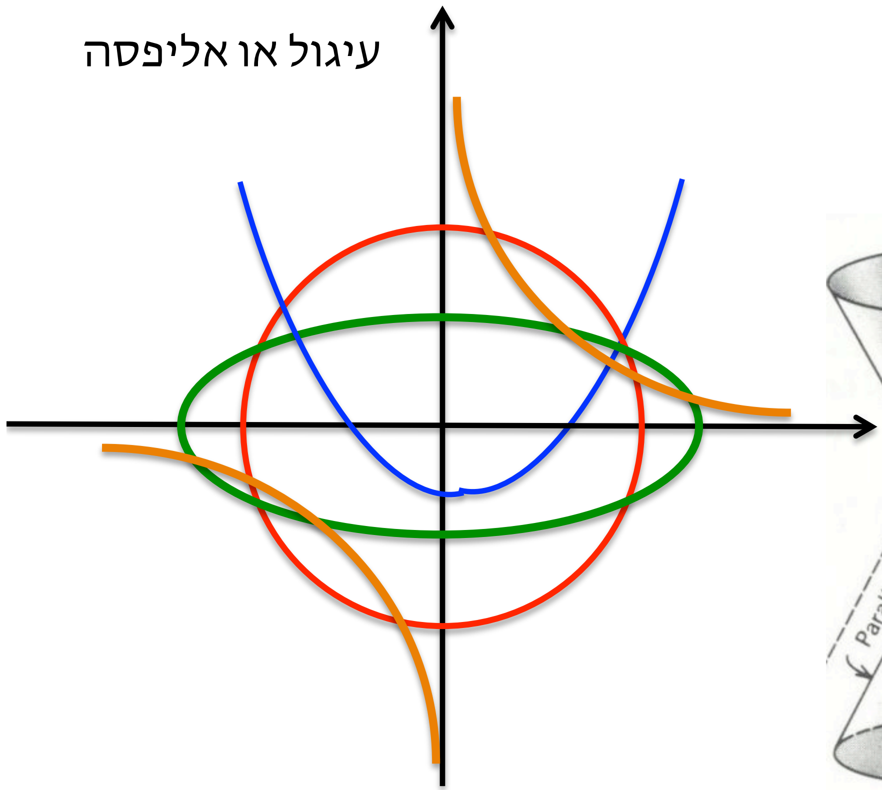
מעגל: $X^2+Y^2=R^2$

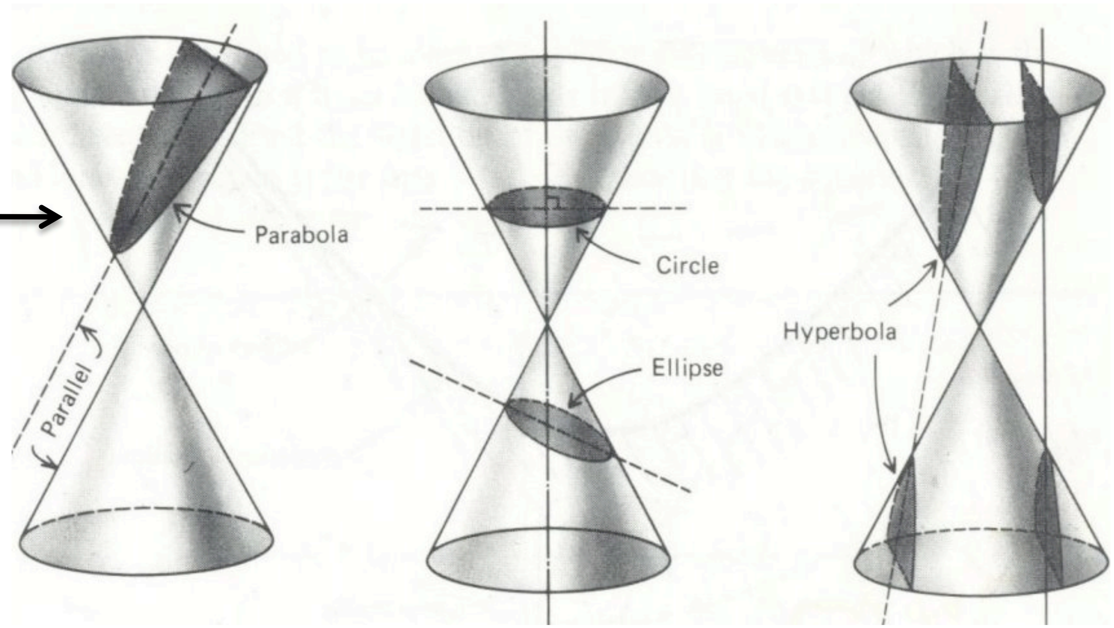
אליפסה $(X/A)^2+(Y/B)^2=1$

פרבולה $Y=AX^2$

היפרבולה $Y=A/X$

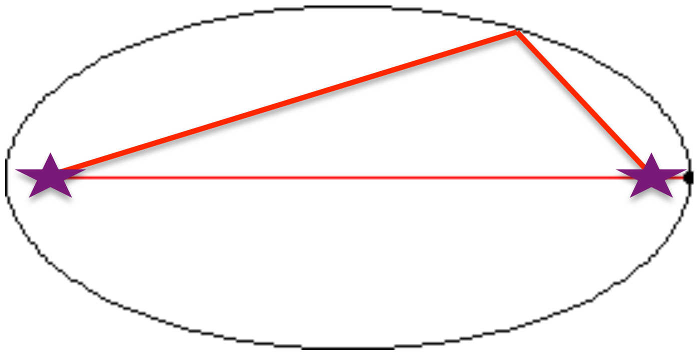




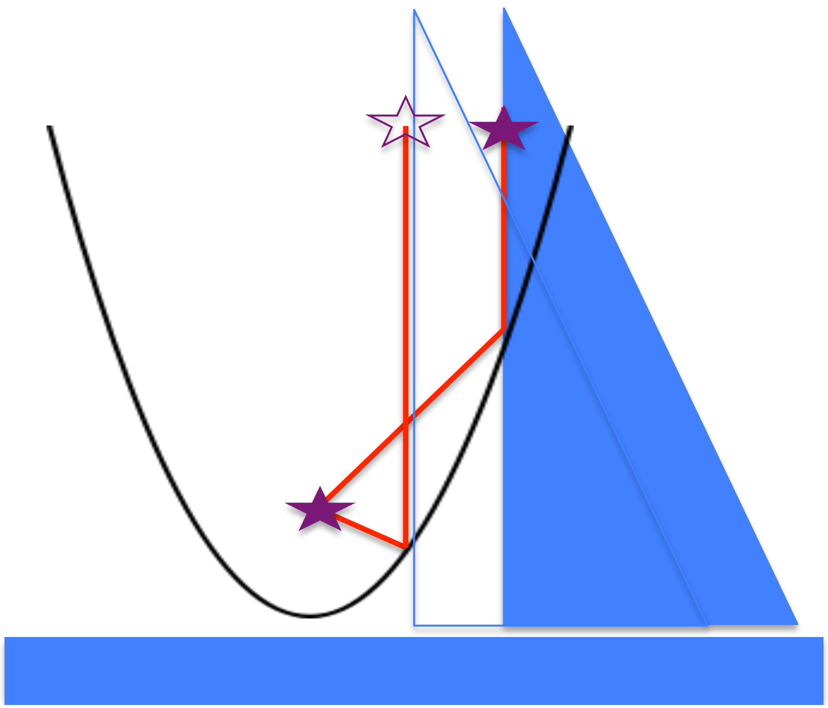


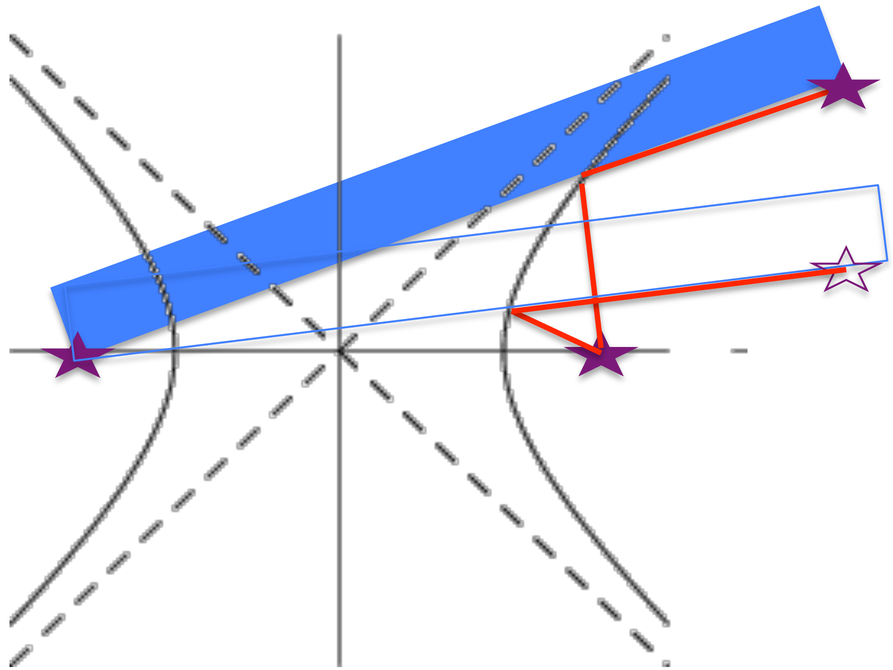
–הגדרת מעגל – מרחק כל הנקודות עליו מהמרכז זהה
הגדרת אליפסה – סכום המרחקים משני הפוקוסים אל הנקודות עליה זהים

ציור אליפסה משני נעצים וחוט
פרבולה – מחוט, שני נעצים ומשולש מוזז על סרגל
היפרבולה - מחוט שני נעצים וסרגל מסתובב על נעץ



הוכח!





Apollonius of Perga 262–190 BC אפולוניוס

Index	Code	Given Elements	Number of solutions (in general)	Example (solution in pink; given objects in black)
1	PPP	three points	1	
2	LPP	one line and two points	2	
3	LLP	two lines and a point	2	
4	CPP	one circle and two points	2	
5	LLL	three lines	4	
6	CLP	one circle, one line, and a point	4	
7	CCP	two circles and a point	4	
8	CLL	one circle and two lines	8	
9	CCL	two circles and a line	8	
10	CCC	three circles (the classic problem)	8	

חתכי קונוס.
פתרונות לבניית
מעגלים המשיקים
למעגלים, קוים,
או עוברים דרך
נקודות

אוקלידס

Euclid of Alexandria

325-265 BC

Euclid of Alexandria 325–265 BC אוקלידס

"האלמנטים" (של המתמטיקה) ב-13 כרכים
גיאומטריה אוקלידית

13 כרכי "האלמנטים" (של גיאומטריה) מאת אוקלידס

Euclid's "Elements" http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

Book I. The fundamentals of geometry: theories of triangles, parallels, and area.
Definitions Postulates Common Notions Propositions

Book II. Geometric algebra. Definitions Propositions

Book III. Theory of circles. Definitions Propositions

Book IV. Constructions for inscribed and circumscribed figures.Definitions Propositions

Book V. Theory of abstract proportions. Definitions Propositions

Book VI. Similar figures and proportions in geometry. Definitions Propositions

Book VII. Fundamentals of number theory. Definitions Propositions

Book VIII. Continued proportions in number theory. Propositions

Book IX. Number theory. Propositions

Book X. Classification of incommensurables.
Definitions I Propositions 1-47 Definitions II Propositions 48-84 Definitions III Propositions 85-115

Book XI. Solid geometry. Definitions Propositions

Book XII. Measurement of figures. Propositions

Book XIII. Regular solids. Propositions

Other books: *Data, On Divisions of Figures,* the *Phaenomena,* the *Optics*

Lost books: *Surface Loci, Porisms, Conics,* and the *Pseudaria* (that is, the *Book of Fallacies*)

יסודות לוגיקה מתמטית:

אם .... אז ....

הכרחי ומספיק

למה, הנחה (סברה) והוכחה Lema, conjecture, proof

The Original Euclid's Postulates (5)

1. For every point *A* and for every point *B* not equal to *A* there exists a unique line that passes through *A* and *B*.
2. For every segment *AB* and for every segment *CD* there exists a unique point *E* such that *B* is between *A* and *E* and such that segment *CD* is congruent to segment *BE*.
3. For every point *O* and every point *A* not equal to *O*, there exists a circle with center *O* and radius *OA*.
4. All right angles are congruent to each other.
5. (Euclid's Parallel Postulate) For every line *l* and for every point *P* that does not lie on *l*, there exists a unique line *m* passing through *P* that is parallel to *l*.

Incidence Axioms (3)

1. Given 2 distinct points there is a unique line incident with them.
2. Given a line there exist at least 2 distinct points incidence with it.
3. There exist 3 distinct points not incident with the same line.

Incidence Propositions

1. If 2 distinct lines are not parallel then they have a unique common point.
2. There exist 3 distinct lines which are not concurrent.
3. For every line there is at least one point not incidence with it.
4. For every point there is at least one line not incidence with it.
5. For every point there exist at least 2 lines incidence with it.

Betweenness Axioms (4)

1. If $A*B*C$ then also $C*B*A$ and A, B, C are distinct collinear points.
2. Given 2 points P and Q there exist 3 points A, B, C such that $P*A*Q$ and $P*Q*B$ and $C*P*Q$.
3. Given 3 collinear points, only one of them can be between the other two.
4. (Plane Separation) For every line l and for every 3 points A, B, C not on l,

(a) If A,B are on the same side of and B,C are on the same side of l, then A,C are on the same side of l.

(b) If A, B are on the opposite sides of l and B, C are on the opposite sides of l, then A, C are on the same side of l. Corollary:

(c) If A,B are on the opposite sides of l and B,C are on the same side of l, then A, C are on the opposite sides of l.

Betweenness Propositions

1. AB> [cut] BA>=AB andAB> [union] BA>=<AB>
2. Every line gives exactly two mutually exclusive half-planes.
3. (a) Given A*B*C and A*C*D then B*C*D and A*B*D

   (b) Given A*B*C and B*C*D then A*B*D and A*C*D
4. Line Separation Property
5. Given A*B*C then

   (a) AB[union]BC=AC

   (b) AB[cut]BC={B}

   (c) BA>[cut]BC>={B}

   (d) AB>=AC>
6. Pasch's Theorem
7. Given <CAB and a point D on the line BC, then D belongs to the interior of <CAB if and only if B*D*C.
8. If D is in the interior of <CAB then

   (a) so is all of ray AD except A itself

   (b) theoppositeofrayADiscompletelyintheexterior

   (c) if C*A*E then B is in the interior of <DAE
9. Crossbar Theorem

Congruence Axioms (6)

1. Given segment AB and any ray with vertex C, there is a unique point D on this ray such that $AB \approx CD$.
2. If$AB\approx CD$ and$AB\approx DF$ then$CD\approx DF$.
3. Given$A*B*C$ and$D*E*F$, if$AB\approx DE$ and$BC\approx EF$ then$AC\approx DF$.
4. Given <D and any ray AB there is a unique ray AC on each half-plane of the line AB such that <BAC ≈ <D.
5. If <A≈<B and <A≈<C then <B≈<C.
6. (SAS Criterion) If 2 sides and the included angle of a triangle are congruent to those of another triangle, respectively, then the two triangles are congruent.

Congruence Propositions

1. Segment Subtraction
2. Segment Ordering
3. Supplements of congruent angles are congruent.
4. All vertical angles are congruent to each other.
5. An angle congruent to a right angle is a right angle.
6. Given a line l and a point P there exists a line through P perpendicular to l.
7. ASA Criterion
8. Isosceles Triangle Theorem
9. Angle Addition
10. Angle Subtraction
11. Angle Ordering
12. SSS Criterion
13. All right angles are congruent to each other.

Continuity Axioms (2)

1. (Circular Continuity Principle) If a circle has one point inside and one point outside another circle, then the two circles intersect in two points.
2. (Archimedes' Axiom) Given segment *CD* and any ray *AB* there is a number *n* and a point *E* on this ray such that *n* x *CD* ≈ *AE* >= *AB*.

Parallelism Axiom (1)

ï (Hilbert's Parallel Axiom) Given a line *l* and a point *P* not on *l*, there is at most one line through *P* which is parallel to *l*.

Theorems in Neutral Geometry:

1. Alternate Interior Angle Theorem and its corollaries:
   (a) Two lines perpendicular to another line are parallel.
   (b) Given a line l and a point P not on l, there is a unique line through P which is perpendicular to l.
   (c) Given a line l and a point P not on l, there exists a line through P which is parallel to l.
2. SAA Criterion
3. Every segment has a unique midpoint.
4. Every segment has a unique perpendicular bisector.
5. Every angle has a unique bisector.
6. Given ΔABC, $AB > BC$ if and only if $\angle C > \angle A$.
7. Given ΔABC and ΔDEF with $AB \approx DE$ and $BC \approx EF$, then $AC < DF$ if and only if $\angle B < \angle E$.
8. Triangle Inequality Theorem
9. Saccheri-Legendre Theorem
10. If there is one triangle with angle sum = 180^o then a rectangle exists.
11. If a rectangle exists then every triangle has angle sum = 180^o.
12. If there is one triangle with angle sum < 180^o then every triangle has angle sum < 180^o.

Note: Using Euclid's Parallel Postulate it can be proved that in Euclidean Geometry the angle sum of any triangle = 180°. In Hyperbolic Geometry angle sum of any triangle always < 180° whereas in Elliptic Geometry > 180°.

13. Euclid's Parallel Postulate is equivalent to each of the following statements:

(a) If two lines are cut by a transversal such that two interior angles of the same side have degree sum < 180° then the two lines intersect on this same side.

(b) Hilbert's Parallel Axiom

(c) If a line intersects l then it intersects any line which is parallel to l.

(d) The converse of the Alternate Interior Angle Theorem

(e) If $l1 \; // l2$ and $m \perp l1$ then $m \perp l2$.

(f) If $l1 \; // l2$ and $m1 \perp l1$ and $m2 \perp l2$ then either $m1 = m2$ or $m1 \; // m2$.

Hyperbolic Axiom (1)

ï There exists a line *l* and a point *P* not on *l* such that there are at least two lines through *P* which are parallel to *l*.

Theorems in Hyperbolic Geometry:

1. There are no rectangles.
2. Universal Hyperbolic Theorem
3. For every line *l* and a point *P* not on *l*, there are infinitely many lines through *P* which are parallel to *l*.
4. The angle sum of any triangle < 180^{o}.
5. A A A Criterion

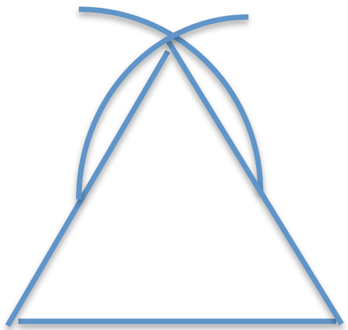
Note: It can be proved that, if Euclidean Geometry is consistent then

(a) so is Hyperbolic Geometry

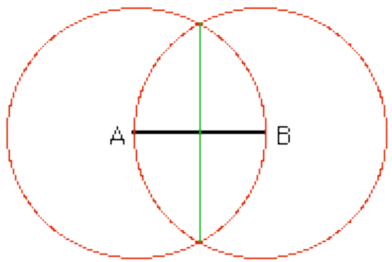
(b) the Parallel Axiom is independent from the other axioms.

<u>בניות גיאומטריות</u>

בנית משולש שווה צלעות:



חצית קו לשני חלקים שוים וגם בנית אנך אמצעי:

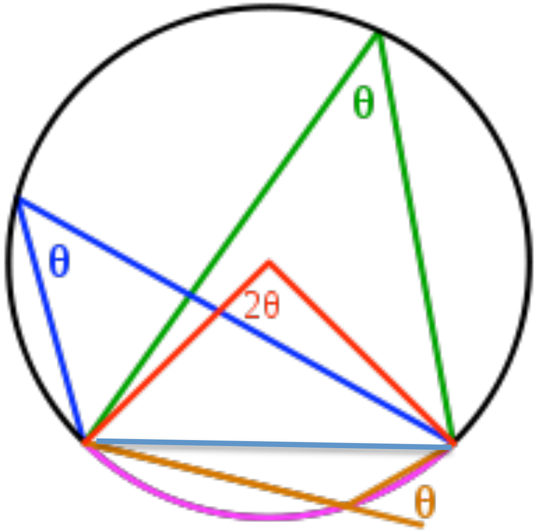


משפטים בגיאומטריה במישור

זויות הנשענות על אותו מיתר באותו צד של המעגל – שוות

זויות הנשענות על אותו מיתר משני צידי המעגל – משלימות

זוית ממרבז המעגל כפולה מזוית הנשענת על אותו מיתר



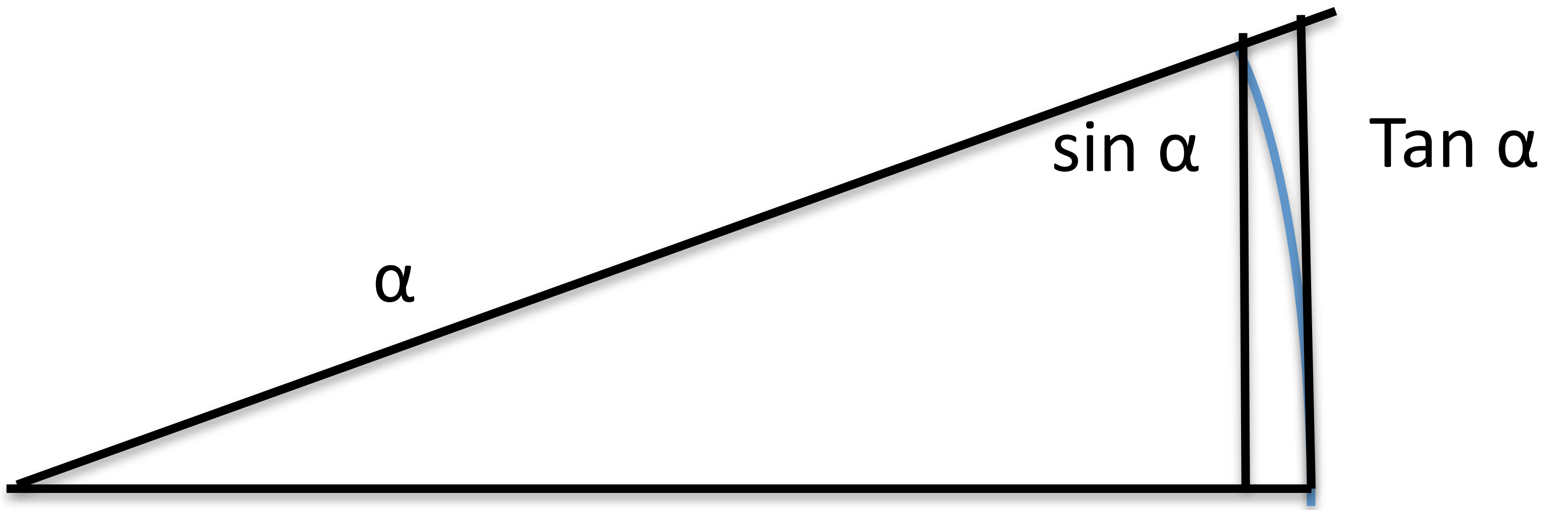
הוכחה: #############

BC 310-230 Aristarchus of <u>Samosis</u>

אריסטרכוס היה הראשון להציע שהשמש במרכז סיבוב כוכבי הלכת

לזיות קטנות $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$

<u>$\sin\alpha/\sin\beta < \alpha/\beta < \tan\alpha / \tan\beta \quad 0° < \beta < \alpha < 90°,$</u>



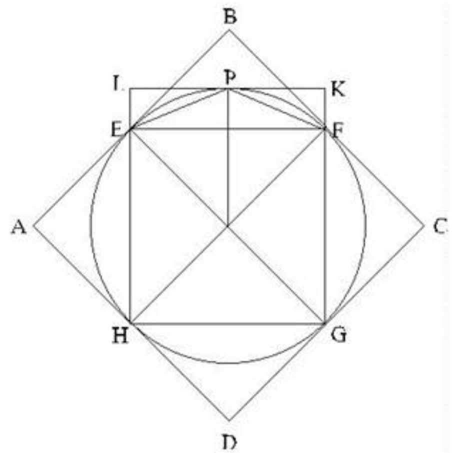
תחילת המתמטיקה של דיפרנציאלים ואינטגראלים (אינפי, Calculus)

הדיון באינטרוואלים שהציג זנו המשיך בעבודותיהם של יודוקסוס אוקלידס וארכימדס.
זינו כנראה לימד את סוקרטס לשאול ולחפש תשובה כדרך עיקבית להבנה וגילוי מדעיים.
הוא לא היה אדם נוח וקנה לו אויבים. לבסוף נידון למוות בגין בגידה כלשהי.
ראה Neugebauer, The Exact Sciences in Antiquity, Dover, page 78.
ארכימדס פתר את בעית "ריבוע המעגל" או חישוב ערכו של π
המצרים והבבלים כנראה <u>מדדו</u> את היחס בין ההקף לקטר והשתמשו בערך 3.16
לא ברור אם ידעו שגם השטח נקבע ע"י אותו גודל (השתמשו בנוסחא $A=(8/9d)^2$)
ארכימדס השתמש בשיטה גיאומטרית להעריך את π

(**יודוקסוס** תיאוריה של יחסים (כרך 5 הגדרות 4,5 **Eudoxus of Cnidus 408-355 BC**
הבסיס של חתך דדקינד Dedekind 1872 שיטת המיצוי Exhaustion – אינטגרציה של מעגל, פירמידה, חרוט

שיטת המיצוי של יודוקסוס

התרומה של יודוקסוס לתהליך ההתקרבות האינפיניטסימאלית לתשובה היתה בקביעת <u>החסם</u> עד כמה בכל שלב סופי אנו רחוקים מהתשובה (בשלב האינסופי)



למשל בדוגמא לעיל:
שטח הריבוע החסום EFGH הוא חצי משטח הריבוע החוסם ABCD (הוכח)
מאחר והמעגל כולו בתוך ABCD ומחוץ ל-EFGH נובע מכך כי EFGH מכסה יותר מחצי שטחו של המעגל.
בהמשך לאוקטגון: אנו מוסיפים משולשים כמו EPF לצידיו של הריבוע החסום. שטחו חצי משטח המרובע ELKF ואם נוסיף מרובעים כאלה לכל ארבעת פאות הריבוע החסום נקבל ריבוע החוסם את המעגל. ולכן בתוספת המשולשים לקבלת אוקטגון אנו מכסים יותר מחצי השטח במעגל הנמצא מחוץ לריבוע החסום.
טיעון זה תקף בכל שלב- במעבר לפוליגון חסום עם פי שתיים צלעות אנו מכסים לפחות חצי מהשטח במעגל שנשאר מחוץ לפוליגון: אוקטגון מכסה יותר מ-משטח המעגלת 16-גון 3/4 מכסה יותר מ-7/8 השטח וכו.

ארכימדס השתמש בגישה זו של יודוקסוס להוכיח ששטח המעגל שוה לשטח משולש ישר זוית שניצביו רדיוס המעגל והקפו:
אם נניח ששטח המעגל קטן משטח המשולש, בסידרת הפוליגונים עם ... 4,8,16,32 צלעות נגיע לשטח הגדול משטח המשולש הנ"ל. אך שטח פוליגון זה שוה לשטח משולשים כמספר צלעותיו ושוה לשטח משולש אחד עם גובה ובסיס שוה להקף הפוליגון. אך הגובה של משולש בפוליגון חסום הוא פחות מהרדיוס והקף פחות מהקף המעגל.
זו סתירה, ולכן שטח המעגל לא יכול להיות קטן משטח המשולש.
אם נניח ששטח המשולש של פוליגונים חוסמים גדול משטח המעגל נגיע גם פה לסתירה. ולכן השטח של המשולש בדיוק שוה לשטח המעגל.

דוגמא לטור אינסופי שלא מתכנס ל"מטרה" **1+1/2+1/3+1/4 + ...**

ארכימדס מבצע אינטגראל
בביצוע החישובים של שטח המעגל ארכימדס הבין שיוכל גם לפתור שטח המעטפת של קונוס.
אם נפתח את מעטפת ע"י חתך לאורך קו החוצה את קדקד הקונוס, נקבל גיזרה של מעגל.
הוא גם חישב שטחי חתכי קונוס: אם חותכים במקביל לבסיס מקבלים טבעות מעגליות.
ואז ניגש לחשב שטח פנים של כדור. ע"י סכום רצועות של טבעות מקבילות, כל אחת שוה בשטחה לטבעת מקונוס עם ממדים מתאימים. ואז חישב זאת למספר הולך וגדל של טבעות הולכות וצרות, ובעזרת שיטת המיצוי הראה ששטח הפנים של הכדור הוא $4\pi r^2$
זה בדיוק התהליך של אינטגרציה.

ארסטתוסטנס Eratosthenes 276–192 BC

היה ספרן בסיפריה באלכסנדריה –

בהסתמך על משולשים דומים מדד את רדיוס כדור הארץ

(ראה פרק א 3).

להלן לקט של משפטים מהגיאומטריה היוונית,
המקשרים גיאומטריה לאלגברה

ביטוי לשאיפת המתמטיקאים היוונים לערוך חישובים העזרת גיאומטריה

משפט המיתרים הנחתכים של אפולוניוס $AP*DP = BP*CP$

בתוך המעגל – $p<0$ מחוץ למעגל – $P>0$

הוכחה: CBP ADP משולשים דומים

שתי הזויות הנתמכות על המיתר BD שוות $\angle BAD = \angle BCD$

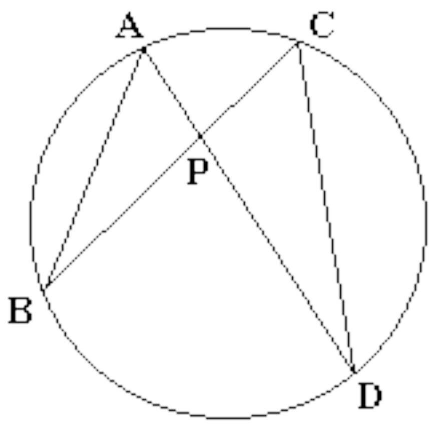
שתי הזויות הנתמכות על המיתר AC שוות $\angle ABC = \angle ADC$

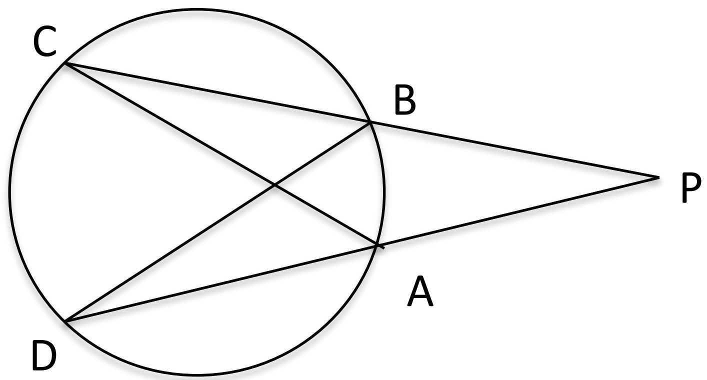
זויות קדקדיות $\angle APB = \angle CPB$

לכן: $AP/CP = BP/DP = AB/CD$

או: $BP*CD=AB*DP.$ $AP*CD=AB*CP$ $AP*DP = BP*CP$:

מ.ש.ל.

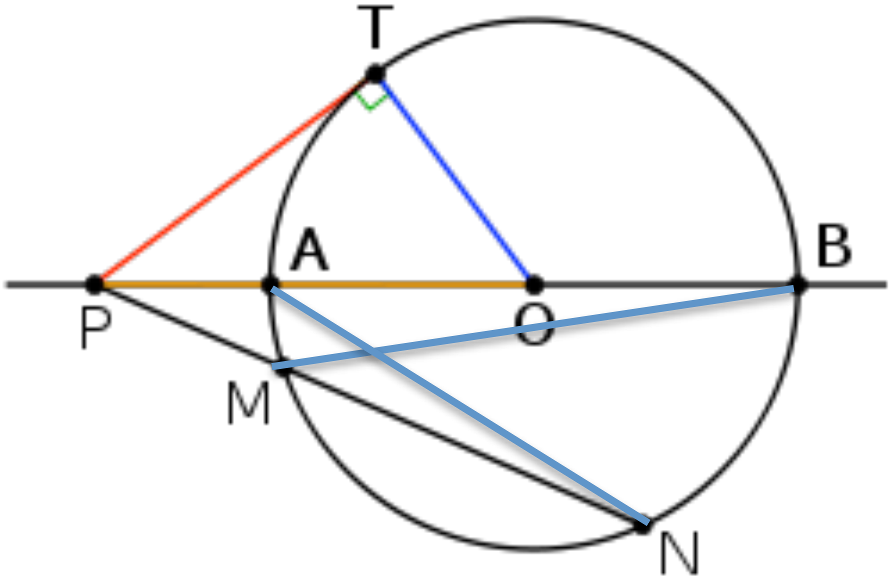




"העצמה" h של נקודה P ביחס למעגל ברדיוס r

$h=PT^2 \quad s=PO \quad s-r=PA \quad s+r=PB$

$h=s^2-r^2 = (s-r)*(s+r) = PT^2=PA*PB = PM*PN$



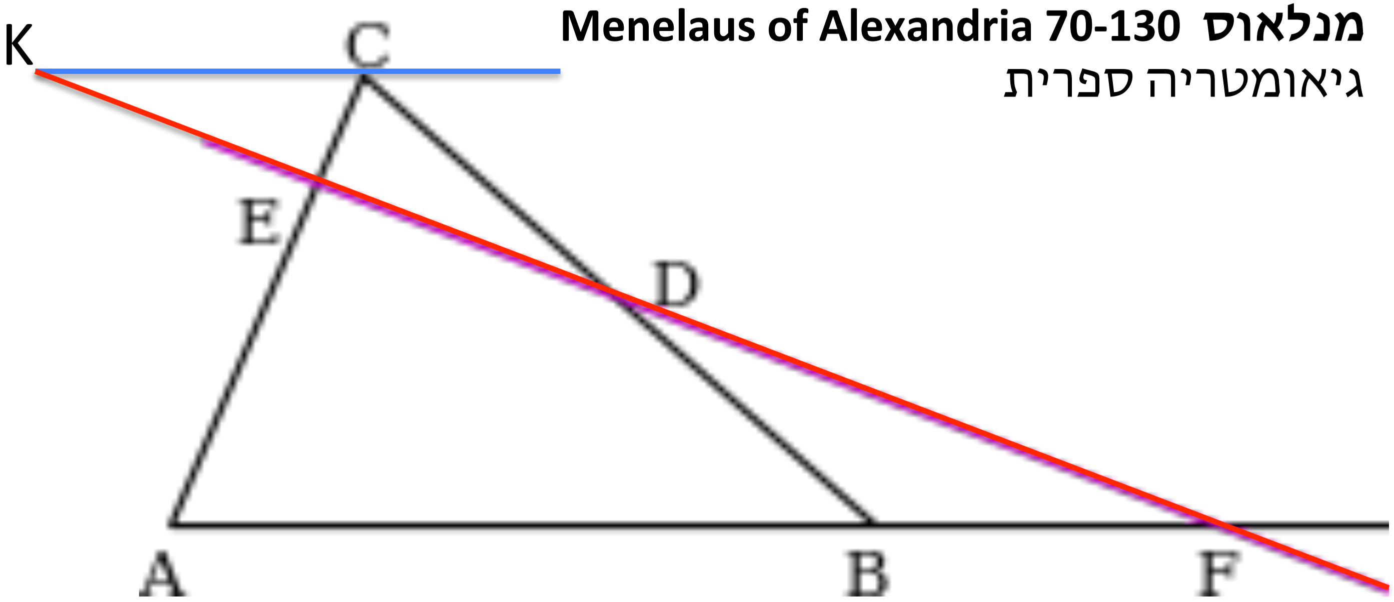
Hipparchus of Rhodes 190–120 BC היפרכוס

טריגונומטריה
מצא כי (sqrt(2 אינו ניתן להכתב כשבר (אולי מסתמך על פיתגורס)

Heron of Alexandria 10-75 AD הירון
שטח פנים ונפח של גופים
משפט הירון לשטח משולש A בעל צלעות **abc**
A = sort [s(s-a)(s-b)(s-c)] = sqrt [(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)] / 2
חצי הקף המשולש s=(a+b+c)/2

Menelaus of Alexandria 70-130 מנלאוס

גיאומטריה ספרית



משפט מנלאוס:

<u>למשולשים במישור</u>

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = -1.$$

$$AF \times BD \times CE = -FB \times DC \times EA.$$

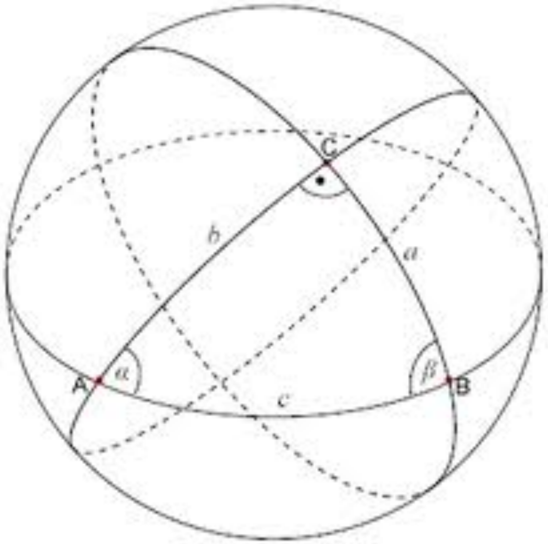
הוכחה: CK מקביל ל–AB כאשר K על הקו DEF

ממשולשים דומים

$$\left|\frac{BD}{DC}\right| = \left|\frac{BF}{CK}\right|, \quad \left|\frac{AE}{EC}\right| = \left|\frac{AF}{CK}\right|$$

<u>למשולשים ספריים</u> קשר דומה אבל ל–sin

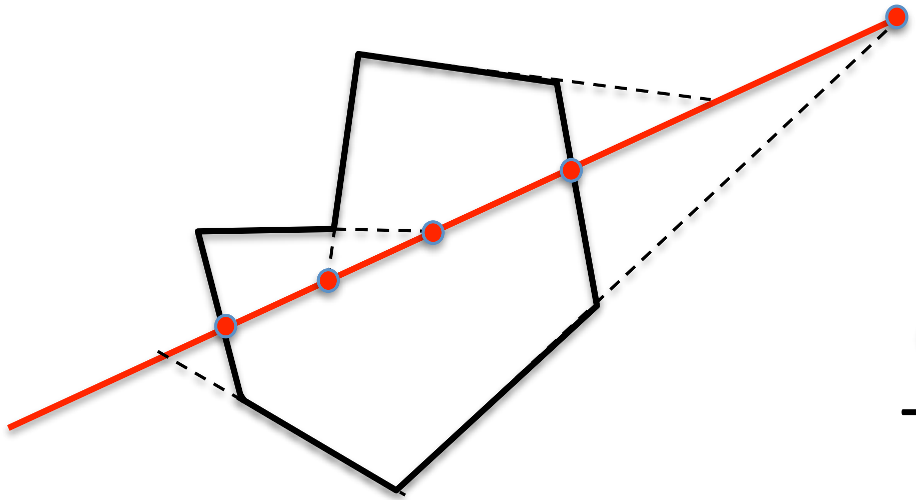
$$\sin AD \cdot \sin BE \cdot \sin CF = \sin BD \cdot \sin CE \cdot \sin AF.$$

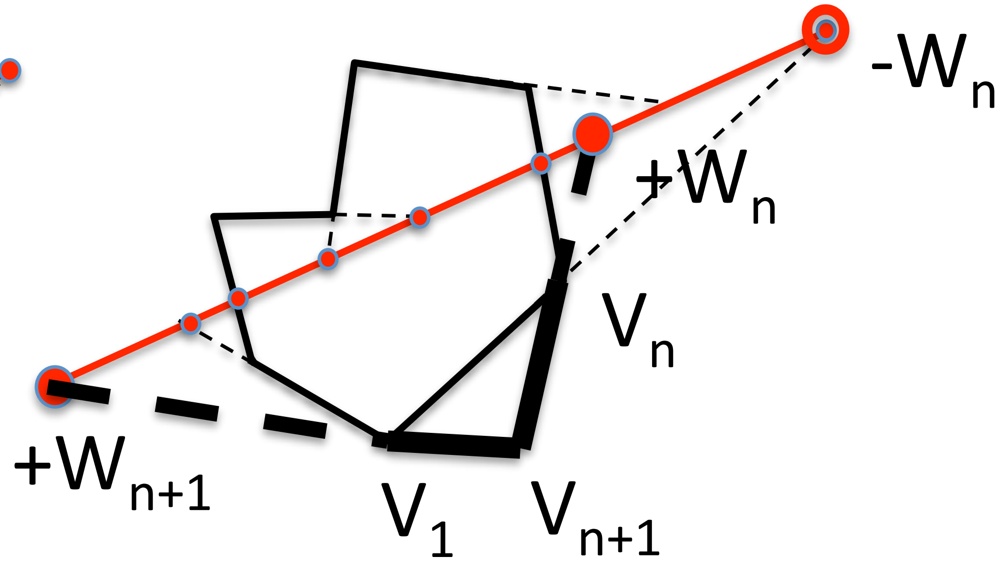


הכללה לפוליגון בעל n קדקדים V_i וקו חותך צלע $V_i V_{i+1}$ בנקודה W_i

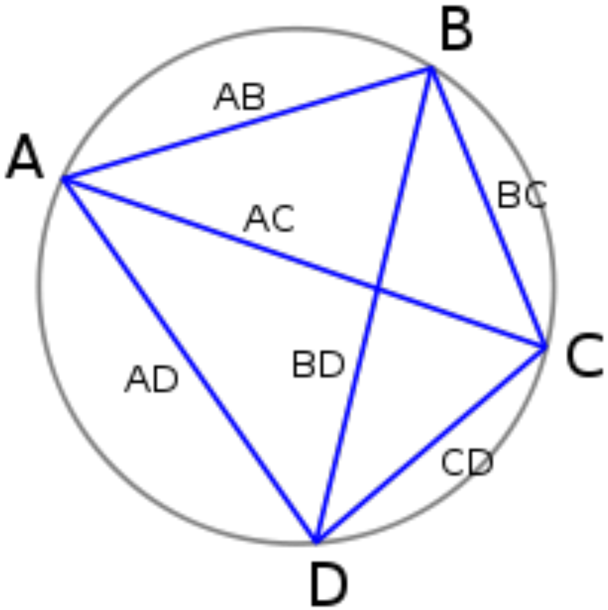
$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_i W_i}{W_i V_{i+1}}\right]=(-1)^n.$$

הסימן חיובי אם $W_i V_{i+1}$ ו– $V_i W_i$ באותו כוון ושלילי אם בכוונים הפוכים





הוכחה באינדוקציה: (רמז)



Claudius Ptolemy 85–165 תלמאי

מיוחס גם לשמואל הכהן: Ptolemy's theorem משפט תלמאי

$$|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| = |\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}| + |\overline{BC}| \cdot |\overline{AD}|$$

הוכחה: $\angle BAC = \angle BDC \qquad \angle ADB = \angle ACB.$

חוצה זוית ABC

פוגש ב–K את AC

$\angle ABK + \angle CBK = \angle ABC = \angle CBD + \angle ABD,\ \angle CBK = \angle ABD.$

משולשים דומים $\triangle ABK \sim \triangle DBC \qquad \triangle ABD \sim \triangle KBC.$

לכן $AK/AB = CD/BD, \qquad CK/BC = DA/BD;$

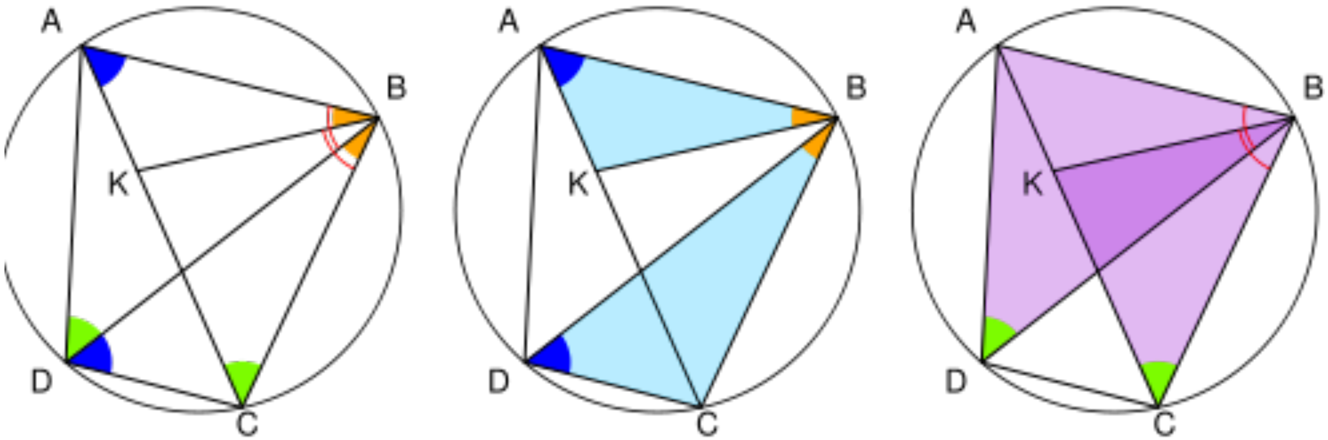
או $AK\cdot BD = AB\cdot CD, \qquad CK\cdot BD = BC\cdot DA;$

והסכום $AK\cdot BD + CK\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA;$

$(AK+CK)\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA;$

מ.ש.ל. $AK+CK = AC,$ --> $AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$

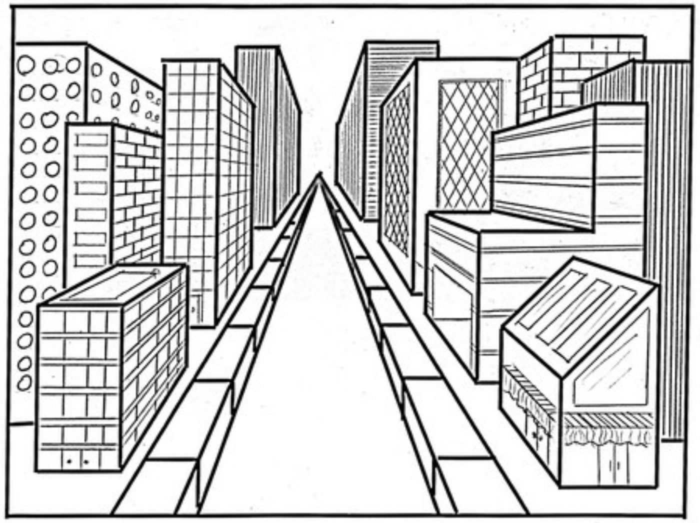
אם K מחוץ ל–AC $AK-CK=\pm AC$

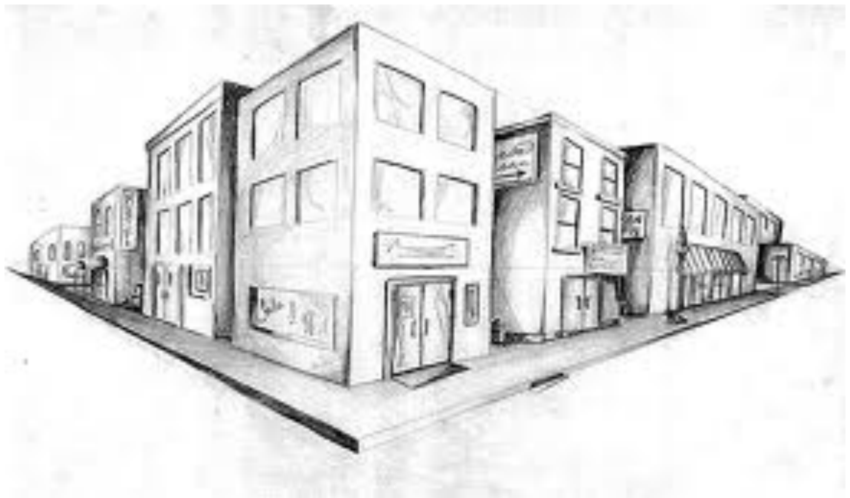


אחרון הגיאומטרים היוונים הגדולים **Papus of Alexandria 290-350 פאפוס**
תרומות מפורסמות: תיאורמת ההיטלים ו-"משפט גולדין" 1640 לנפח גופי סיבוב

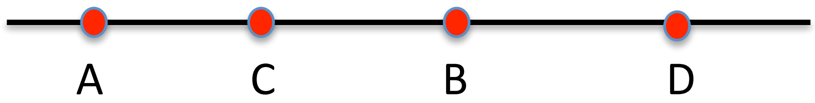
היטלים - חשיבות לרישום דו-ממדי של עולם תלת ממדי - פרספקטיבה: אם במרחב שני קווים מקבילים אינם נפגשים, במישור ההיטל הם נפגשים בנקודה אחת לכל היותר.
מתי לא ייפגשו?

יש 2 שיטות של פרספקטיבה – נקודה 1 ושתי נקודות של פגישת קוים מקבילים האנכיים זה לזה: "התגלה" מחדש ע"י ברונולסקי בתקופת הרנסאנס.





Harmonic Range   תחום הרמוני



אם נקודות A,B על קו ישר מחולקות ביניהן (פנימי) ע"י נקודה C וחיצונית ע"י נקודה D ביחס שוה, הינו

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

אז AB מחולקים הרמונית ע"י CD גם CD מחולקים הרמונית ע"י AB כי

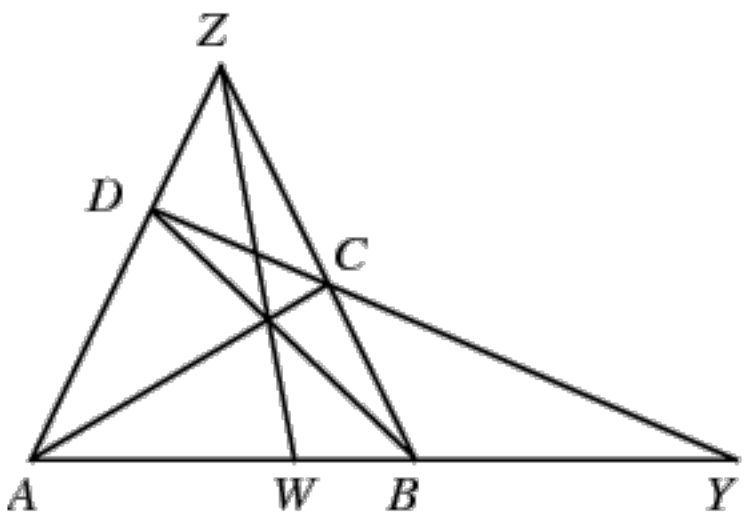
$$CA/AD = CB/BD$$

ו– ABCD נקראים תחום הרמוני.

אם O הוא המרכז בין AB אז

$$OB^2 = OC \times OD.$$

Pappus's Harmonic Theorem



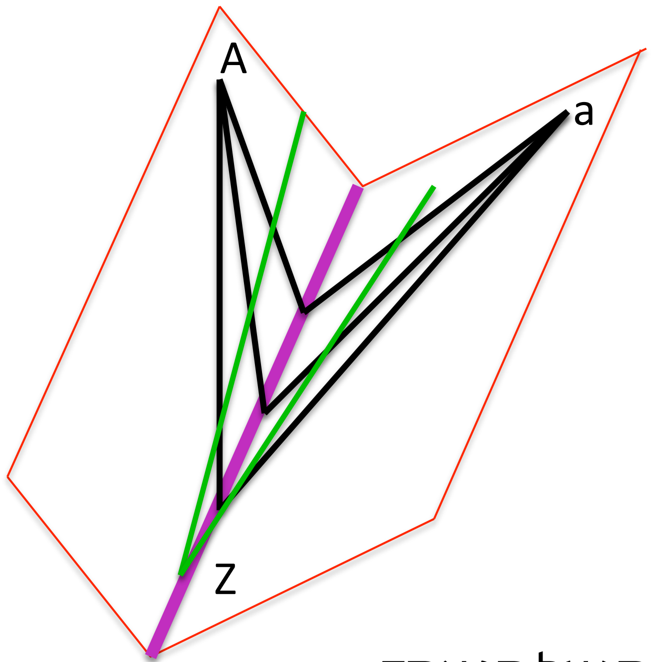
נחבר לכל נקודה בתוך משולש את קדקדיו. AZD הקוים שנוצרים חותכים את צלעותיו ב WDC

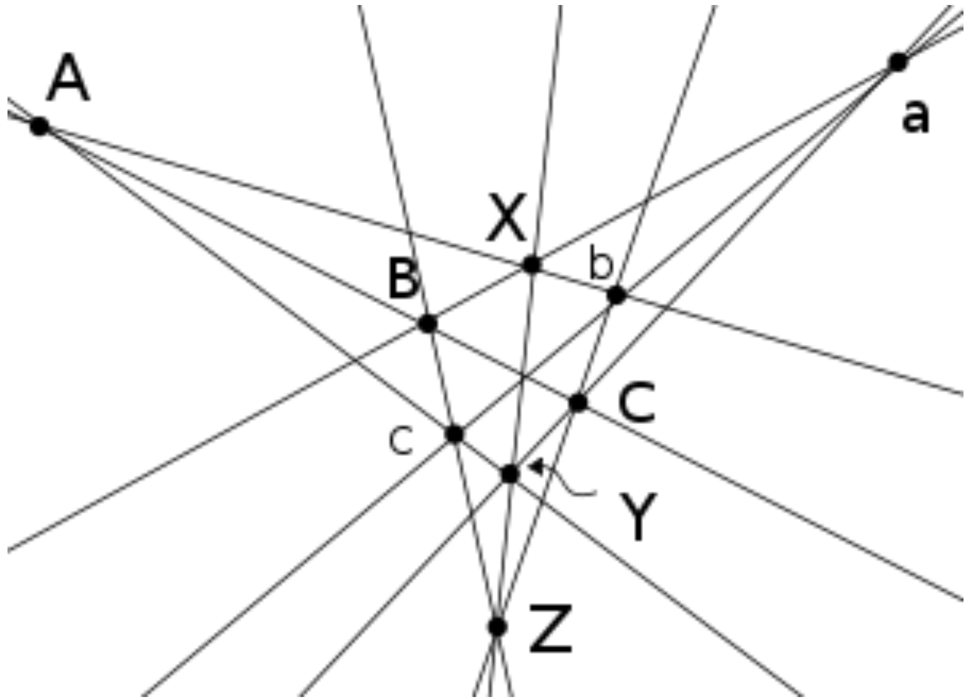
נמשיך את DC שיפגוש את המשך הצלע AB בנקודה Y

הנקודות ABWY בציור הנ"ל יוצרות תחום הרמוני. ראה גם Menelaus theorem

<u>משפט ההקסגון של פאפוס</u>

<u>Pappus's Hexagon Theorem</u>





אם הנקודות ABC על קו אחד והנקודות abc על קו אחר,

אזי הנקודות XYZ הנוצרות מחיתוכי Ab&aB Ac&aC Bc*bC גם הן על קו אחד.

ההקסגון של פאפוס: AbCaBc

המשפט הוא דואלי–לעצמו sefl-dual: אם נחליף את 9 הנקודות ל–9 קוים וההפך:

נתונים הקוים ABC נפגשים בנקודה, והקוים abc נפגשים בנקודה אחרת,

אזי הקוים xyz הנוצרים מזוגות של נקודות החיתוך לקווים Ab&*aB Ac&aC Bc&bC

נחתכים בנקודה.

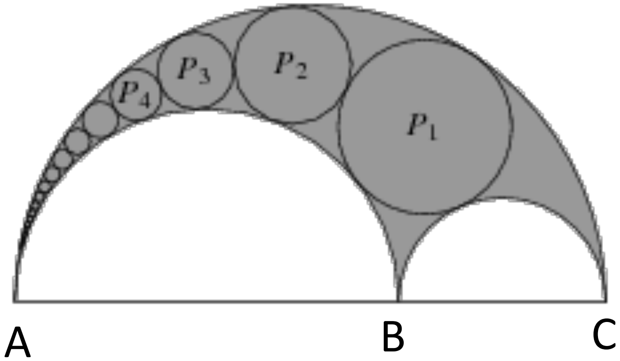
ניתן לראות את נכונות המשפט כהטל מהמרחב: כאשר הקו XYZ הוא קו החיתוך

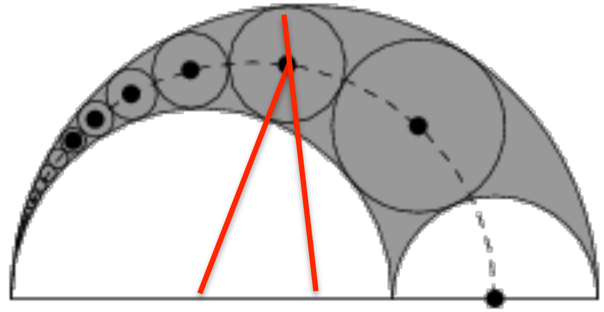
(סגול) של שני מישורים שונים המכילים כל אחד מהם אחת מהנקודות A,B והקוים (שחור)

היוצאים מהן.

משפט זה הוא מקרה פרטי למשפט פסקל לחיתוכי קונוסים כשהם מתנוונים לשני קוים

שרשרת פאפוס Pappus Chain





בניה של שרשרת מעגלים P_n המשיקים לחצי המעגל הגדול U , הקטן V , והקודם בשרשרת P_{n-1} .
מרכזי המעגלים יושבים על אליפסה שהפוקוסים שלה הם מרכזי המעגלים U,V (רדיוסים R,r)
מאחר וסכום המרחקים משני הפוקוסים קבוע (קוים אדומים) : $(R-r_n)+(r+r_n)=R+r$

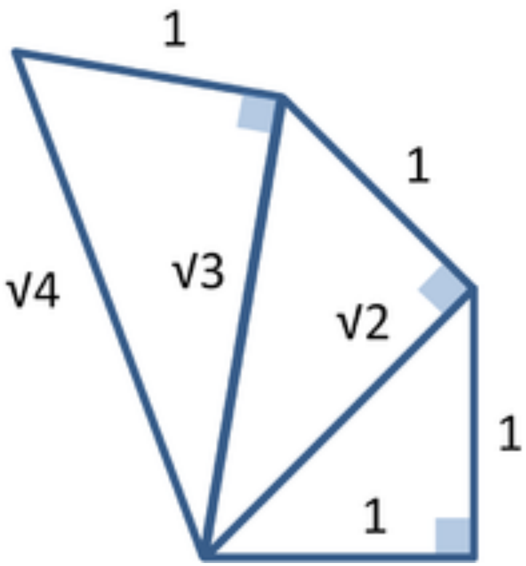
מרחק מעגל p_1 מהבסיס שווה לפעמיים רדיוסו, למעגל p_2 ארבע פעמים רדיוסו,
ול–p_n המרחק 2n פעמים הרדיוס.

אם AC/AB=r הוא יחס הרדיוסים הגדול והקטן, אזי קואורדינטות המרכז והרדיוס של p_n הוא:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{r(1+r)}{2[n^2(1-r)^2+r]}, \frac{nr(1-r)}{n^2(1-r)^2+r} \right) \qquad r_n = \frac{(1-r)r}{2[n^2(1-r)^2+r]}$$

Hypatia of Alexandria 370-415

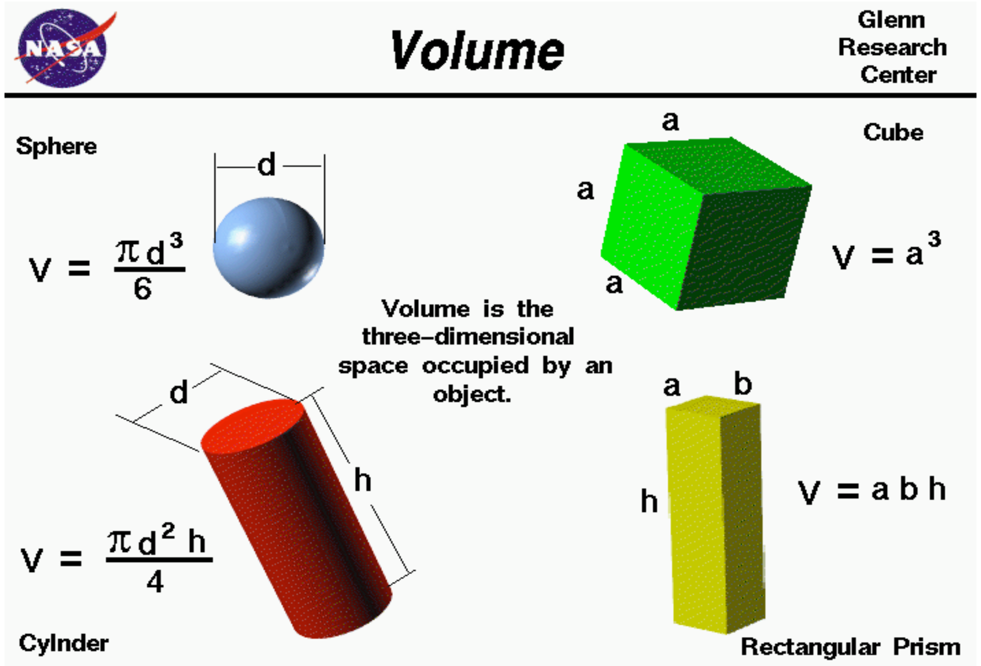
היתה ביתו של המתמטיקאי תיאון Theon ועזרה בעריכת "האלמגסט" של תלמאי, "האלמנטים" "האריטמטיקה" של דיאופנטוס, ו-"קונוסים" של אפולוניוס.
היתה ראש בית הספר האפלטוני באלכסנדריה.
נרצחה ע"י כתה נוצרית שהאמינה שחקר המדעי הוא פגני.
.

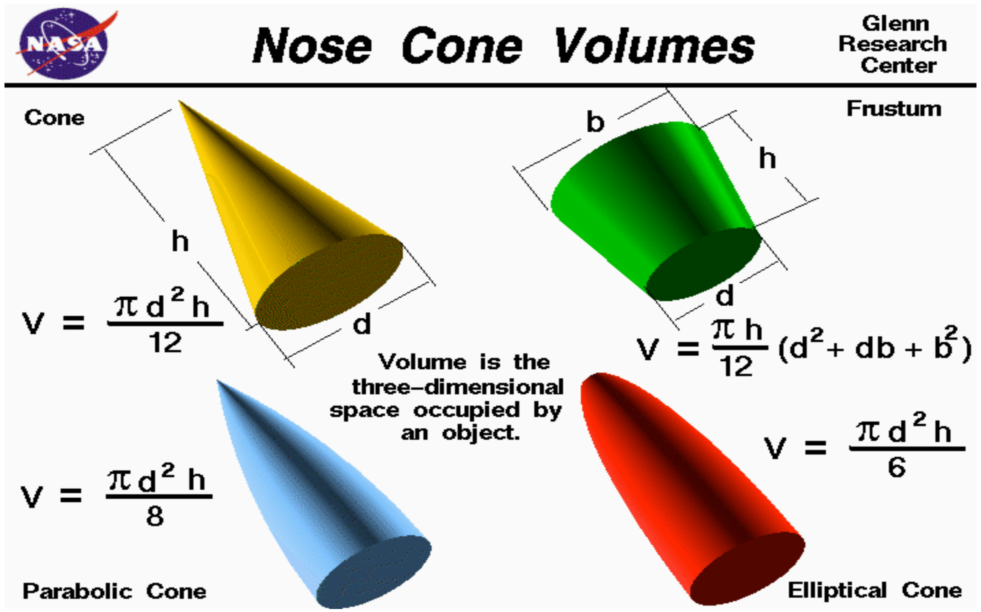


בנית שבלול הנותן שרש של מספרים שלמים המיוחס להיפתיה.

כן מייחסים לה בנית אצטרולב.

#


NASA
Volume
Glenn Research Center
Sphere
d
$V = \frac{\pi d^3}{6}$
a
a
a
Cube
$V = a^3$
Volume is the three-dimensional space occupied by an object.
d
h
$V = \frac{\pi d^2 h}{4}$
Cylnder
a b
h
$V = a\,b\,h$
Rectangular Prism


NASA
Nose Cone Volumes
Glenn Research Center
Cone
h
d
$V = \frac{\pi d^2 h}{12}$
b
h
d
Frustum
$V = \frac{\pi h}{12}(d^2 + db + b^2)$
Volume is the three-dimensional space occupied by an object.
$V = \frac{\pi d^2 h}{8}$
Parabolic Cone
$V = \frac{\pi d^2 h}{6}$
Elliptical Cone

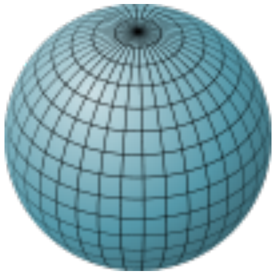
למרות שאנו עדין בעולם העתיק,
נסיים פרק זה בנגיעה "מתאבנת" בשני שטחים מודרניים בגיאומטריה:

טופולוגיה, ופרקטאלים

טופולוגיה

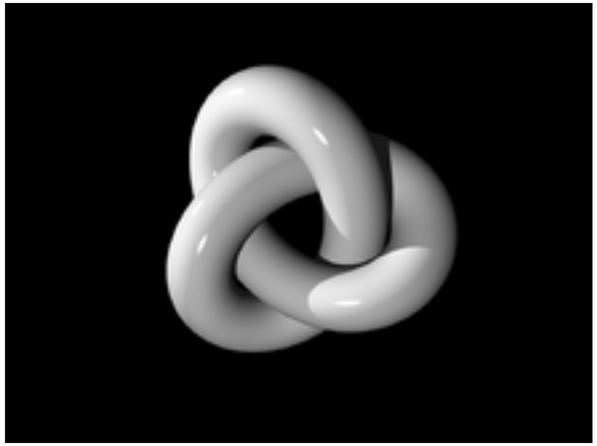
הטופולוגיה עוסקת בתכונות גופים הנשמרות תחת עוותים (מתיחה וכווץ) שאינם מחברים או מנתקים את חלקי הגופים

תכונה טופולוגית היא מספר החורים או מספר הקשרים.

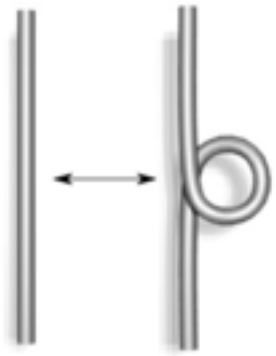


האם ניתן להפוך את הספל לטורוס?

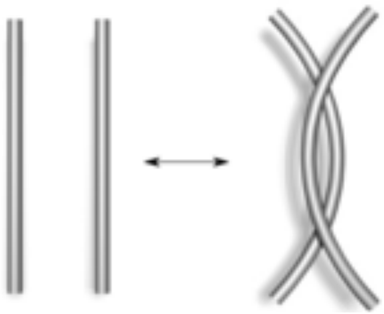
האם ניתן להתיר קשר?
האם ניתן להפוך ערימת חוט צמר לחוט ישר?
צעדי ריידמייסטר להתרת קשרים בלי להשתמש בקצוות



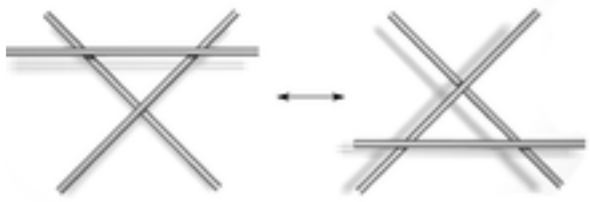
הצעד הראשון: פרימת לולאה עודפת



הצעד השני: התרת זוג צמתים



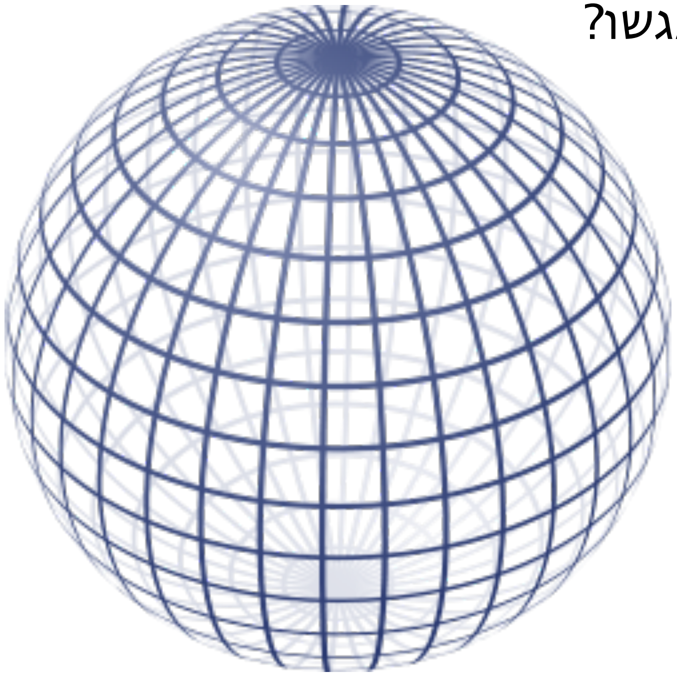
הצעד השלישי: הסעת לולאה
מעל או מתחת צומת

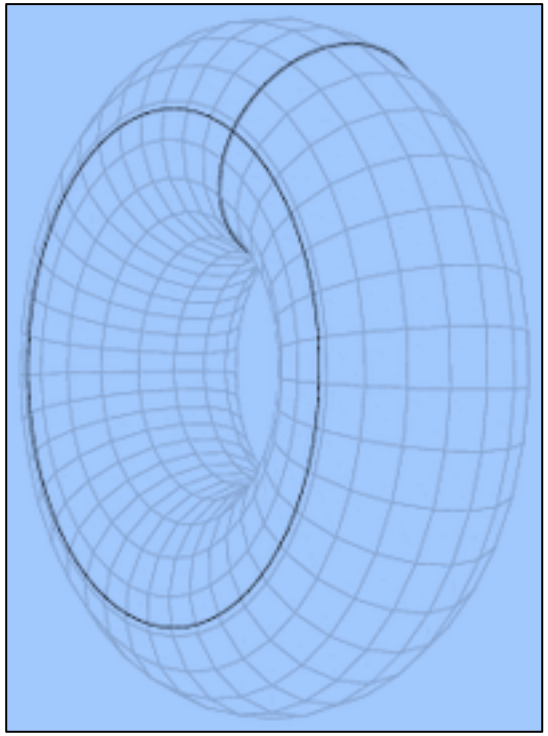


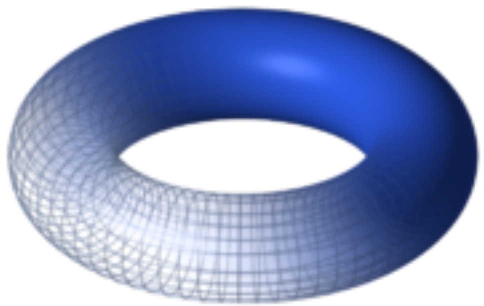
בייגלה (טורוס) מול כדור –

איך נוכל להבדיל אם אנו נמלה קטנה?

1. טיול מהקטב בשני כוונים אנכיים – האם המסלולים ייפגשו?
2. האם ניתן לסרוק את המשטח בכוון אחד







האם העולם שלנו נסגר על עצמו?

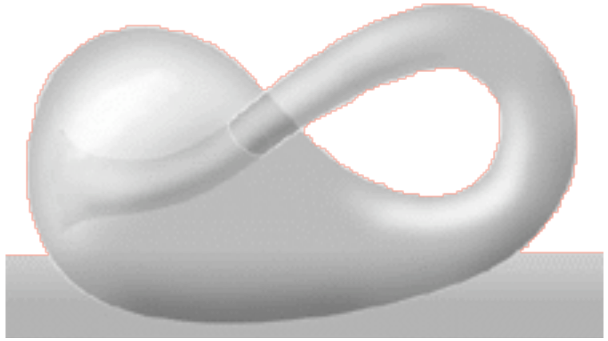
טבעת מוביוס
מה קורה כשגוזרים באמצע?

Escher– ציור הנמלים של אשר –

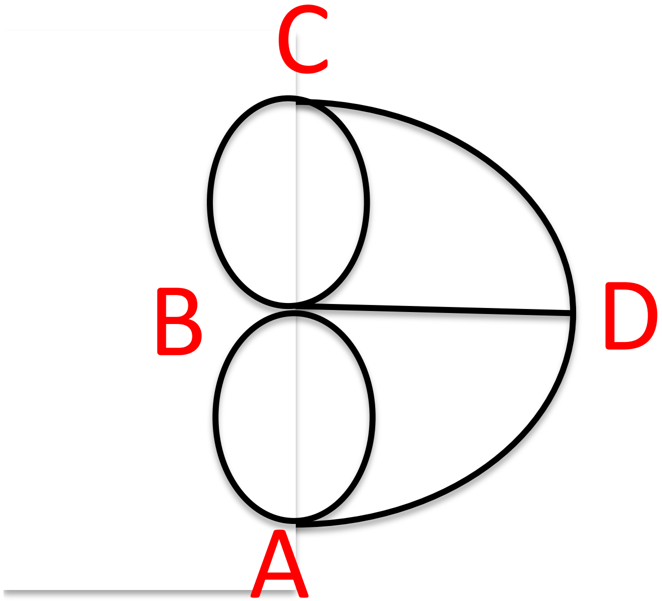
בקבוקי קליין Klein

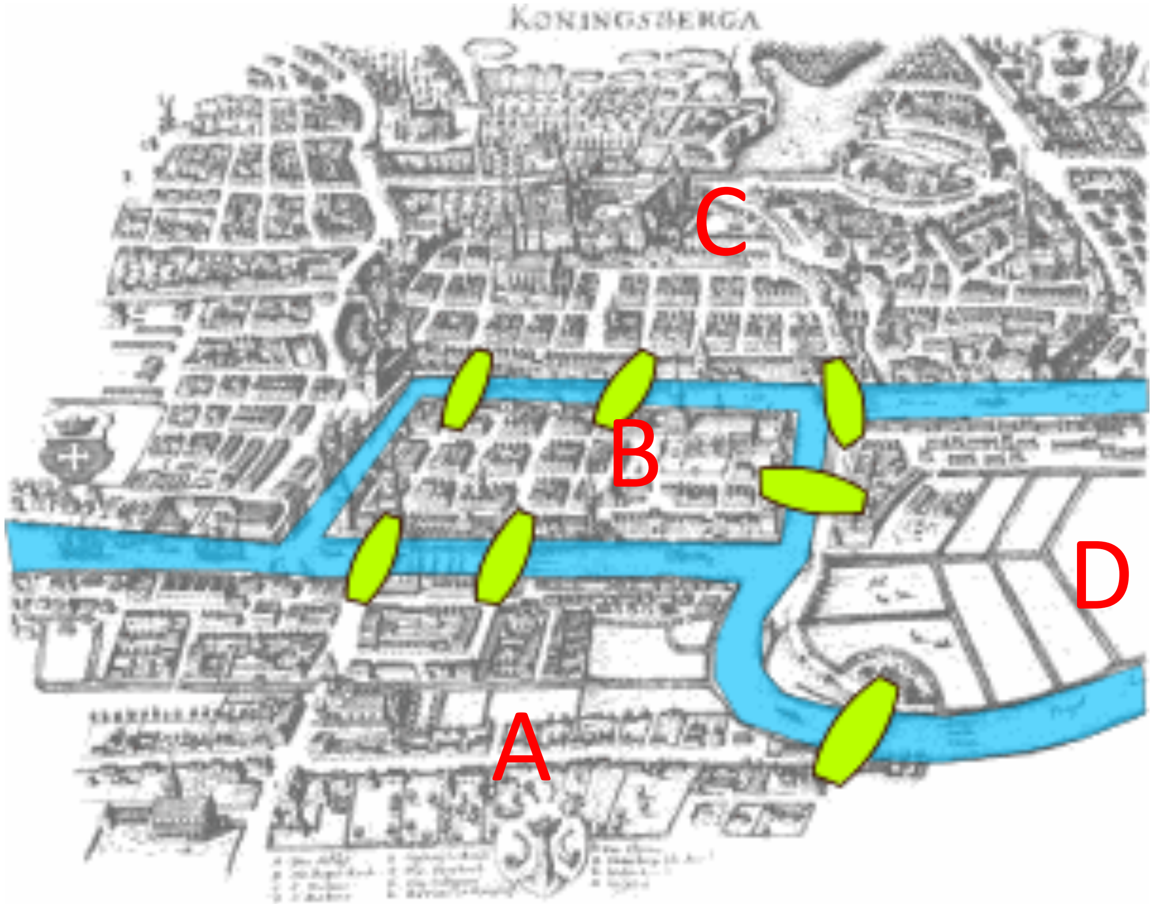
האנלוג התלת ממדי לטבעת מוביוס

טיילו על דפנות פנים הבקבוק וצאו החוצה

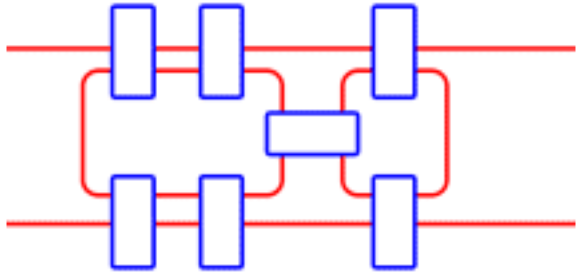


תכונות של גרפים (שימוש למבנה אינטרט)

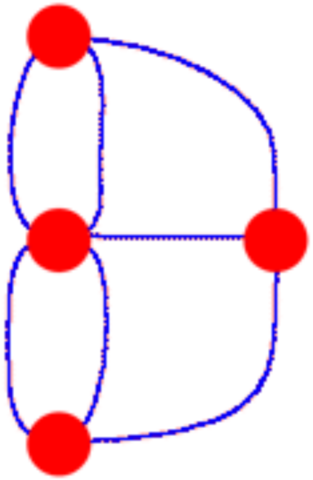




אוילר (1786): הגשרים של קניגסברג. האם ניתן לבקר בכל אזורי העיר מבלי לחצות אף גשר פעמיים? העביר בעיה לגרף:



מפת העיר קנינגסברג
הנחל והגשרים



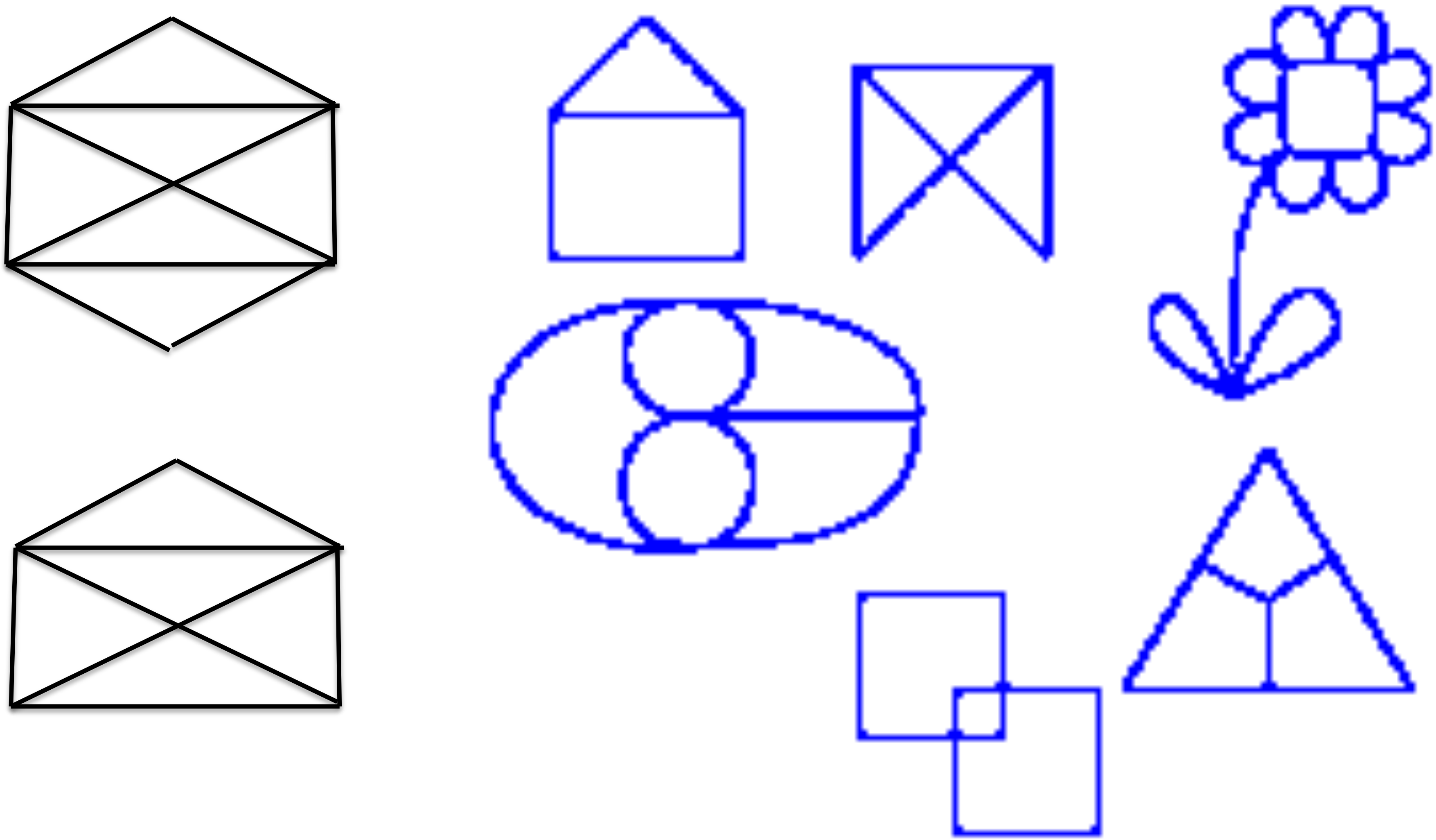
הגרף שיצר אוילר
אזורי העיר המוגבלים בנחל
והגשרים ביניהם

ניתן לצייר גרף מבלי להרים עט אם רק אין או שני קדקדים הם עם מספר איזוגי של צלעות – ובהם מתחילים וגומרים

הוכחה: מלבד התחלה וסוף מכל צומת שנכנסנו צריך לצאת (אולי כמה פעמים) – צומת זוגית

אם מתחילים וגומרים באותה צומת: כל הצמתות צריכות להיות זוגיות

אם מתחילים בצומת אחת וגומרים באחרת: כל הצמתות זוגיות מלבד התחלה וסוף



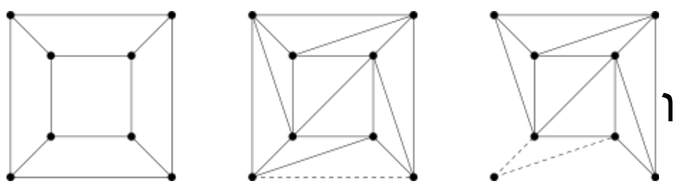
מספר אוילר = מס' קדקדים פחות מס' צלעות ועוד מס' משטחים

$\chi = V - E + F$ = Vertices – Edges + Faces

לגרף מישורי $\chi = 2$ הוכחה באינדוקציה:

להוריד משולש עם צלע חיצונית (שני הקדקדים נשארו)

להוריד משולש עם קדקד חיצוני ושתי הצלעות הקשורות אליו



כמה צבעים צריך כדי לצבוע מפה מבלי ששתי מדינות שכנות יופיעו באותו הצבע?

ניסח את הבעיה פרנסיס גטרי (Francis Guthrie, 1852)

(Alfred Kempe, 1879)

אלפרד קמפה ניסה להוכיח שכל מפה אפשר לעוות למספר סופי של אפשרויות שניתן לצבוע ב-4 צבעים

יש טעות בהוכחה – אך נוצרה הטופולוגיה

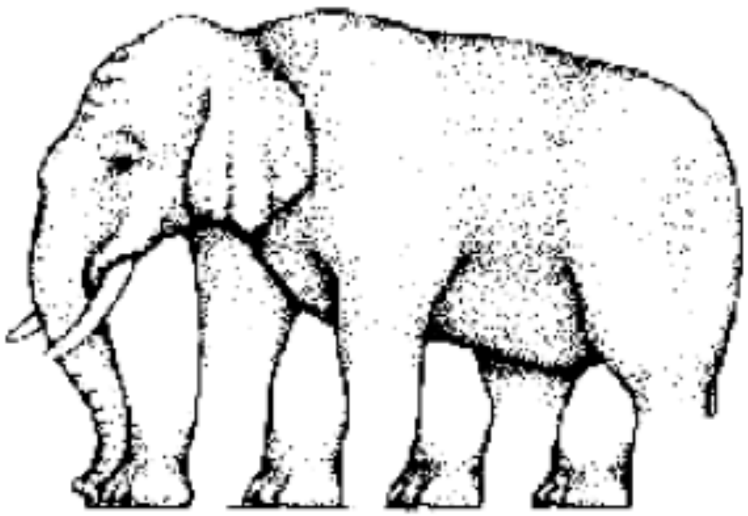
אפל והאקן (Kenneth Appel and Wolfgang Haken, 1976)

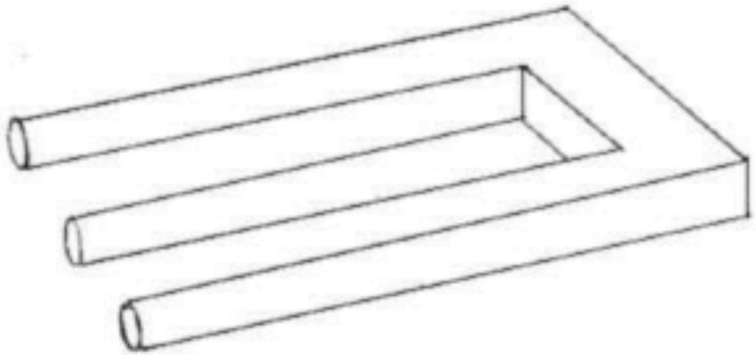
השתמשו במחשב ומיינו 1500 קונפיגורציות שניתן לעוות לכל המפות והצבועים ב-4 צבעים

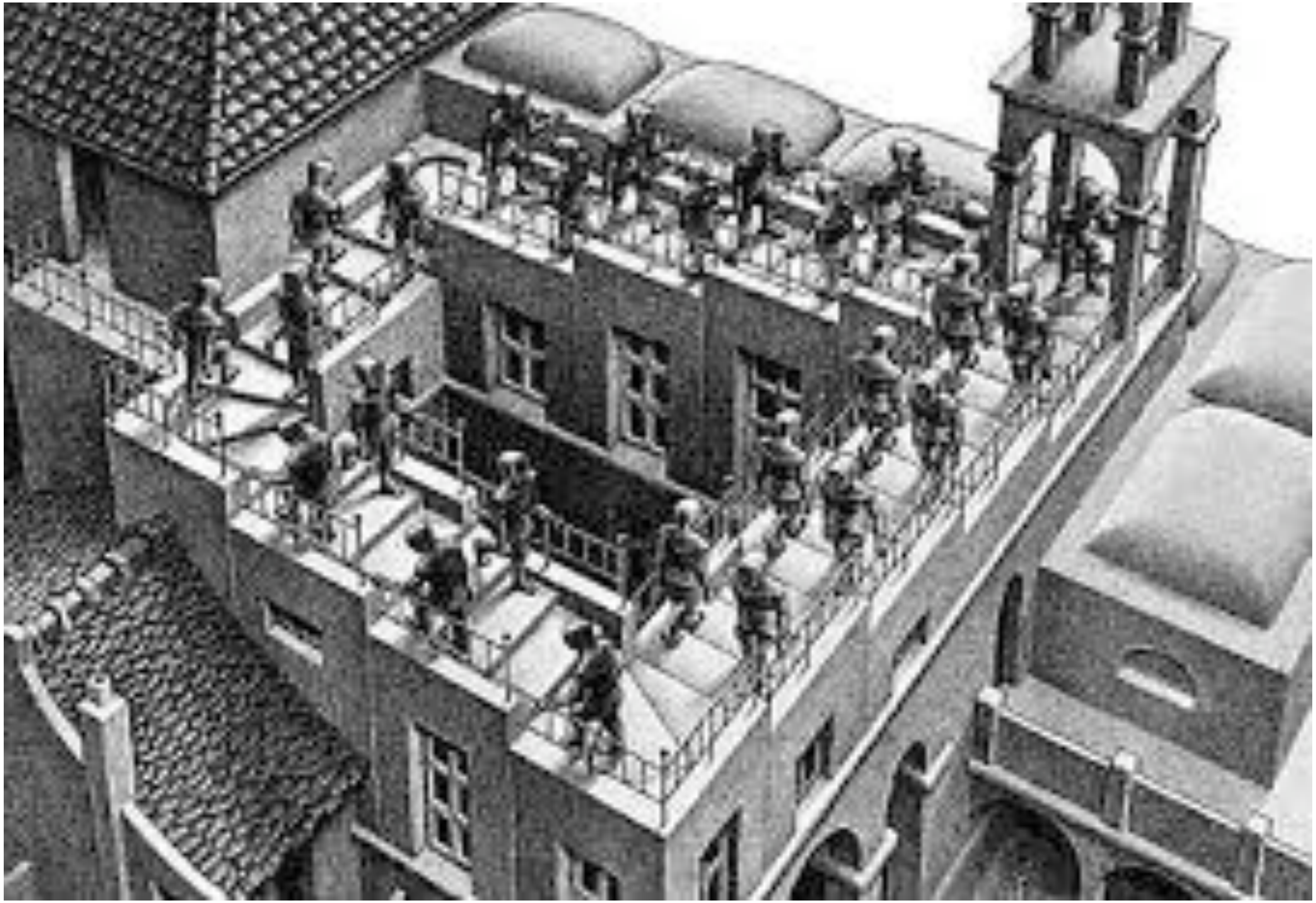
הוכחה שניתן לצבוע ב-5 צבעים: http://en.wikipedia.org/wiki/Five_color_theorem

נעביר מפה לגרף אוילר: כל ארץ ← קדקד וכל שתי ארצות עם גבול משותף ← קו מחבר. רוצים שאף קו אינו מחבר שני קדקדים באותו הצבע

היטלי גופים תלת ממדיים מזוייפים





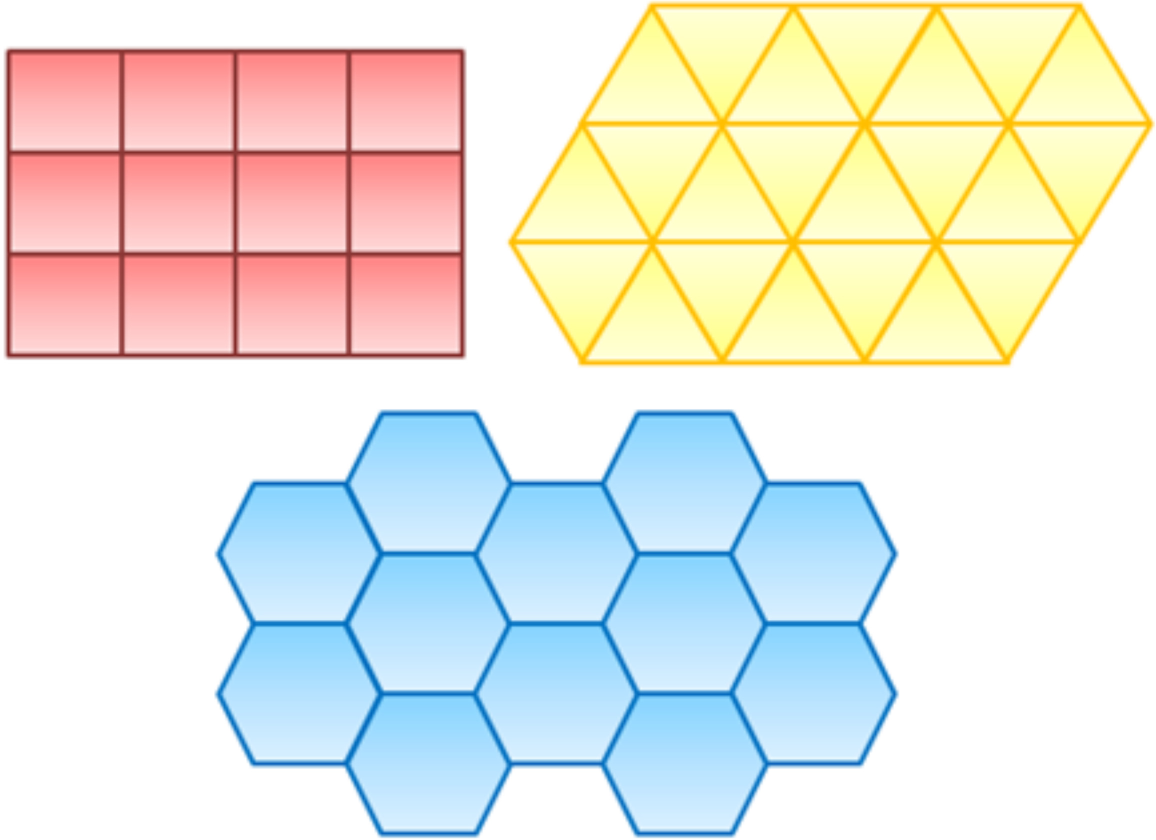


המדרגות שרק עולות של אשר
(Maurits Cornelis Escher, 1898-1972)

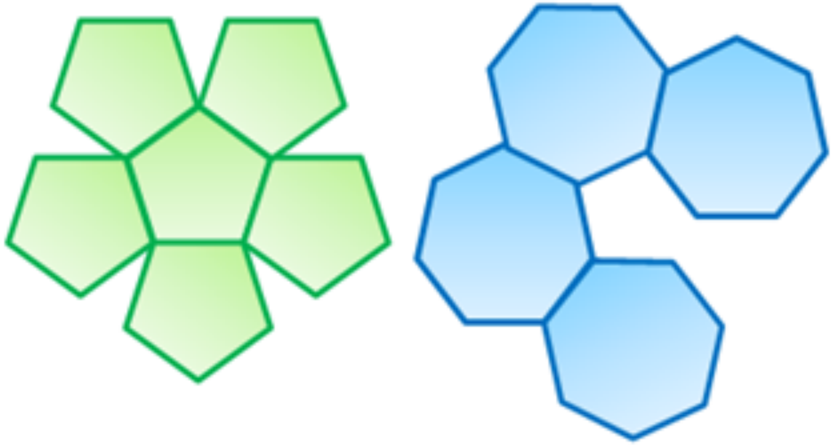
אריזה

מילוי המישור:

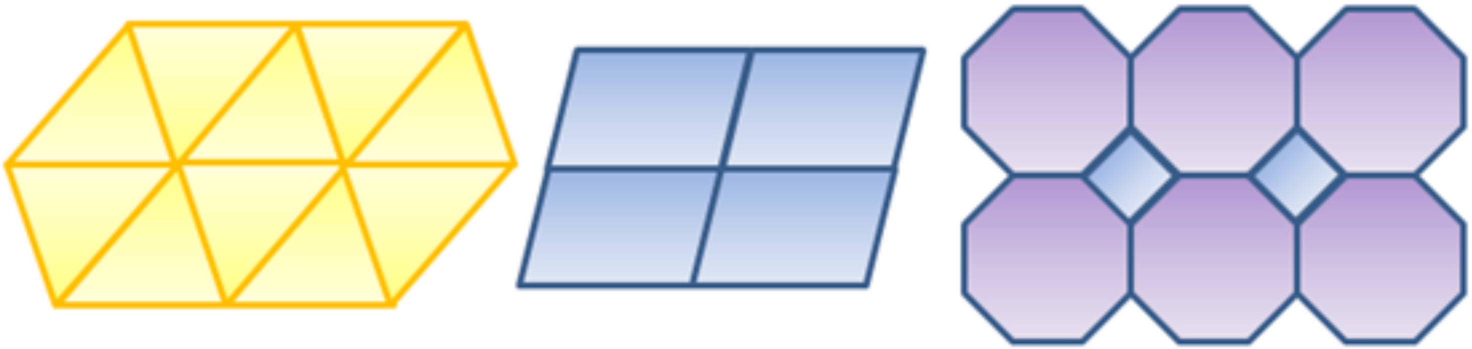
1. מילוי מלא –



2. אריזה לא מלאה ע"י פוליגונים רגולאריים



וע"י פוליגונים לא רגולאריים



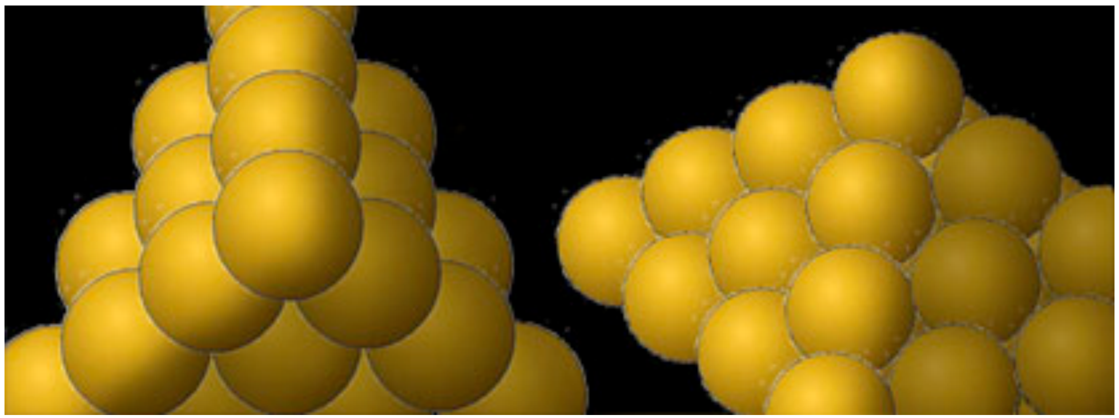
מילוי המרחב:

אפשר למלא את המרחב בקוביות. האם יש עוד פוליטופ רגולארי שיכול למלא את המרחב?
האם ניתן למלא עם צורות לא רגולאריות? רמז: חלק קוביה ל-4 פירמידות

יוהנס קפלר – 1606 איך לארוז כדורים באופן היעיל ביותר?
מילוי בקוביות (~52%) מילוי בהקסגונלים (~74% מהנפח)
סיר וולטר רלי (Sir Walter Raleigh) איך לארוז כדורי תותח באוניה

איך לארוז שזיפים בקופסת שימורים? איך לארוז אפרסקים?
איך לארוז אבטיחים בארגז בשוק?

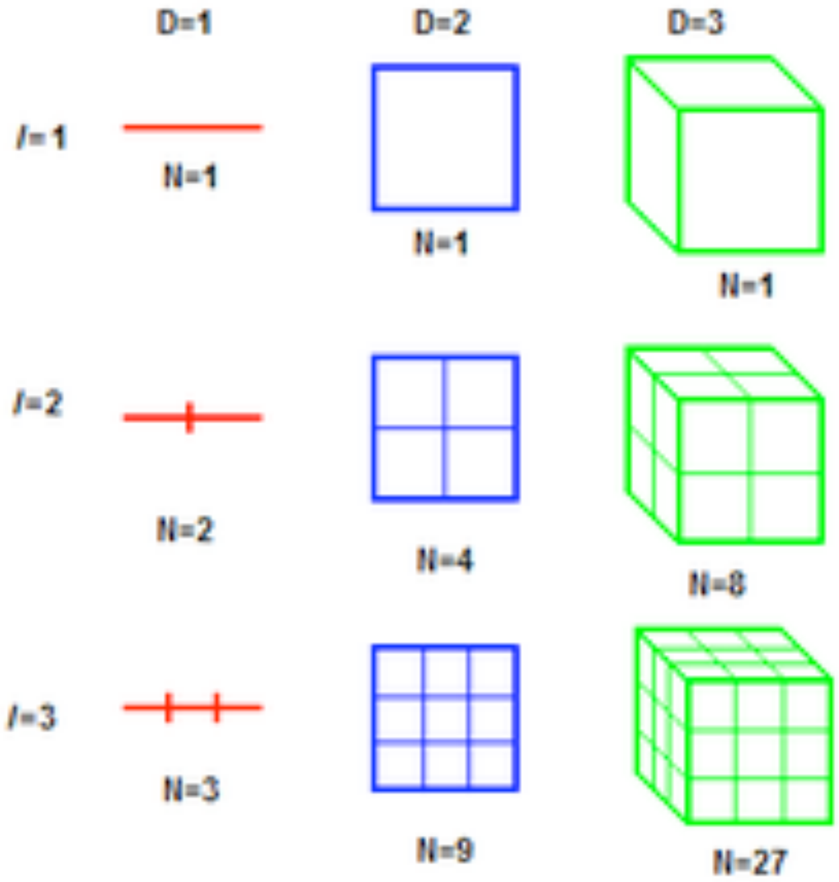
סימולציה במחשב (Thomas Hales & Samuel P. Ferguson 1998)
כולל <u>תנאי שפה</u>: הפתרון תלוי בקופסה!!!



פרקטלים

פרקטאלים FRACTALS

הגדרת פרקטאל – פונקציה רצופה שאינה גזירה באף מקום. תחילה התנהגות פשוטה של ממדים D שלמים $N=\varepsilon^{-D}$



מימד אחד: כמה מקלונים הולכים וקצרים יכנסו ביחידת אור

Stick=1 N=1

Stick=1/2 N=2

Stick=1/3 N=3

Stick=ε $N=\varepsilon^{-1}$

שני ממדים: כמה ריבועים הולכים וקטנים יכנסו בריבוע של יחידת שטח

Square=1 N=1

Square=1/2 N=4

Square=1/3 N=9

Square=ε $N=\varepsilon^{-2}$

שלשה ממדים: כמה קוביות הולכות וקטנות יכנסו בקוביה של יחידת נפח

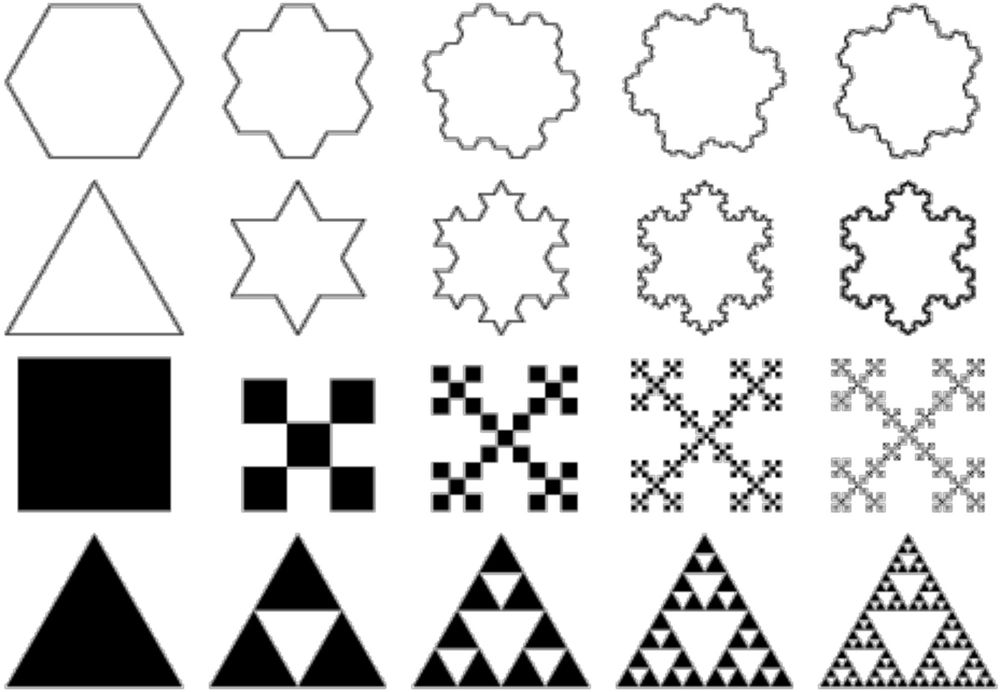
Cube=1 N=1

Cube=1/2 N=8

Cube=1/3 N=27

Cube=ε $N=\varepsilon^{-3}$

נמשיך בגופים "סינטטיים" המוגדרים (וניתן לצייר בכל רזולוציה) במחשב



מה הקף פתיתי השלג? $3x(4/3)^n$ $6x(4/3)^n$

מה שטח השחורים? $(4/2)^n$ $(5/3^2)^n$

n

מהו שטח הפנים של הר?
תלוי אם מתחשבים בסלעים, מערות ובאבנים וגרגרי אדמה על השיפועים

מה אורך החוף של אנגליה – עולה ככל שמקל המדידה מתקצר

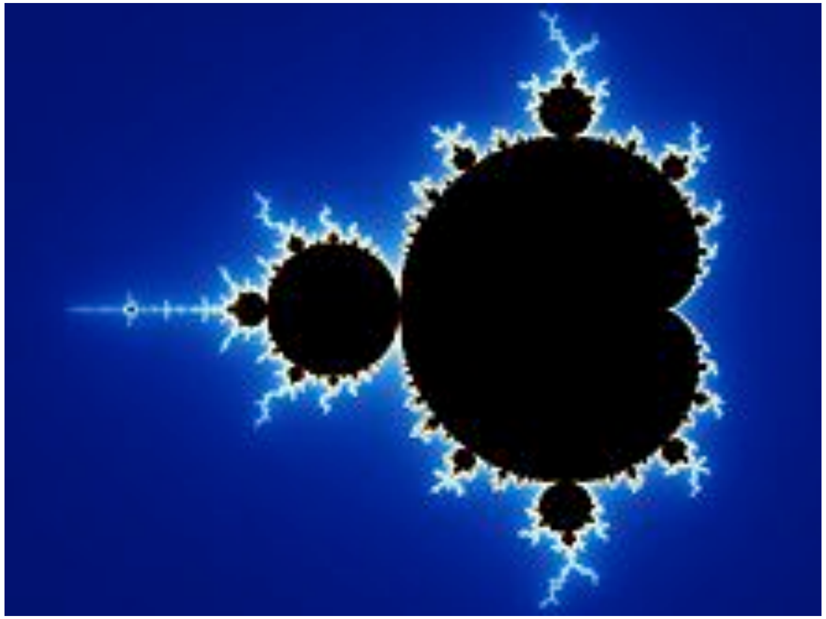
11.5 x 200 = 2300 km   28 x 100 = 2800 km   70 x 50 = 3500 km

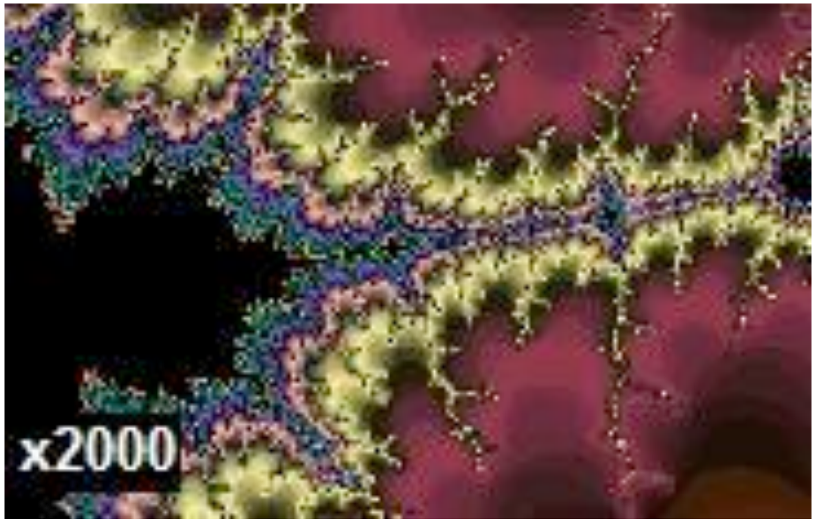
–הקף פתיתי השלג של קוך Koch

מספר הקוים $N \sim \varepsilon^{-1.2619}$

$\varepsilon=1, N=1$; $\varepsilon=1/3, N=4/3$; $\varepsilon=1/9, N=16/9$; $\varepsilon=1/27, N=65/27$

ומכאן השם פרקטאל – חזקה חלקית, לא שלמה





נספח

סיכום "גיאומטריה" של לדזינסקי

ראה גם http://www.kaye7.org.il/geometry_theorems.htm

מישור, מרחב, אנליטית, טריגונומטרי

גיאומטריה (מתוך לדזינסקי, ספר לימוד משנות ה-50)

קו וזוית

* דרך כל שתי נקודות (שאינן זהות) אפשר להעביר קו אחד בלבד

מכאן:

* לשני קוים נקודה משותפת אחת לכל היותר (נקודת החיתוך)

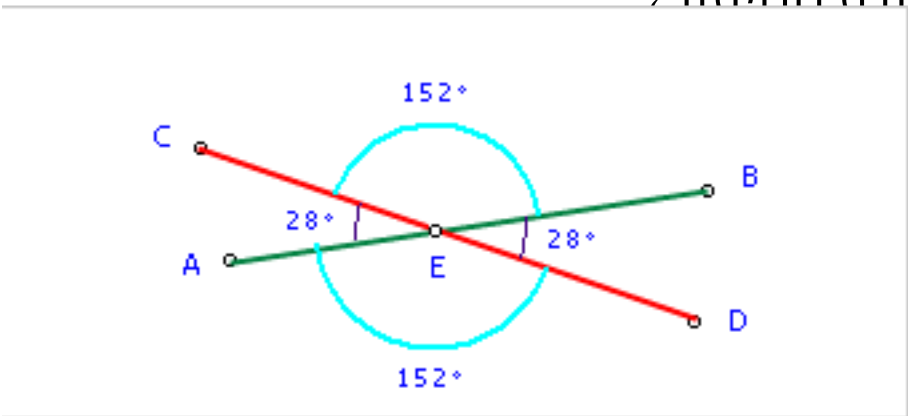
נקודה על קו מחלקת אותו לשתי קרנים

שתי נקודות על קו מגדירות קטע

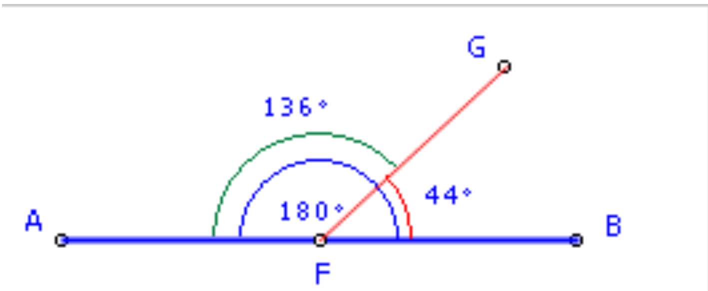
הגדרת סכום והפרש קטעים

זוית בין שני קטעים עם קדקד משותף –

שתי קרניים

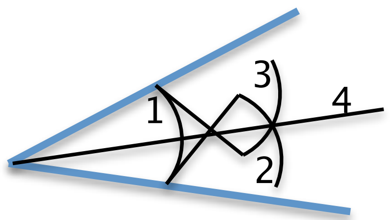


זויות קדקדיות שוות זו לזו

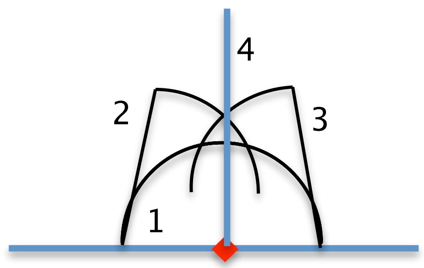


זוויות צמודות משלימות זו את זו ל-180^0.

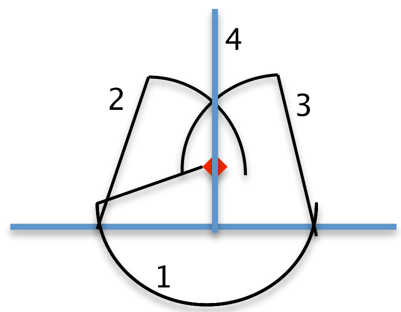
בעיות בניה בסרגל ומחוגה



חצית זוית,

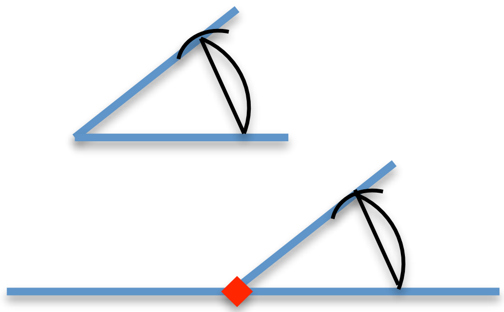


אנך לנקודה על קו



אנך לקו מנקודה שמחוץ לו

זוית על קו נתון השוה לזוית נתונה

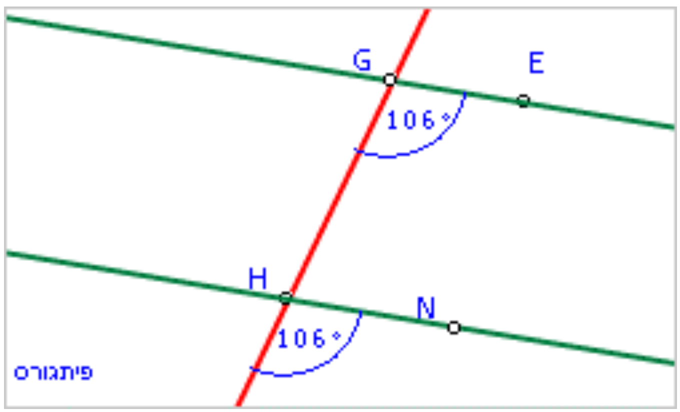


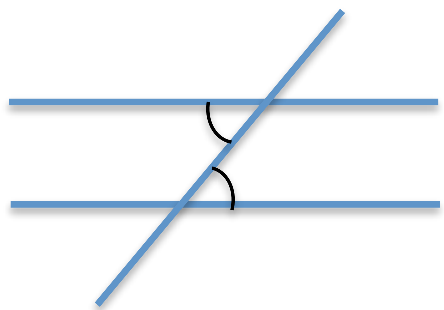
קוים מקבילים

אכסיומה: שני קוים מקבילים אינם נפגשים
אכסיומה: דרך נקודה עובר רק קו אחד המקביל לקו נתון

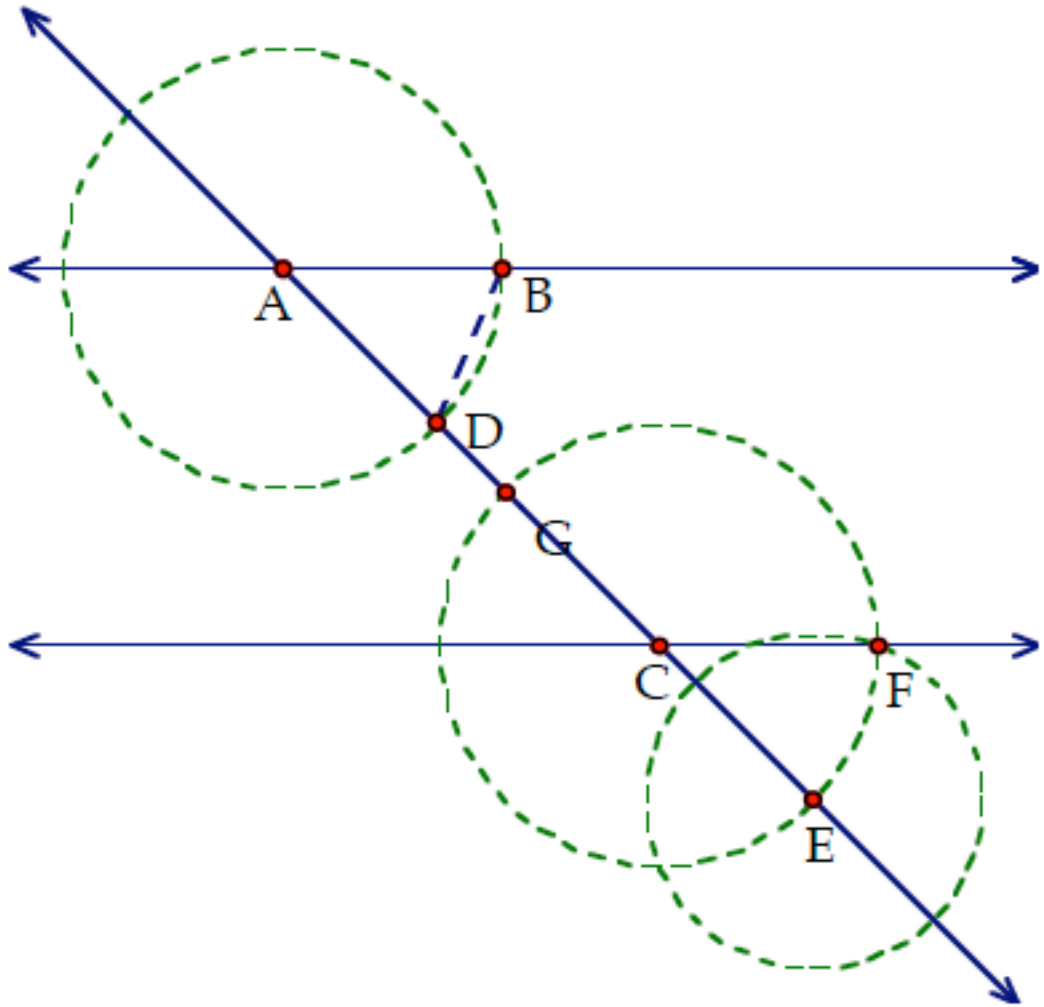
- זויות מתחלפות שוות – ולהפך: שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.

הוכחה



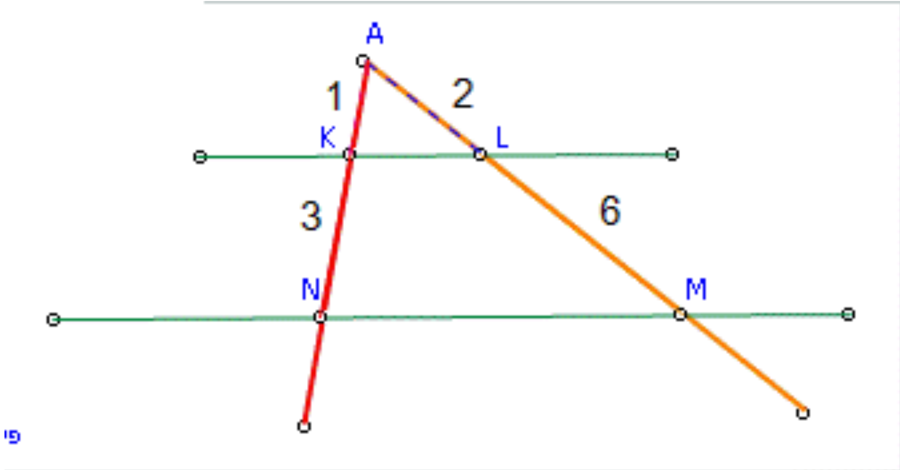


בנית קו מקביל לקו נתון העובר דרך נקודה – שימוש בזויות מתחלפות

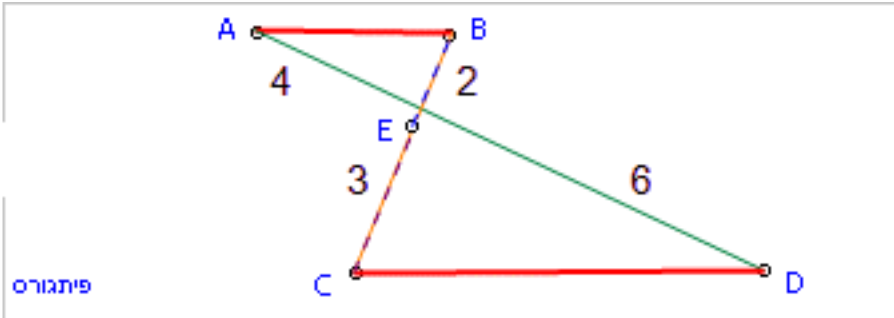


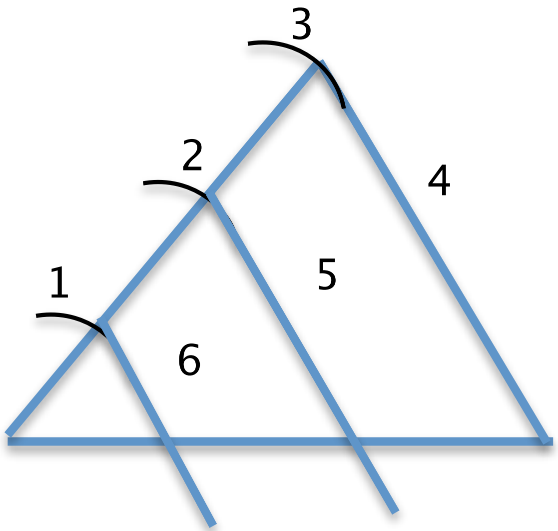
במשולש (שאינו שווה צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר, ולהפך:
מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.

משפט תאלס:
שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית,
מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים, ולהפך.



משפט תאלס המורחב:
ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש,
חותך את שתי הצלעות האחרות או את
המשכיהן בקטעים פרופורציוניים

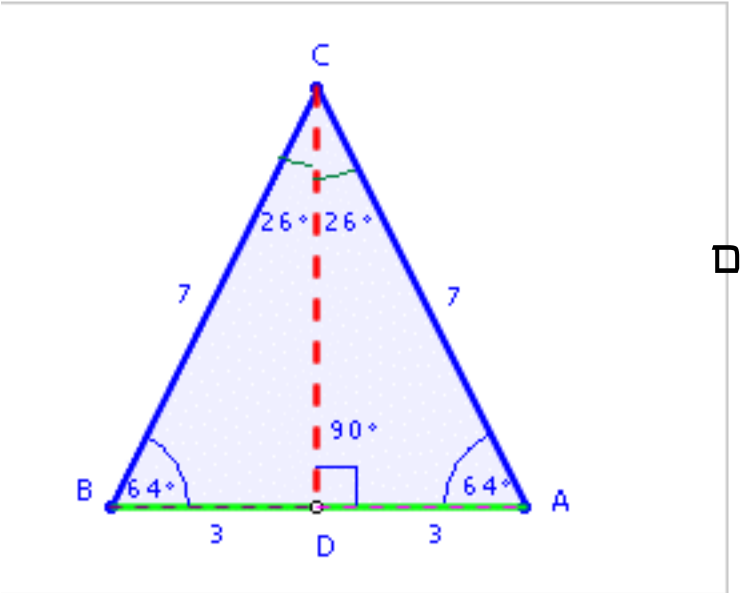




בניה – חלוקת קטע ל-n חלקים שוים

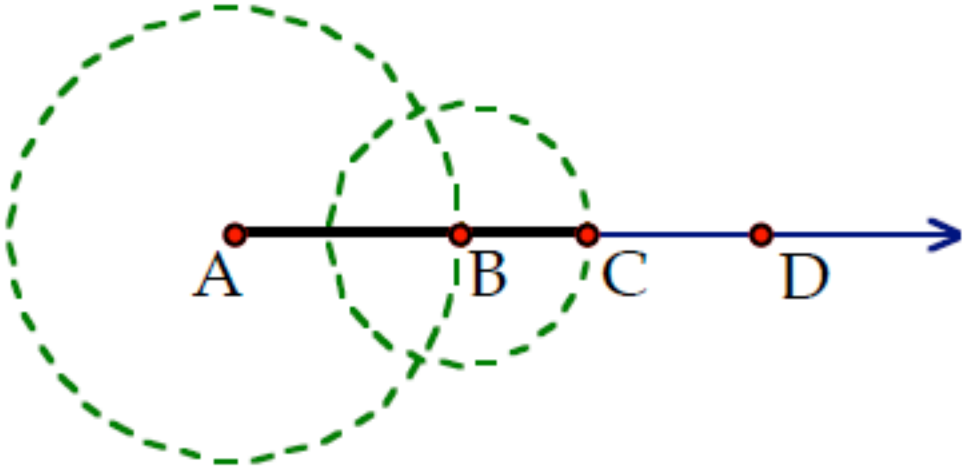
במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
ולהפך: במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו

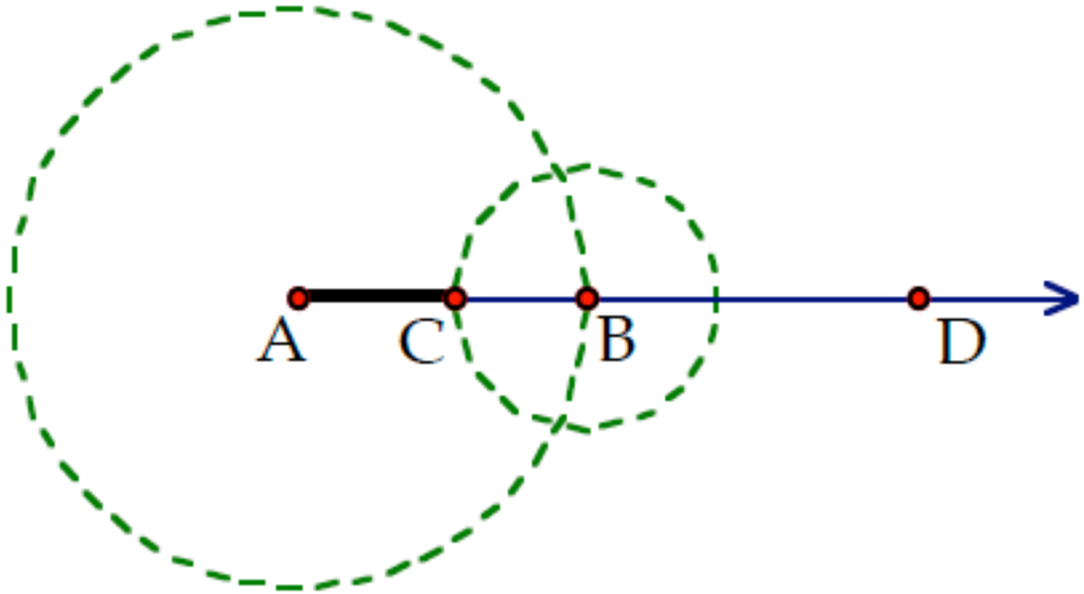
במשולש שווה שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס
והגובה לבסיס מתלכדים.
אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה
שוקיים
אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה
שוקיים
אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים



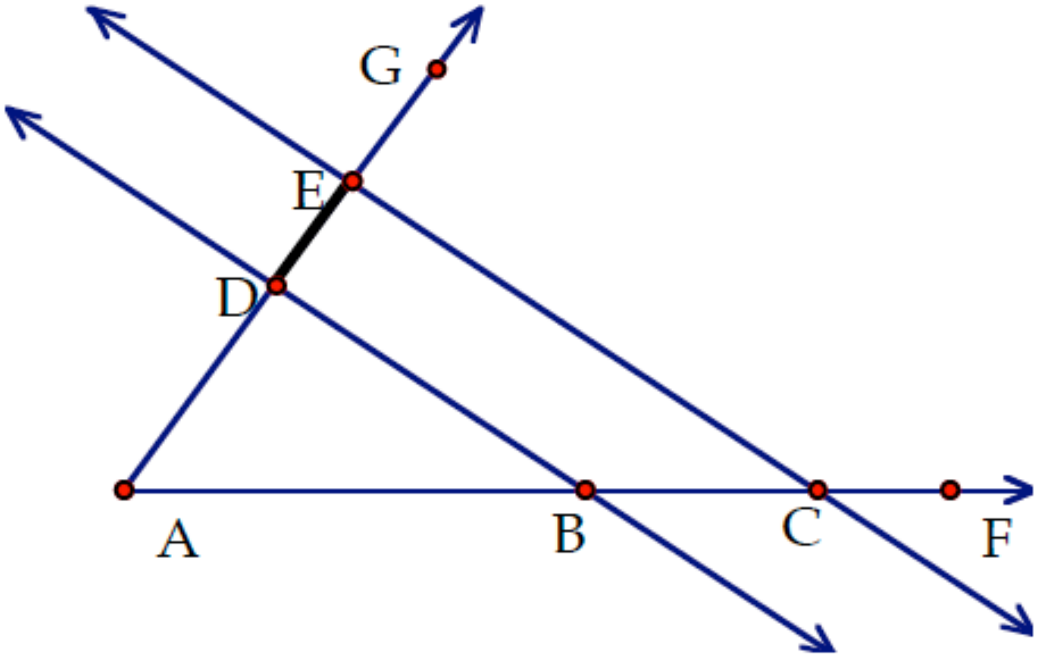
סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית

<u>חיבור וחיסור</u>





<u>כפל xy כאשר נתון אורך היחידה</u> 1



בנה זוית FAG

בנה AB=1 BC=x AD=y

בנה ל-BD מקביל העובר דרך C ויוצר את הנקודה E

xy=DE

הוכחה: המשולשים ABD ACE דומים, ולכן

$AE/AC = AD/AB$

$(y + z)/(1 + x) = y/1$

$z=xy$

שימו לב: חיבור וחיסור גראפיים אינם תלויים באורך היחידה
אך אורך הקטע השווה לכפל וחילוק תלוי בהגדרת היחידה !!!

חילוק

נבנה $AC=1$ $AB=x$ $AE=y$

בנה מקביל ל-CE העובר דרך B ויוצר נקודה D

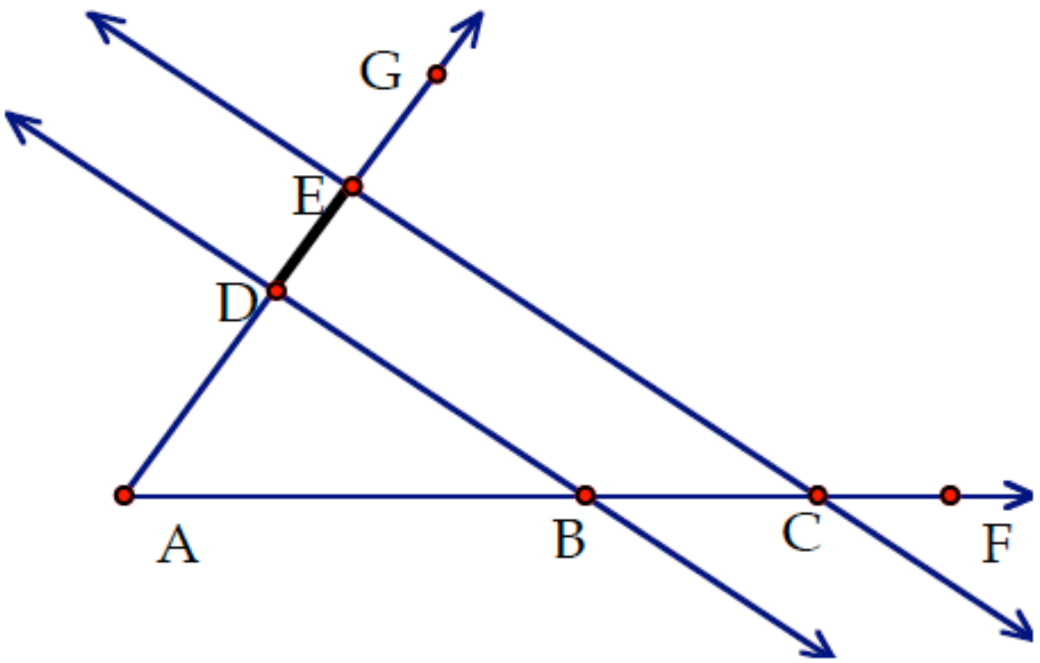
$AD=y/x$

הוכחה שוב בגלל משולשים דומים:

$AE/AC = AD/AB$

$y/1 = z/x$

$z=y/x$



שרש ריבועי

נבנה מעגל שמרכזו D ורדיוסו AD=DC

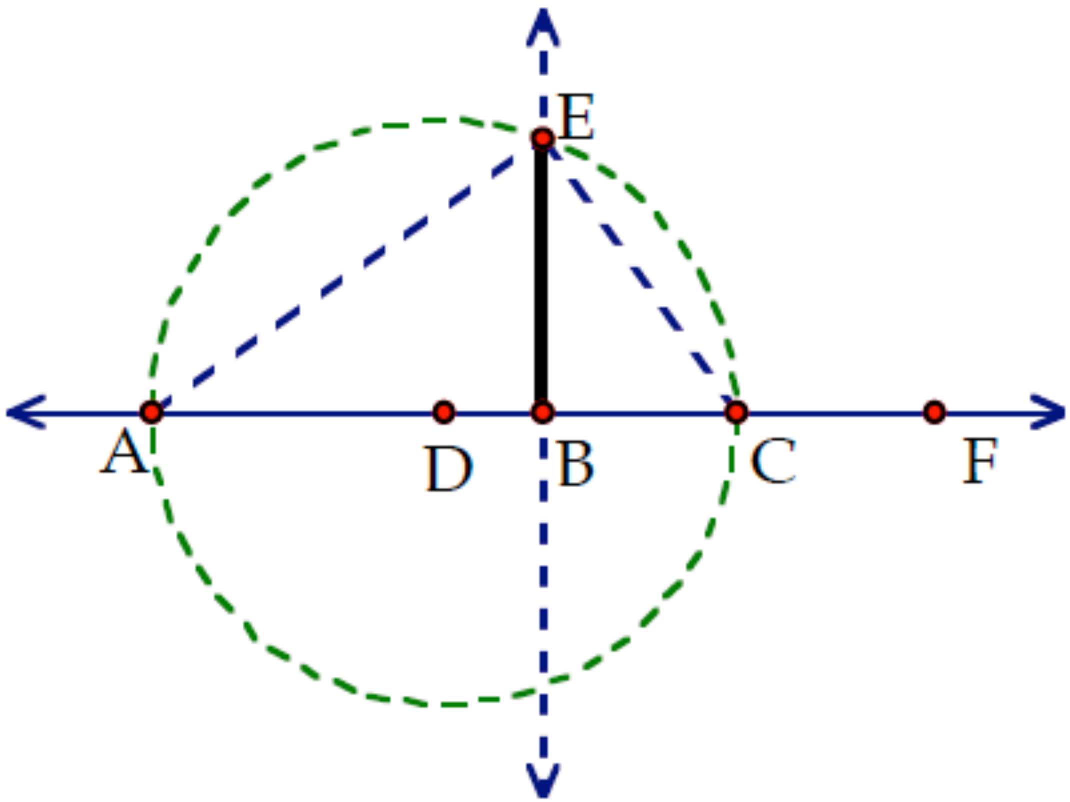
האנך ל–AC העובר דרך B חותך את המעגל ב–E

BE= $\sqrt{x}$

הוכחה:

משולשים דומים ABE ו– EBC ולכן CB/BE = EB/BA

AB*BC=BE^2



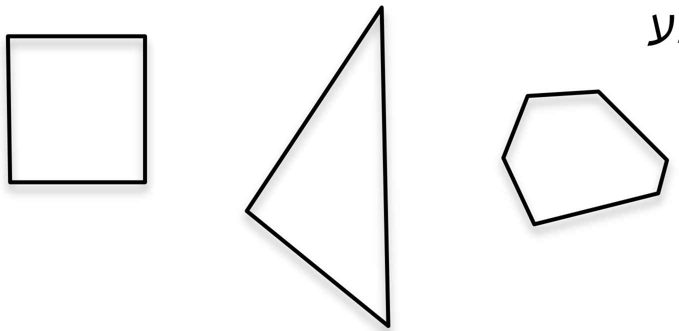
בעיות קשות יותר:

חלוקת זוית לשלש

בנית מעגל חוסם וחסום למשולש

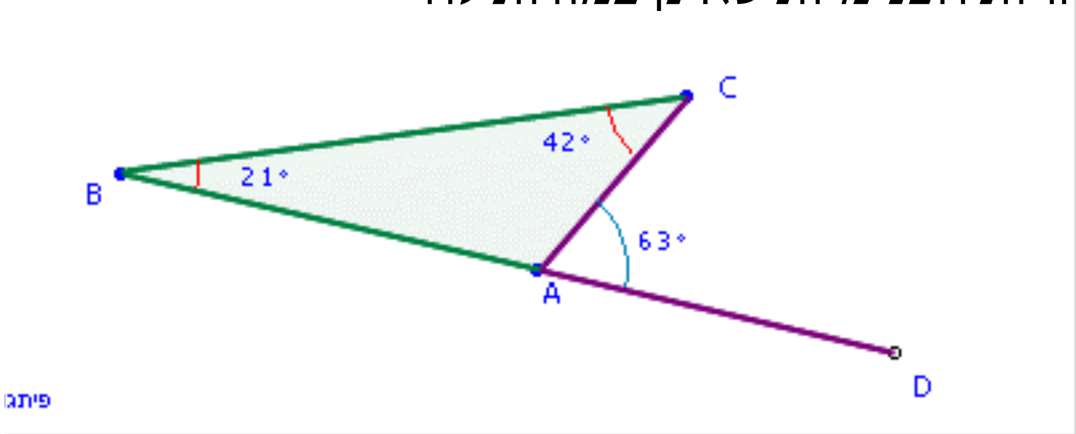
<u>המשולש ומצולעים אחרים</u>

מצולע (פוליגון), משולש, מרובע



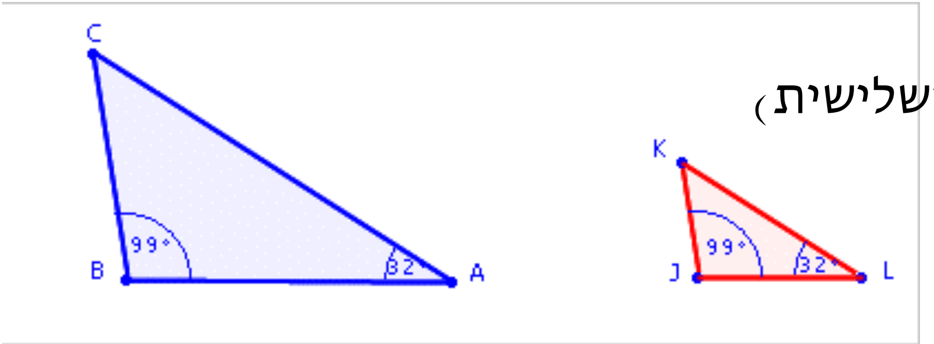
סכום הזויות הפנימיות והחיצוניות למשולש (180) ומצולע.

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה

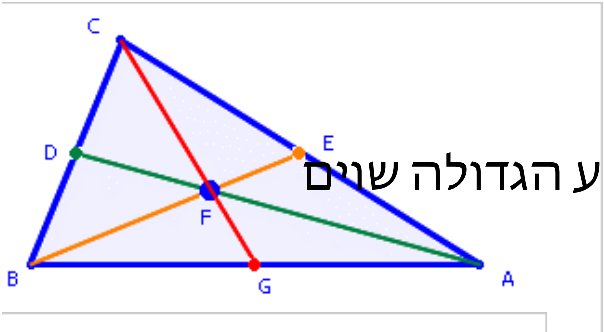


זוית חיצונית במשולש שוה לסכום הזויות שאינן צמודות לה

* משולש שוה שוקיים – זוית הבסיס שוות –
הוכחה ע"י חלוקה לשני משולשים
* משולש שוה צלעות – כל הזויות שוות – נובע מהנ"ל

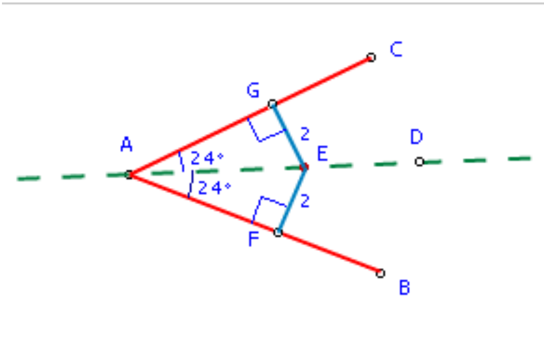


- משולשים דומים – שתי זויות שוות (ולכן גם השלישית (
- יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון

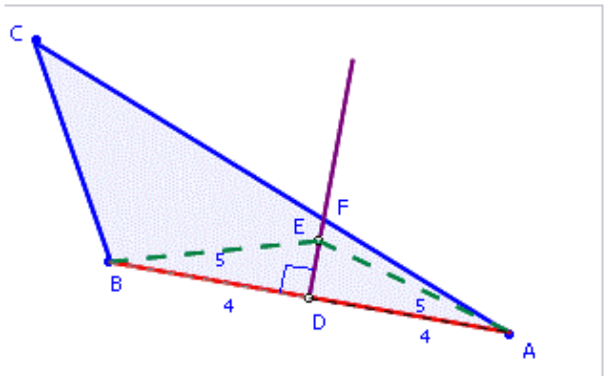


- משפטי חפיפה: משולשים חופפים אם –
- 1. שתי זויות והצלע ביניהן שוים
  2. שתי צלעות והזוית ביניהם או הזוית מול הצלע הגדולה שוים
  3. שלש צלעות שוות
  הוכחה ע"י בניה

פגישת תיכונים במשולש ב 2/3 האורך (מרכז הכובד (

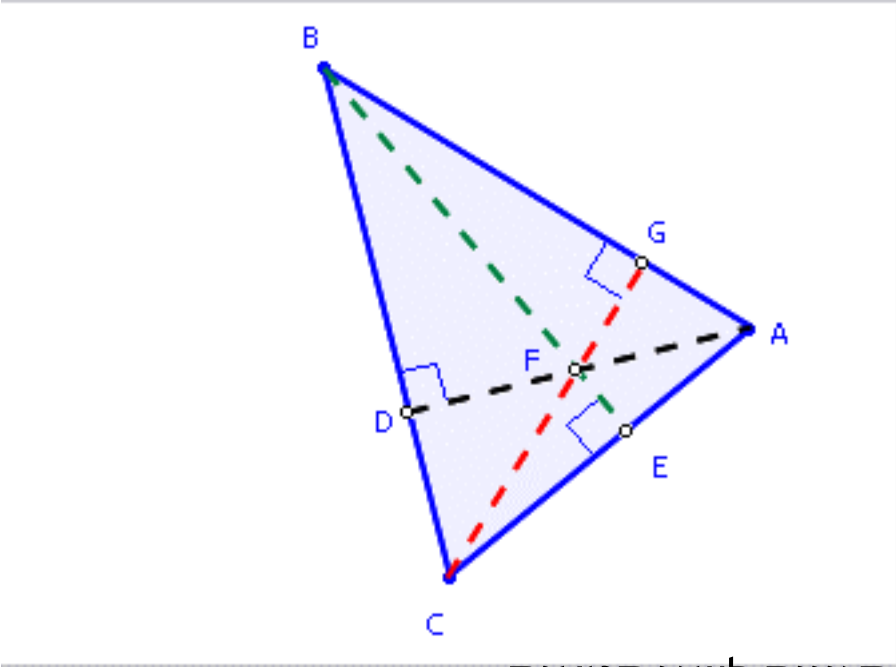


* שלשת התיכונים נפגשים בנקודה אחת
* גם שלשת חוצי הזוית נפגשים בנקודה
מאחר וכל נקודה על חוצי הזויות מרוחקת במידה שוה
משתי הצלעות היוצרות את הזוית, הנקודה המשותפת
לחוצה הזוית לצלעות a ו–b ולצלעות b ו–c נמצאת
במרחק שוה מכל שלשת הצלעות ולכן היא נמצאת גם
על חוצה הזוית לצלעות a ו–c

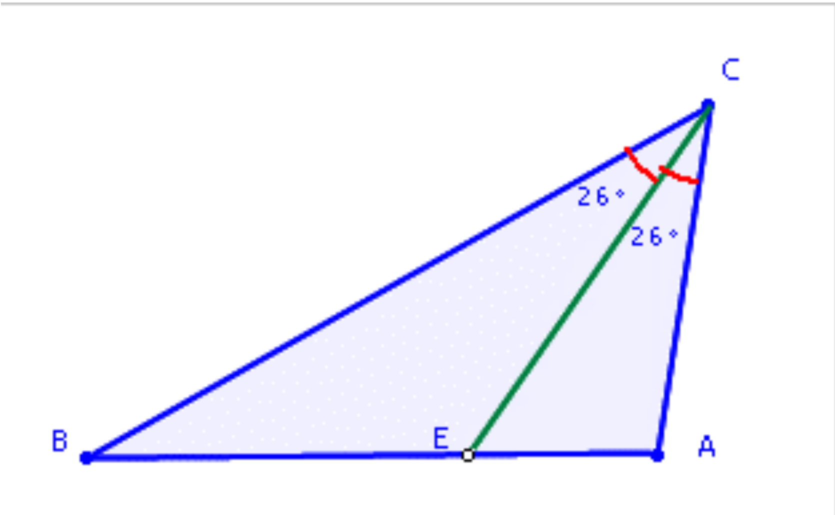


כל נקודה הנמצאת על אנך אמצעי של קטע, נמצאת
במרחקים שווים מקצות הקטע

שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת



חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים
אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה, ולהפך.

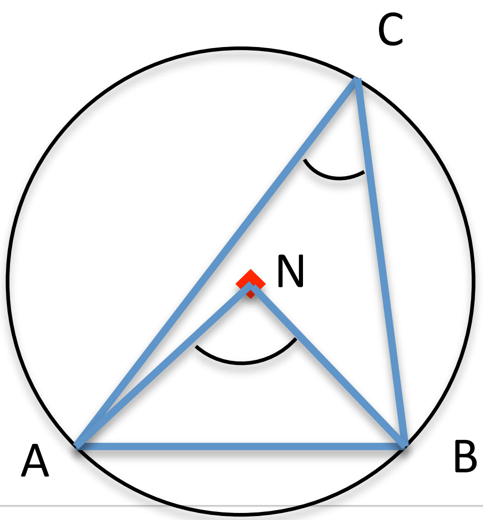


המעגל

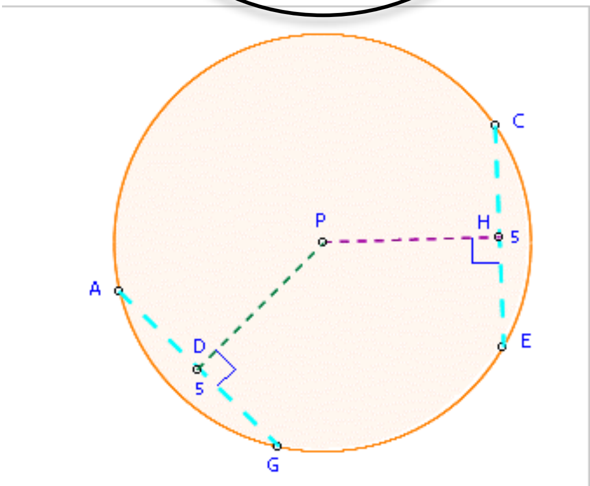
קו עקום, מעגל
דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד
המעגל – עקום שכל נקודה עליו במרחק שווה מנקודה אחת – מרכז
קשת (חלק ממעגל) ומיתר–קו הנשען על 2 נקודות במעגל

זויות במעגל

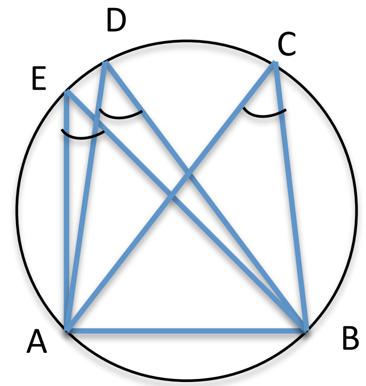
קשתות שוות שייכות לזויות הקפיות שוות ולזויות מרכזיות שוות
זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית
הנשענת על אותה הקשת
נסמן זוית ACB (צריך לסמן ACB> עם קשת על (>)

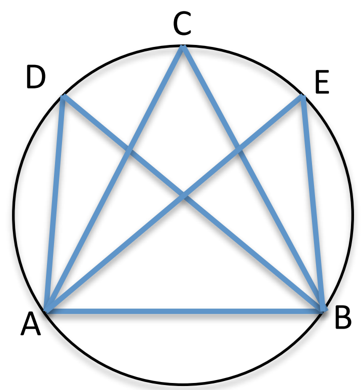


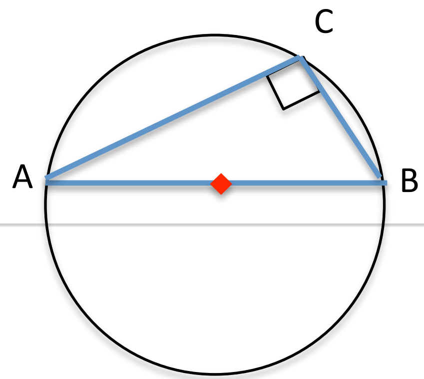
זוית מרכזית (ANB) כפולה מזוית הקפית
הנשענת על אותו מיתר (ACB)
מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים
ממרכזו שווים זה לזה
האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה
את הזווית המרכזית המתאימה למית וחוצה את הקשת
המתאימה למיתר



מיתרים שוי אורך נמצאים במרחקים שווים מהמרכז
דרך 3 נקודות שונות על מעגל לא ניתן להעביר קו
זויות הקפיות שוות נשענות על קשתות שוות
זויות הקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים

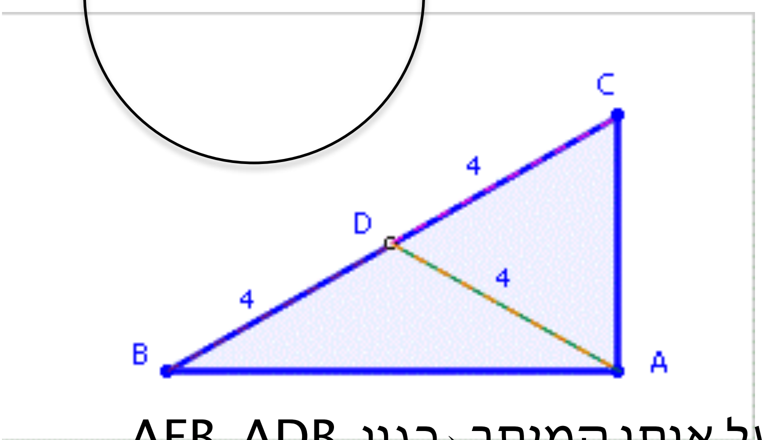






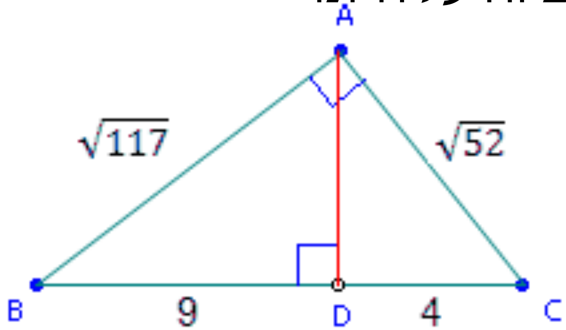
על מיתר שהוא קוטר נשענת זוית הקפית ישרה

משפט פיטגורס והיפוכו.
במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר
ולהפך: משולש בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה
הוא חוצה הוא משולש ישר זווית



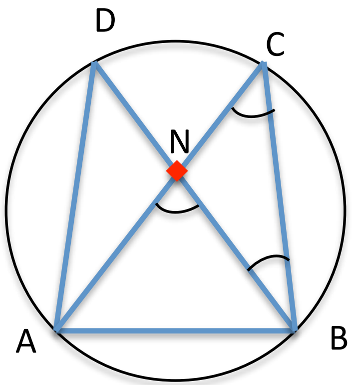
כל הזויות הקפיות – שקדקדם נמצא על מעגל ונשענות על אותו המיתר (כגון AEB, ADB,
ACB) שוות, ולהפך: המקום הגיאומטרי של הנקודות היוצרות עם מיתר זוית קדקדית שוה
הוא מעגל שהמיתר שייך לו
זוית הקפית שוה לחצי הזוית הנשענת על המיתר וקדקדה במרכז

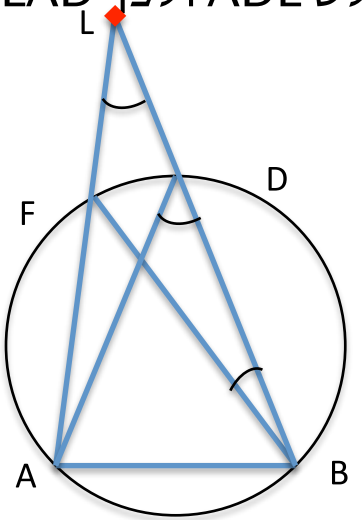
במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר



זוית הנשענת על מיתר AB וקדקדה בתוך העיגול (כגון ANB) שווה לסכום שתי זויות
הקפיות הנשענות על המיתרים הנחתכים מהמשכי הקרניים: AB ו- CD (או חצי סכום
הזוית המרכזיות הנשענות על הקשתות)
הוכחה: ANB זוית חיצונית למשולש CNB

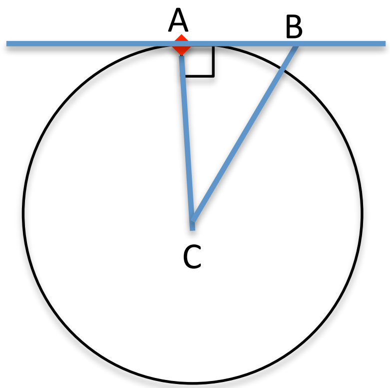
זוית הנשענת על מיתר AB וקדקדה מחוץ למעגל (כגון ALB) שוה להפרש בין הזוית
ההקפיות הנשענות על המיתרים שנחתכים ע"י הקרנים: FD ו- AB.
רמז להוכחות: ADB זוית חיצונית למשולש ADL ולכן ADB=ALD+LAD
ALD==ALB=ADB-LAD





משיק

משיק למעגל הוא קו שיש לו רק נקודה אחת משותפת עם המעגל

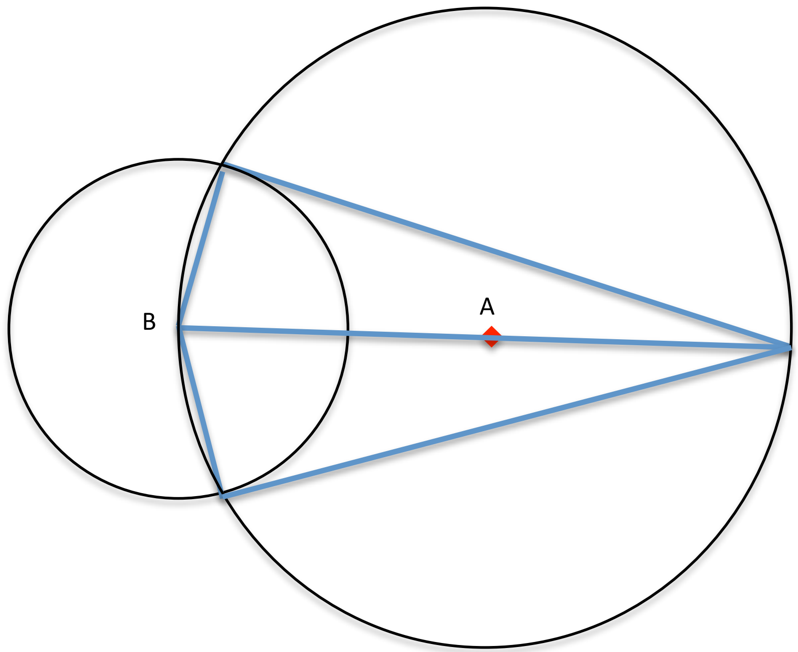


* משיק למעגל אנכי למחוג (רדיוס) AC העובר בנקודת ההשקה A ולהפך: אנך לקו בנקודה בה הוא חוצה את המעגל משיק למעגל.
הוכחה: לכל נקודה B (שאינה A) על הקו המרחק למרכז המעגל CB גדול מהרדיוס CA ולכן הוא מחוץ למעגל

שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה

בעיות בניה:

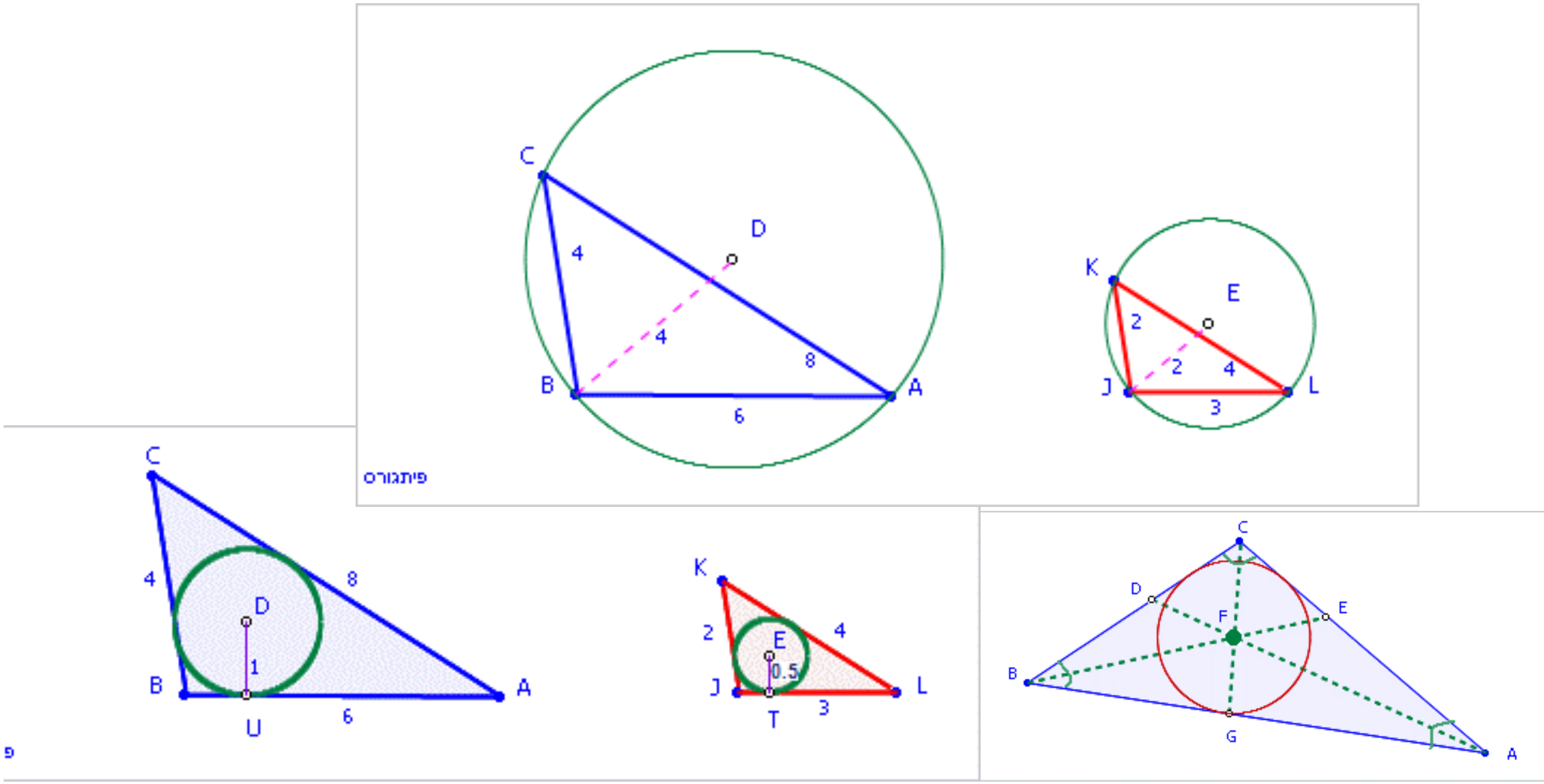
בנית משיק למעגל בנקודה על המעגל: פתרון: בנית אנך לרדיוס



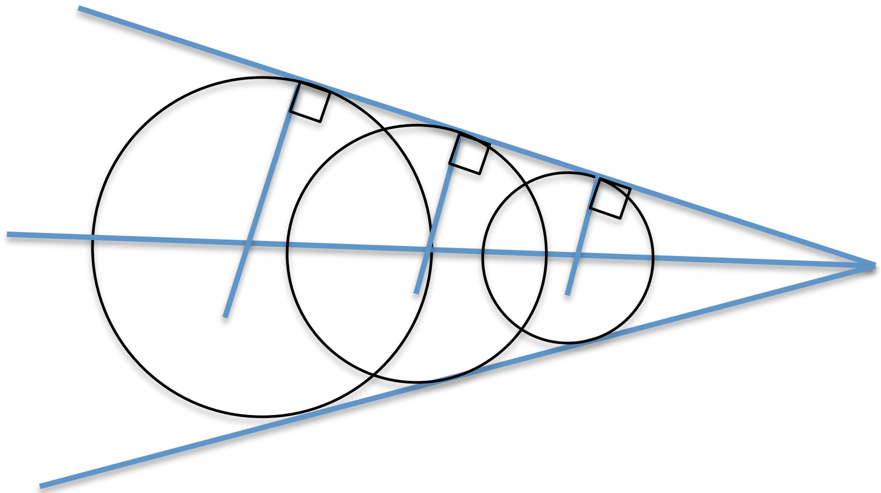
בנית משיק למעגל מנקודה שמחוץ למעגל A פתרון: נבנה מעגל שרדיוסו AB ומרכזו ב_A
והוא חותך את המעגל בשתי נקודות ההשקה הרצויות.

מעגל חוסם וחסום למשולש:

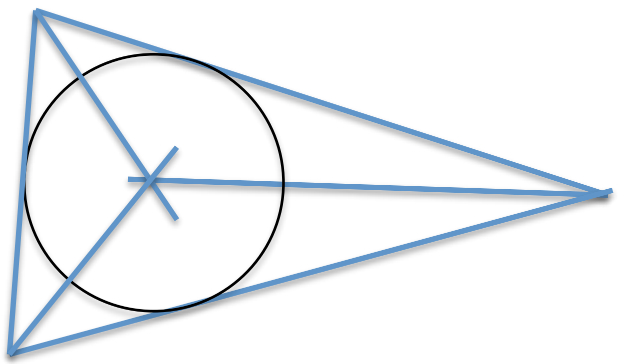
שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש



בנית מעגל המשיק לשתי הקרניים של זוית פתרון: כל מעגל שמרכזו על חוצה הזוית. נבנה לכן אנך לקרן ומרכז המעגל הוא נקודת החיתוך עם חוצה הזוית. אם רוצים מעגל עם רדיוס מסויים: בונים מקביל לקרן במרחק זה החותך את חוצה הזוית במרכז המעגל הרצוי.



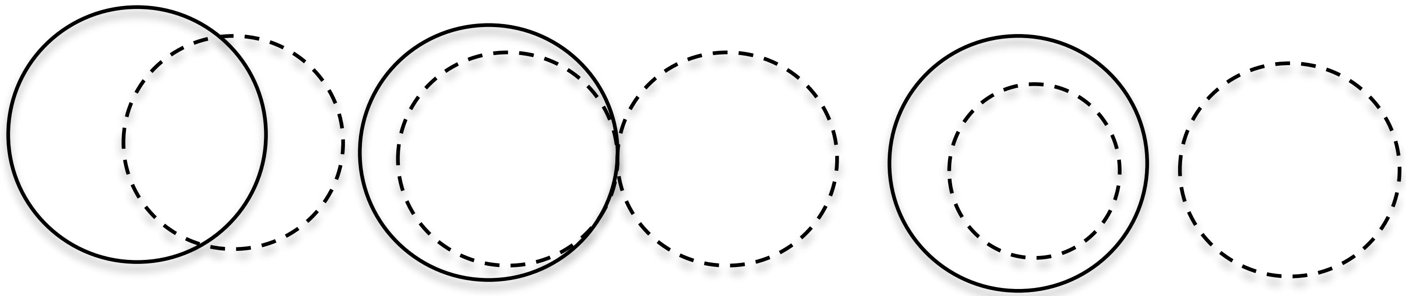
יש מעגל חסום יחיד לכל משולש (הנוגע בכל צלע בנקודה אחת) מרכזו במפגש חוצי הזוית.



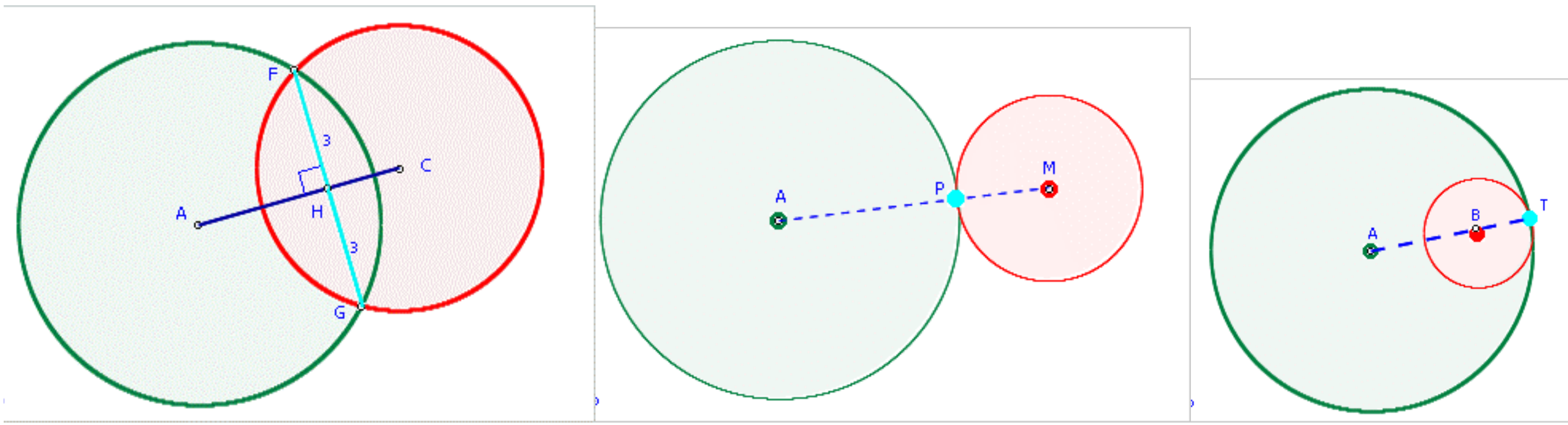
שני מעגלים

שני מעגלים (בציור קו קצוף ומקווקו) יכולים להפגש בשתי נקודות, בנקודה אחת, או באף נקודה

אם שני מעגלים נוגעים בנקודה אחת הנקודה נמצאת על הקו המחבר מרכזיהם. הוכחה על דרך השלילה:



קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו
נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו



סימטריות

שתי נקודות נקראות סימטריות לקו אם הקו המחבר אותן אנכי לקו הסימטריה ומרחקן ממנו שוה.

מעגל סימטרי לעצמו עבור כל קוטר שלו.

שטחים

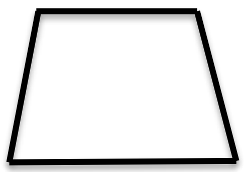
שטח ריבוע=אורךxרוחב

שטח מקבילית=בסיסxגובה

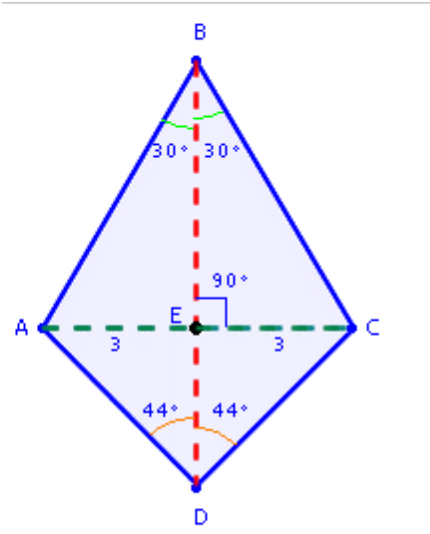
שטח משולש= $1/2$ (בסיסxגובה)

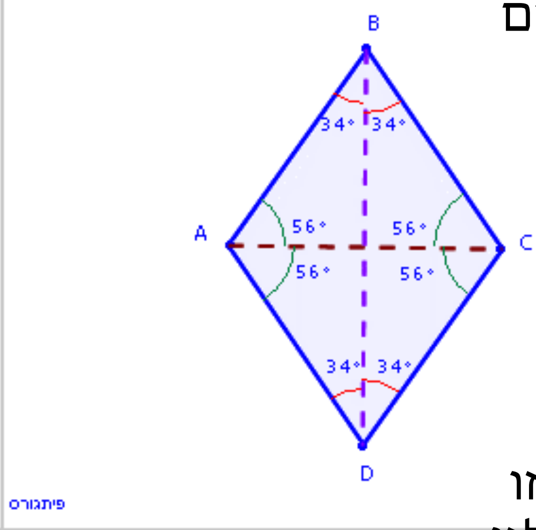
שטח משולש=חצי הקפו x רדיוס המעגל החסום

שטח טרפז=ממוצע בסיסיו x גובהו



האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו





במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות ומאונכים

ולהפך: אם שוים או מאונכים – מעויין

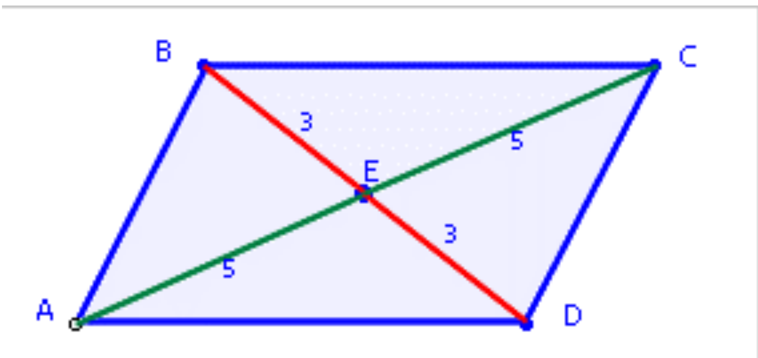
במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו

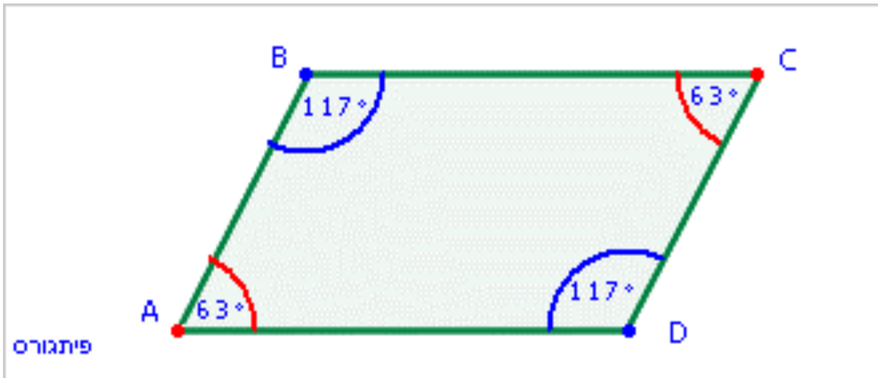
במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו

במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה, ולהפך: אם חוצים–מקבילית.

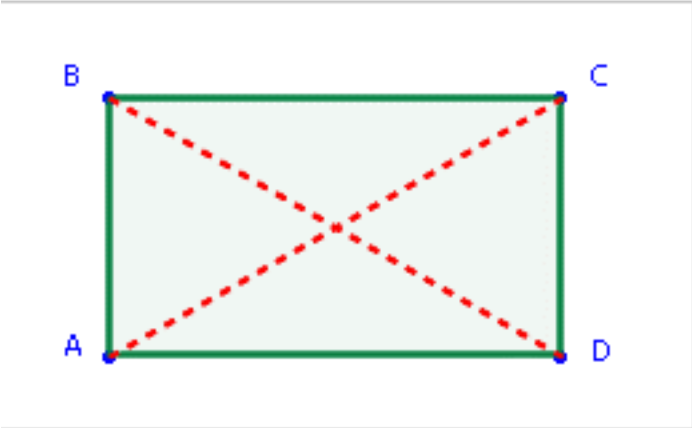
מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית

מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית

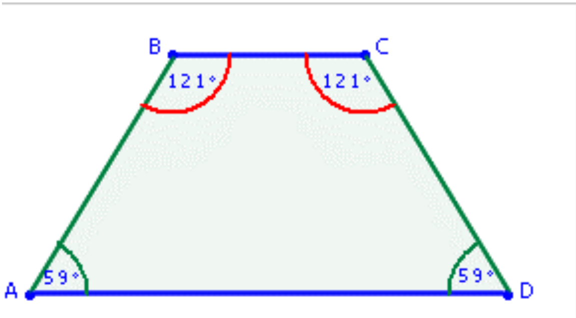


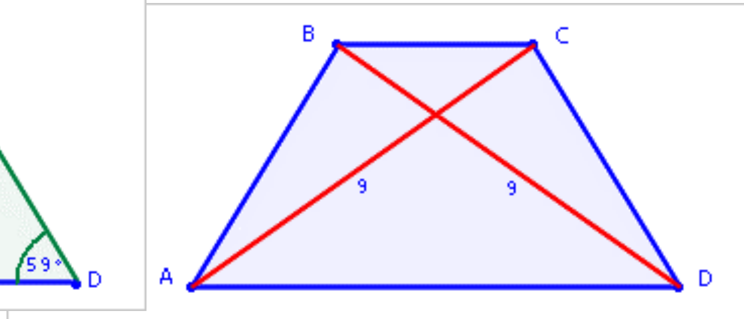


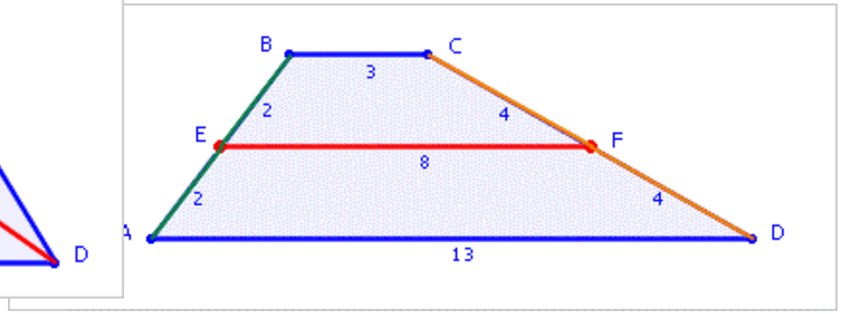
* אלכסוני המלבן שווים זה לזה, ולהפך.

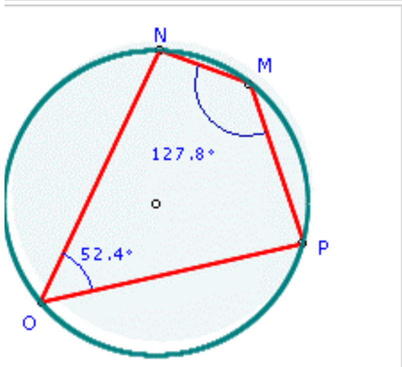


בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו, ולהפך.
בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה, ולהפך.
קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם
בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה



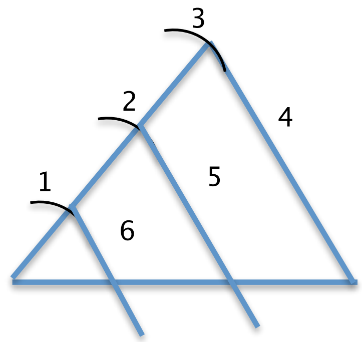






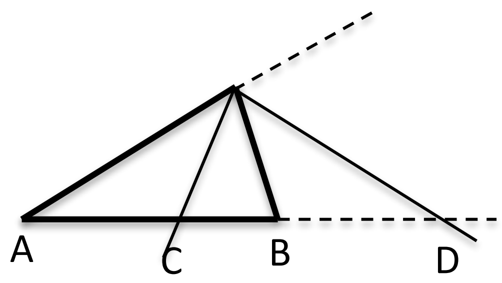
ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק
אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180^0.

קטעים פרופורציוניים



משולשים דומים

חלוקה הרמונית:

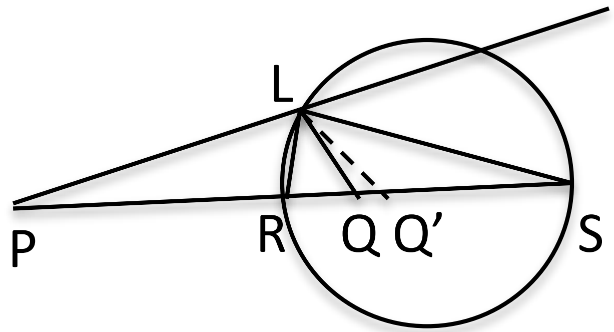


מבחוץ כך ש D, מבפנים AB מחלק את C:

CA/CB=DA/DB

חוצה הזוית מחלק ב-C את הצלע AB מול הזוית ביחס השווה ליחס הצלעות הסמוכות.
וחוצה הזוית החיצונית מחלק ב-D כנ"ל:

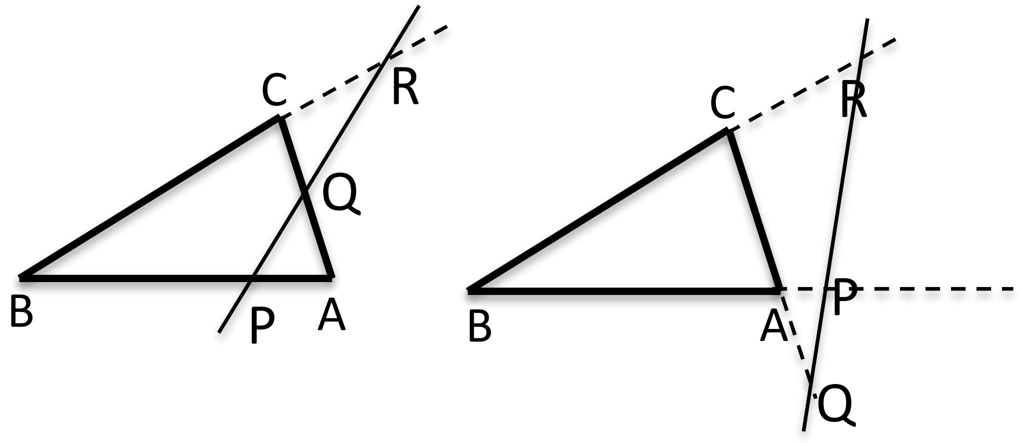
- **משפט אפולוניוס**:
- המעגל (שקוטרו RS) הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות L שמרחקיהן משתי נקודות P, Q מקיים יחס נתון. הוכחה: נחלק PQ בחלוקה הרמונית (מבפנים ובחוץ) ביחס הנתון בנקודות R,S



- **<u>משפט מנלאוס</u>**:
- ישר חותך צלעות משולש או המשכיהן כנ"ל אז קיים:

$AP/BP.BR/CR.CQ/QA=1$

וההפך, אם קיים השוויון הנקודות PQR על קו אחד

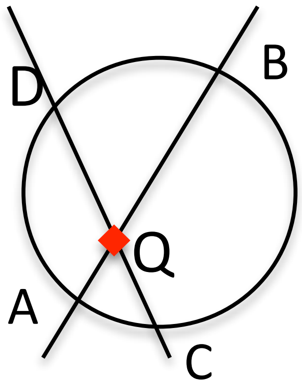


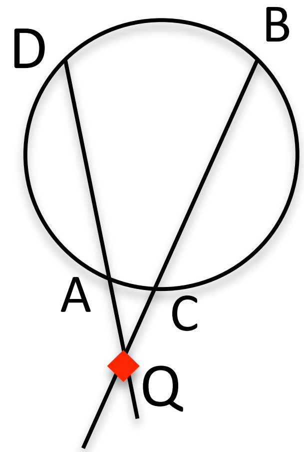
<u>אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני</u>

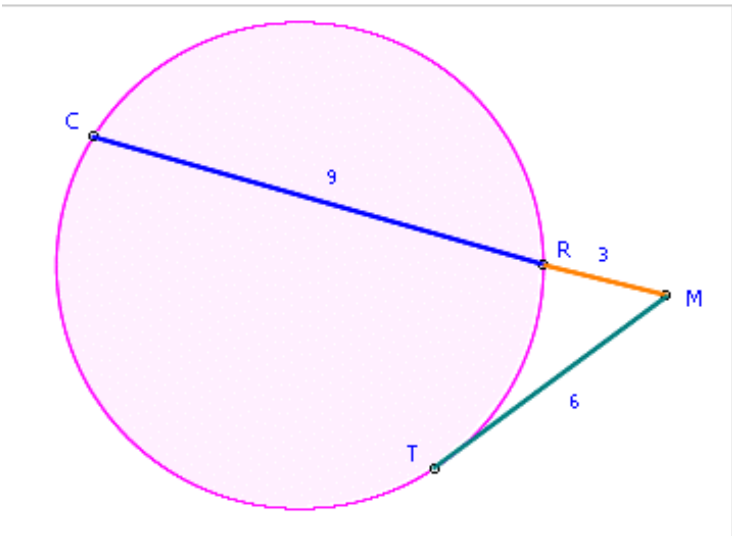
<u>שני מיתרים</u> הנחתכים בתוך מעגל מקיימים QA*QB=QC*QD

שני מיתרים הנחתכים מחוץ למעגל – כנ"ל

לכן המכפילה גם שווה לריבוע אורך המשיק למעגל מנקודה Q



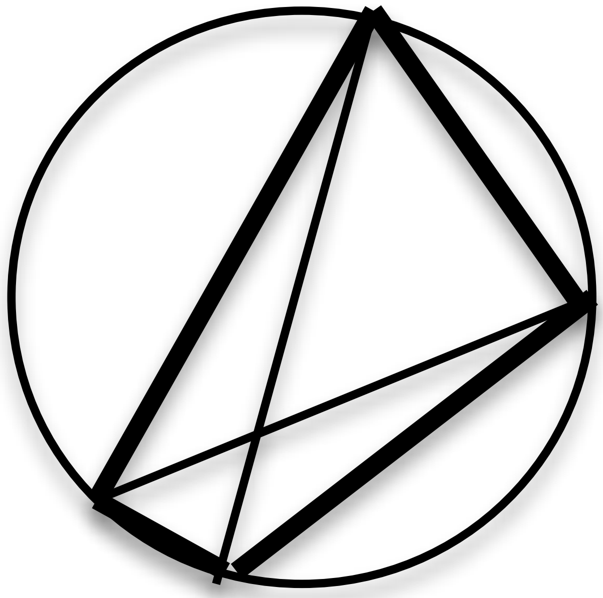




אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק

משפט תלמאי:

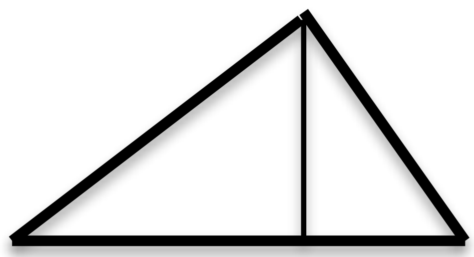
במרובע החסום במעגל מכפילת האלכסונים שוה לסכום מכפילות הצלעות הנגדיות



<u>דמיון משולשים ומצולעים</u>

<u>סגולות מטריות של המשולש</u>

משולש ישר זוית נחלק, ע"י הגובה המורד על היתר, לשני משולשים הדומים לו

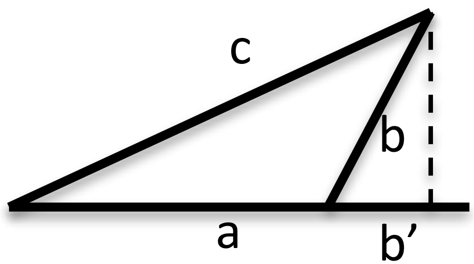


במשולש ריבוע הצלע שמול זוית חדה שוה לסכום ריבועי שאר הצלעות פחות פעמים מכפילתם כפול cos הזוית ביניהן (או מכפילת צלע אחת a בהיטל השניה עליה b')

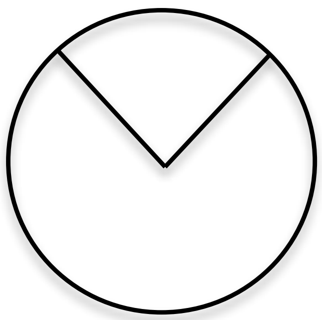
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(ACB)$

נוסחת הירון: שטח משולש לפי שלשת צלעותיו

A=sqrt[p(p-a)(p-b)(p-c)]   p=(a+b+c)/2



שטח מקבילית שווה למכפלת צלע המקבילית בגובה לצלע זו.
שטח משולש שווה למחצית מכפלת צלע בגובה לצלע זו.
שטח מעוין שווה למחצית מכפלת האלכסונים.
שטח טרפז שווה למכפלת הגובה במחצית סכום הבסיסים.
שטח עיגול שרדיוסו r שווה ל- $\pi*R^2$
שטח גיזרה=חצי הרדיוסxאורך הקשת
שטח גיזרה=חצי הרדיוס בריבועxהזוית ברדיאנים



נוסחאות לחישוב מצולעים משוכללים ומעגל

כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל

סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $(180^0)*(n-2)$

גיאומטריה מרחבית

* – הגדרות

1 מרחב, מישור, דרכי קביעת המישור:

א. על ידי שני ישרים נחתכים.

ב. על ידי שני ישרים מקבילים.

ג. על ידי 3 נקודות שאינן על קו ישר אחד.

ד. על ידי ישר ונקודה מחוצה לו.

2. שלושת המצבים ההדדיים של שני ישרים במרחב:

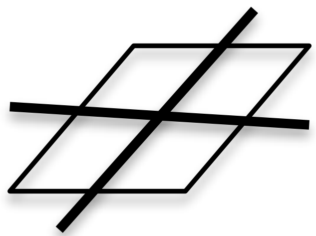
א. נחתכים.

ב. מקבילים.

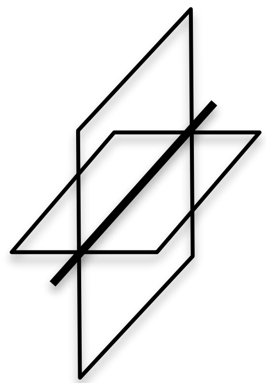
ג. מצטלבים.

ישר נמצא במישור אם שתי נקודות עליו נמצאות על המישור.

דרך קו ישר ונקודה (שאינה על הקו) עובר מישור יחיד.

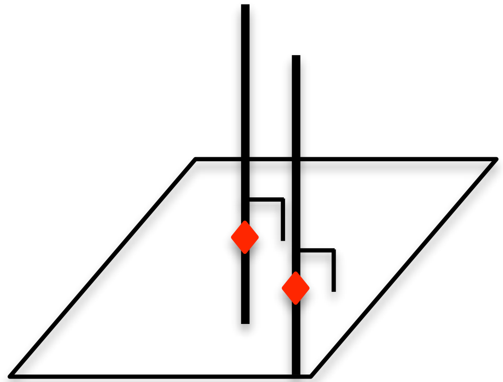


שני ישרים חותכים קובעים מישור.
שני ישרים מקבילים קובעים מישור.
שני מישורים מקבילים – הם ללא ישר משותף.
* נקודת החיתוך של ישר עם מישור (שאינו מקביל לו) נקראת עקב.
ישר שאינו במישור ומקביל לאחד הישרים במישור מקביל למישור.

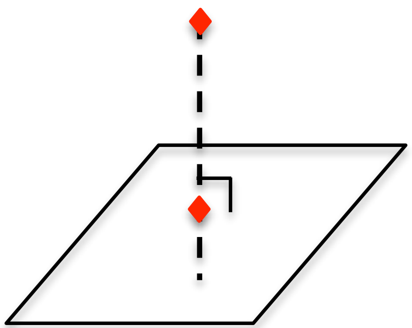


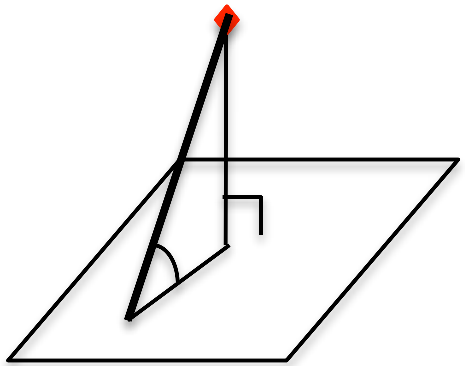
אם לשני מישורים נקודה משותפת יש להם ישר משותף (מישורים נחתכים).
שני ישרים שאינם במישור אחד נקראים מצטלבים.
שני ישרים המקבילים לישר שלישי מקבילים זה לזה.
ישר מאונך למישור אם הוא מאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקיבו.
כל הישרים העוברים דרך נקודה על ישר ואנכיים לו נמצאים במישור אחד.
דרך נקודה במישור עובר אנך אחד למישור.
דרך נקודה שמחוץ למישור ניתן להעביר ישר יחיד המאונך למישור

המרחק בין הנקודה וחיתוך האנך עם המישור הוא מרחק הנקודה מהמישור (והוא המרחק המינימאלי בין הנקודה לכל נקודה במישור).



שני אנכים למישור מקבילים ביניהם.
שני מישורים האנכיים לישר מקבילים זה לזה.
מישור חותך מישורים מקבילים בישרים מקבילים.
כל הנקודות הנמצאות במרחק שוה ממישור מונחות על מישור מקביל.
שתי זויות במרחב ששוקיהן מקבילות – שוות או סכומן 180 מעלות.
* הטל של נקודה על מישור: חיתוך עם המישור של אנך למישור דרך הנקודה.



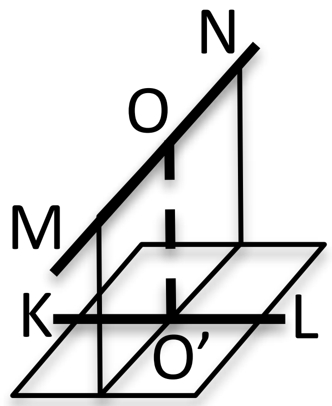


משופע למישור הוא קו שאינו אנכי למישור.

הזוית בין משופע להיטלו היא הזוית המינימאלית מכל הקוים במישור העוברים דרך העקב.

ישר העובר במישור ומאונך למשופע מאונך גם להטלו.

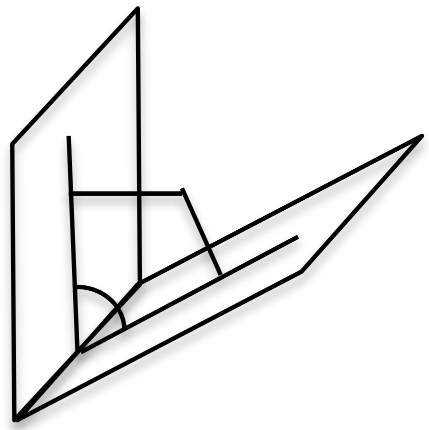
קו המאונך למישור, כל המישורים העוברים דרכו מאונכים למישור.



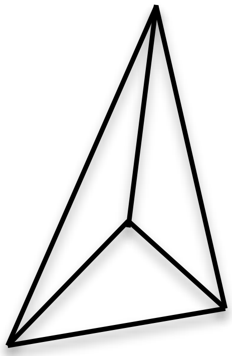
הרוחק בין שני קוים מצטלבים KL ו-MN הוא OO' שייבנה כדלכמן: נבנה מישור המכיל את KL ומקביל ל-MN (ע"י כל קו שנקודה אחת על KL והוא מקביל ל-MN). ההיטל של MN על מישור זה יחתוך את KL בנקודה O'. נעלה ממנה אנך למישור שיחתוך את MN בנקודה O (שהטילה הוא O')

* זוית הפינה שיוצרים שני מישורים נחתכים היא הזוית המינימאלית שבין
כל שני ישרים בשני המישורים העוברים בנקודה בישר החיתוך.
בניה: מכל נקודה מורידים שני אנכים לשני המישורים ומעקבם מורידים שני אנכים
לישר החיתוך בין המישורים- זוית הפינה היא הזוית ביניהם.

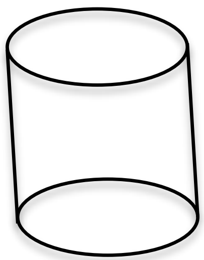
שני מישורים מקבילים יוצרים אותה זוית פינה עם כל מישור החותך אותם
(המקבילה המרחבית לזויות מתחלפות).
מישור העובר דרך ישר המאונך למישור שני גם הוא מאונך למישור השני
ישר הנמצא במישור ומאונך לחיתוכו עם מישור שני מאונך למישור השני
ישר החיתוך של שני מישורים המאונכים למישור שלישי - מאונך לשלישי

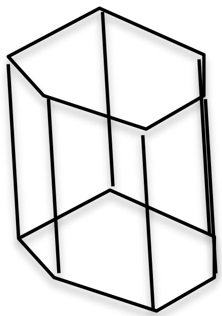


פינה משולשת – ראש דלתון

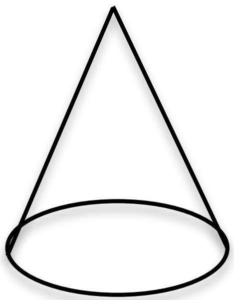


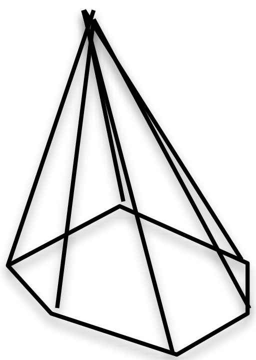
מנסרה וגליל – חישוב שטח פנים ונפח (שטח בסיס x גובה)





פירמידה וחרוט – חישוב שטח פנים ונפח (1/3 שטח בסיס x גובה)
חרוט קטום – נפח=1/6 (שטח בסיס + שטח תקרה) x גובה





גופי סיבוב – ראה משפט גולדין

כדור נפח $4/3\,\pi R^3$ שטח פני כדור $4\pi R^2$

חיתוך כדור ומישור – מעגל.

חיתוך כדור ומישור העובר במרכז הכדור – מעגל גדול.

מישור משיק לכדור

דרך 4 נקודות שאינן על מישור ניתן להעביר רק כדור אחד

משולש כדורי –

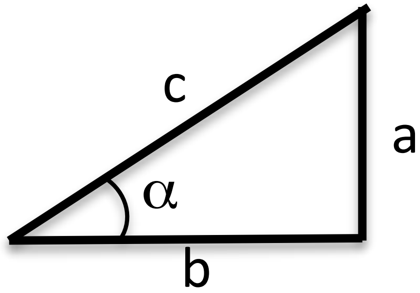
סהרון (נבנה משני מעגלים גדולים)

פרספקטיבה והטלי מפות עולם – ראה לעיל

טריגונומטריה

סיכום קלעי תוחמן, ספר לימוד משנות ה-50

במשולשים דומים היחסים בין אורכי הצלעות שוים
במשולשים ישרי זוית יחסים אלה תלויים רק בזוית הקדקדית. היחסים השונים מגדירים את הפונקציות הטריגונומטריות. הפונקציות האלה מאפשרות ממדידת זוית ואורך צלע אחת לקבל את אורכי שאר הצלעות



ההגדרות הן כדלקמן:
יחס $\sin\alpha=a/c=$ יחס הניצב מול הזוית לניצב ליד הזוית (טנגנס) $tg\alpha=a/b=$
הניצב מול הזוית למיתר (סינוס)
יחס הניצב ליד הזוית למיתר (קוסינוס) $\cos\alpha=b/c=$
שימוש: מדידת גובה עץ בלי לטפס עליו. נמדוד זוית של ראש העץ, נקבל את ערך ה-tan שלה ונכפיל במרחק מהעץ.
נראה בפרק "אסטרונומיה" איך נמדדו רדיום כדור הארץ והמרחק לירח בעזרת היחסים של משולשים דומים (בטרם המונח "טריגונומטריה" היה קיים).

כמה יחסים בין הפונקציות הטריגונומטריות: נובע ישירות מההגדרות לעיל)

קוסינוס $\cos\alpha=\sin(90^0-\alpha)$

טנגנס $tg\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha$

ממשפט פיטגורס נובע:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$

כמה ערכים מיוחדים:

$\cos0^0=1$ $\sin0^0=0$

$\cos60^0=0.5$ $\sin30^0=0.5$

$tg45^0 = 1$ $\sin45^0=\cos45^0= \sqrt{2}/2$

כמה פונקציות נוספות:

קוטנגנס $ctg\alpha=1/tg\alpha$

סקנס $\sec\alpha=1/\cos\alpha$

קוסקנס $cosec\alpha=1/\sin\alpha$

ולכן:

$1+ctg^2\alpha=1/\cos^2\alpha=\sec^2\alpha$

$1+\tan^2\alpha=1/\cos^2\alpha=\sec^2\alpha$

איך חישבו הקדמונים את הפונקציות הטרגונומטריות?

דרך נסיונית – מדידה. הדיוק קטן

דרך חישובית – שימוש בנוסחאות סכום וחצי זוית:

$\sin(\alpha/2)=\pm\sqrt{(1-\cos\alpha)/2}$

$\cos(\alpha/2)=\pm\sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$

$tg(\alpha/2)=\pm\sqrt{(1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha)}$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$tg(\alpha+\beta)=(tg\alpha+tg\beta)/(1+tg\alpha\, tg\beta)$

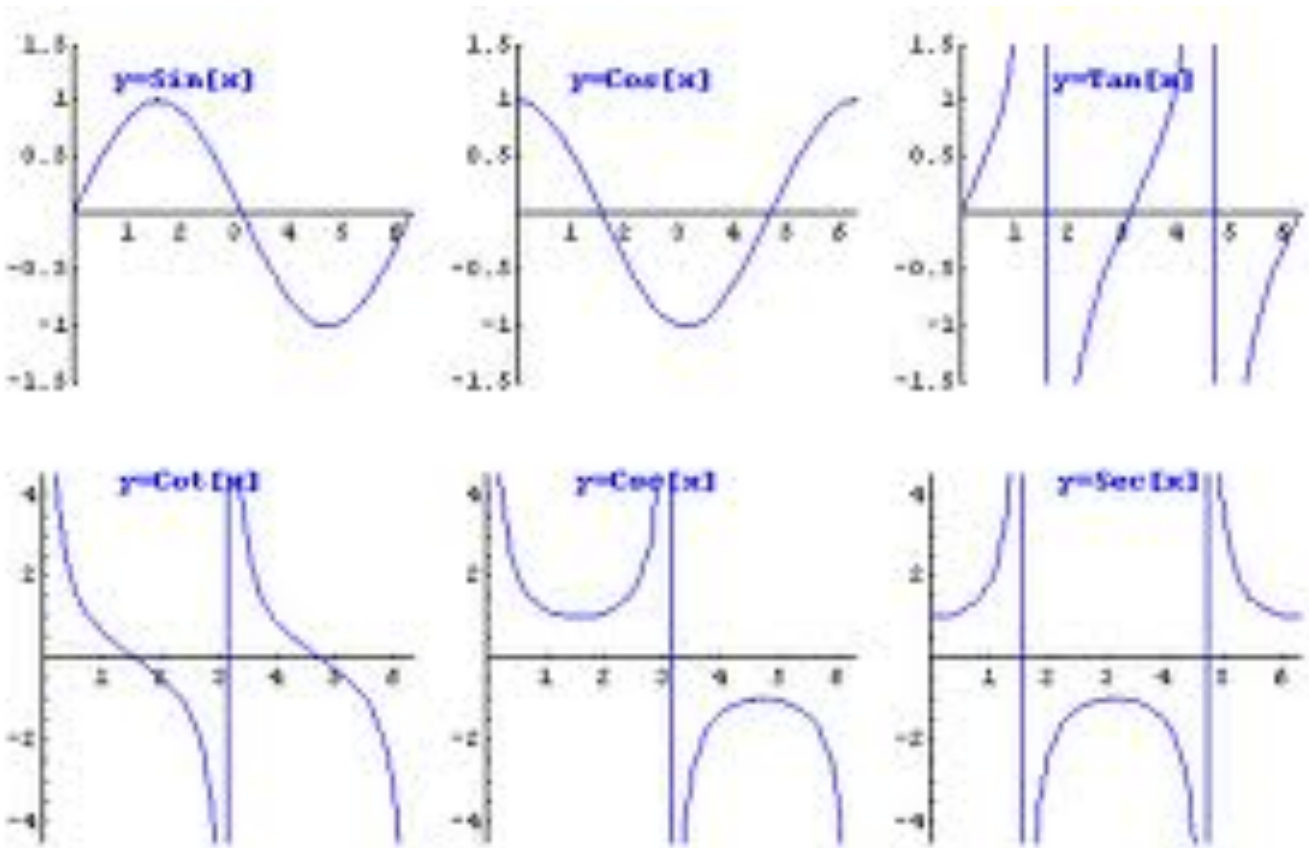
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$

הרחבת הפונקציות הטריגונומטריות לכל זוית תואמת את הקשרים שלעיל

ומקיימים: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $tg(-\alpha)=-tg\alpha$

התיאור הגראפי של הפונקציות:



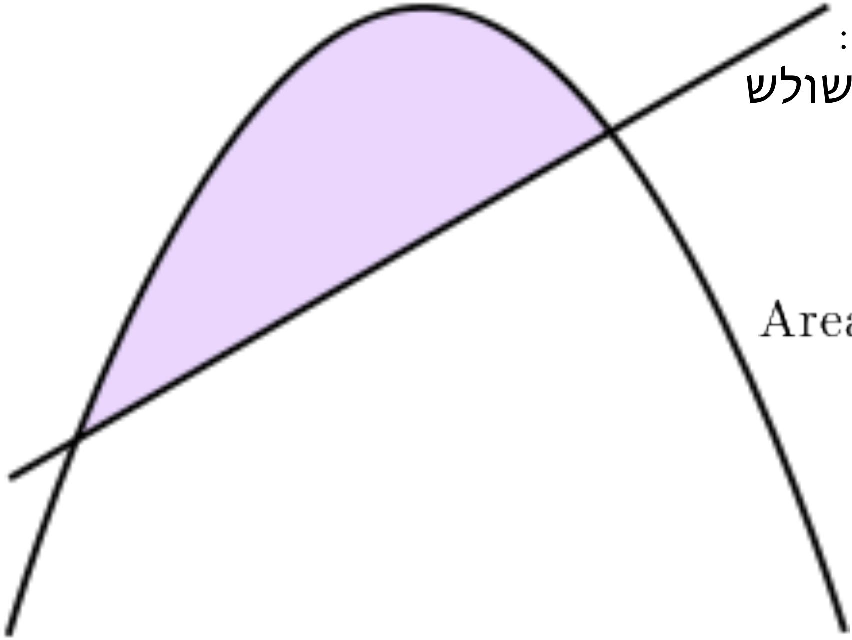
משפט הסינוסים לכל משולש, צלעות a,b,c ומולן בהתאמה זויות α,ß,γ

$a/\sin\alpha=b/\sin\beta=c/\sin\gamma$

משפט הקוסינוסים: (מעין הרחבה למשפט פיטגורס)

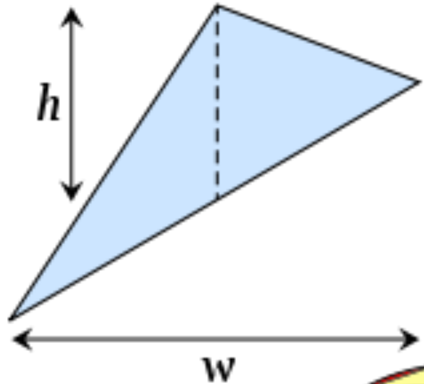
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

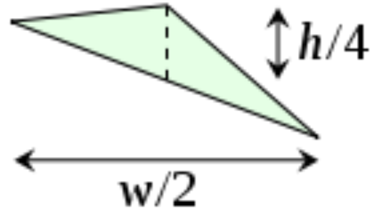
ארכימדס כותב משפט המנבא חשבון אינפיטסימאלי:
השטח בין פרבולה וקו (לילך) הוא פי 4/3 משטח המשולש (תכילת). הוכחה:

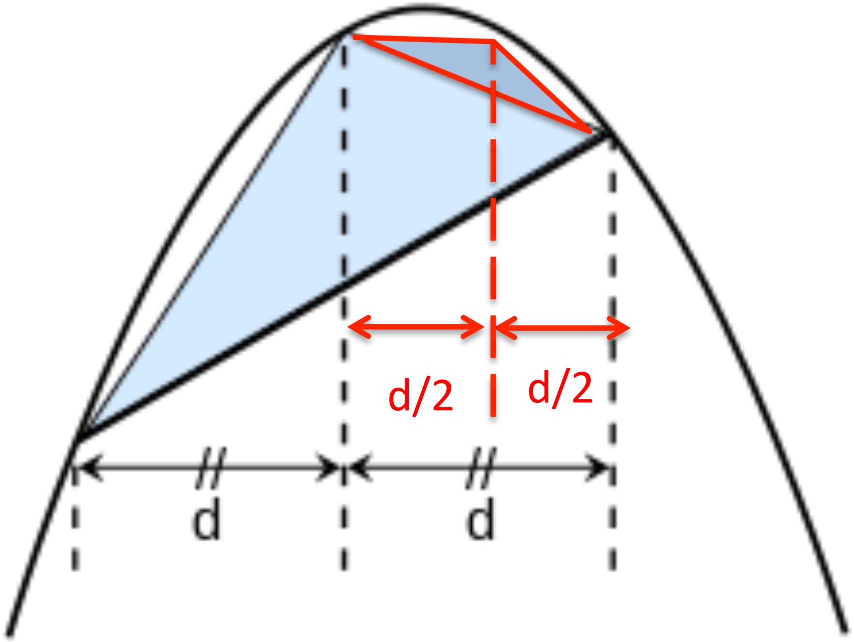


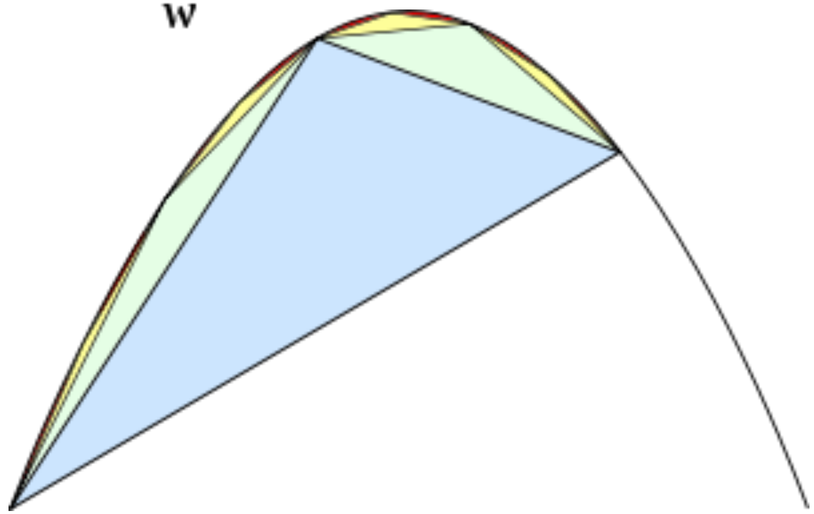
$$\text{Area} = T + 2\left(\frac{T}{8}\right) + 4\left(\frac{T}{8^2}\right) + 8\left(\frac{T}{8^3}\right) + \cdots .$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = 1 + 4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \cdots = \frac{4}{3} .$$









פילוסופים יוניים (שלא עסקו ישירות במדעי הטבע)

סקפטיסיזם **פירו** **Pyrrho of Elis (ca. 360-270 B.C.)** - Skepticism

נהנתנות **אפיקורוס** **Epicurus (342-270 BC)** - pleasures of life

סטויכיזם **זנו** **Zeno of Citium (336-264 BC)** - Stoicism

דיוגנס ציניות **Diogenes of Synope (c. 412-323 BC)** - cynisism

בן דורם של אפלטון ואריסטו, ותלמידו של אנתיסטנס. ציניות אינה מה שאנו קוראים היום ציניות. הטיף ליושר פנימי/אישי במקום אובדן היושר הציבורי ביוון.

שוטט ברחובות אתונה עם מנורה ביום בחיפוש אחרי אדם ישר.

עבר לגור בחבית וזרק את החפץ האחרון שלו - כוס, אחרי שראה איכר השותה מים בידיו.

כשאלכסנדר הגדול בא אליו ושאל מה יוכל לעשות בשבילו ענה " אנא זוז מהשמש המאירה עלי"

היסטוריונים יוונים

פוליביוס עבר ממקדוניה לרומא **(ca. 200–118 BC) Polybius**

פלוטרכוס (46 – 120 AD) – Plutarch

ציצרו – או קיקרו (106–43 BC) (Marcus Tullius Cicero) Cicero

וירגיליוס ...Roman Homer **(70-19 BC)**[or Virgil, Publius Vergilius Maro]**Vergil**

יהודי **פילון האלכסנדרוני (c. 15 BC to 40 AD) Philo**

Diogenes Laertius (3rd cent. AD)