

העולם העתיק והקלאסי

לפה"ס ועד המאה ה-5

אלגברה

נאסף ונערך בעברית ע"י פרופ' צבי קם

למרות שאלגברה, כמו שאנו מכירים אותה, התגבשה רק בימי הביניים ע"י הערבים, החשיבה האלגברית כבר נמצאת אצל הבבלים לפני 3500 שנים.

למשל בנוסחאות לחישוב שטחים מלבניים ומשולשים:

שטח מלבן = אורך \times רוחב

שטח משולש = חצי (בסיס \times גובה)

וכן בהגדרת כפל מספרים באמצעות טבלאות ריבועים:

מה היתרון? מה הנוסחא?

מול טבלא של N^2 מספרים צריך רק טבלת N ריבועים

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

נזכור: המספרים הומצאו כביטוי מכליל לכמה חפצים לנו. האלגברה הומצאה כביטוי מכליל למספרים. ביטוי אלגברי – הצגה כללית לקשר כמותי בין מספרים. ערך בטוי אלגברי מתקבל בהצבת ערכי המשתנים. פתרון משוואה אלגברית – נותן פתרון מספרי לכל ערך של המשתנים במשוואה. פונקציות – הן הרחבה נוספת: ערך הביטוי האלגברי עבור תחום ערכים של המשתנים.

מה הערך המוסף של הצגה אלגברית על אריתמטיקה?

הכללה – נוסחא לחישוב שטח שדה מרובע שאורכו a ורחבו b $A=a*b$
 פתרון נעלמים בשוויונות – אם יש ברשותי מגרש של 1.5 דונאם ואורכו 50 מטרת מה רוחבו?
 מהנוסחא לשטח, נמיר דונאם למ"ר ואז:
 $50=1000*1.5*b$
 $b=1.5*1000/50$
 האלגברה מספקת חוקים לחילוץ נעלמים:
 האלגברה מאפשרת להגדיר פונקציות: תלות מוגדרת בין משתנים $y=x^2$

הגדרת פונקציה (העתקה): התאמה, המשייכת לכל איבר בקבוצה אחת איבר בקבוצה שנייה. למשל לקבוצות המספרים הרציונאליים.
 פונקציה חד-חד ערכית – לכל איבר בקבוצה אחת איבר יחיד בקבוצה שנייה ולהפך – לכן אם $x=y$ גם $f(x)=f(y)$ ולכן פונקציה חד-חד ערכית היא הפיכה (סימון: $f^{-1}(x)$).
 פונקציה רציפה – בלי קפיצות. למשל $f=1/x$ אינה רציפה ב- $x=0$.

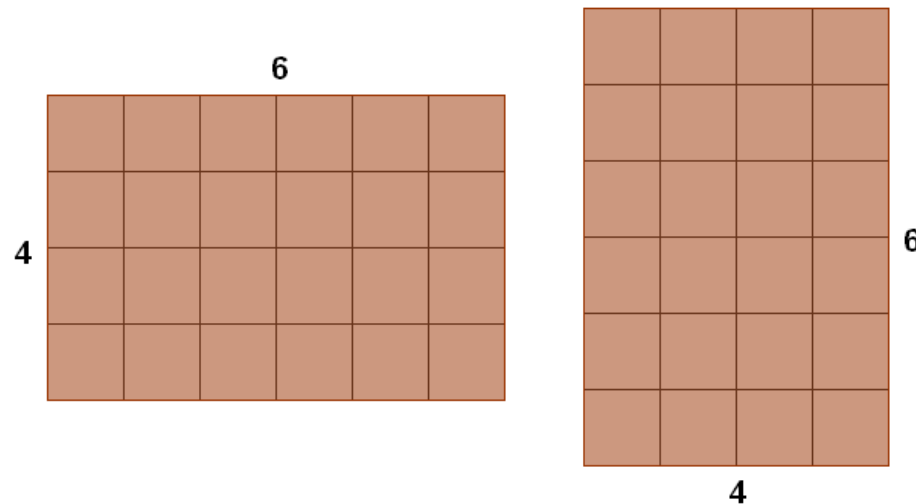
ערכו של ביטוי אלגברי עבור משתנה נתון (הצבה) דורש חוקי סדר:
מה ערכו של הביטוי: $3+2*5$?

סדר הפעולות סוגריים מעריכים מכפילים ומחלקים מחברים ומחסרים
חוקי פישוט ביטויים אלגבריים קומוטטיביות, דיסטריבוטיביות, אסוציאטיביות

הסבר גיאומטרי לקומוטטיביות בחיבור



ולקומוטטיביות בכפל



אסוציאטיביות

$$a*(b*c) = (a*b)*c \quad (a+b)+c = a+(b+c)$$

דיסטריבוטיביות של כפל על חיבור / חיסור

$$a(b+c) = ab + ac$$

פתרון משוואות אלגבריות - ע"י חיבור וחיסור, כפל וחילוק, חזקות ושרשים.
חילוץ הנעלם ע"י פעולות שוות לשני האגפים של משוואה:

		$a=c-b$	אז	$a+b=c$	אם
		$a=c/b$	אז	$a*b=c$	אם
$a=\sqrt{c}$	או	$a=c^{1/2}$	אז	$a^2=c$	אם

אם אומר שאני גדול מאחותי בשלש שנים
בוודאי תוכלו להגיד לי מה גילי אם אגיד לכם בת כמה אחותי
האלגברה מבטאת את הקשר בין הגילים בעזרת סמלים (או משתנים) המסומנים באותיות
גיל אחותי x
גילי y
ולכן: $y = x + 3$
אם עכשיו אגיד לכם מה גילי, האם תוכלו להגיד לי מה גיל אחותי?
באלגברה אנו קוראים לתהליך "חילוץ" משתנה ופתרון משוואה:
 $x = y - 3$

בואו נבדוק שאלה אחרת כביכול פשוטה אך מכשילה:
קניתי מטקה וכדור ב-33 ש"ח. המטקה עולה 30 ש"ח יותר מהכדור
מה מחיר הכדור?

ראה בשקף הבא

בואו נבדוק שאלה אחרת כביכול פשוטה אך מכשילה:
קניתי מטקה וכדור ב-33 ש"ח. המטקה עולה 30 ש"ח יותר מהכדור
מה מחיר הכדור?

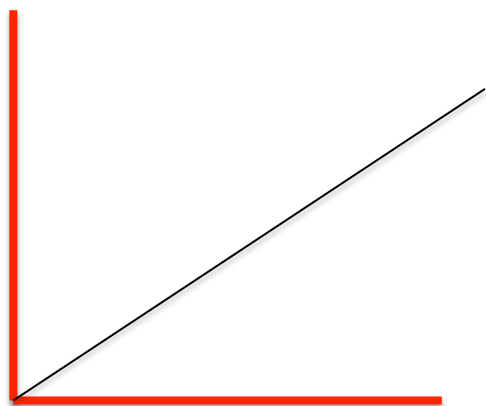
כדור = x מטקה = $x+30$ ולכן $2x+30=33$ או: $x=1.5$
קצת סדר אלגברי עזר לנו להמנע מתשובה לשאלה מטעה...

יחסיות: חוק המשולש
בהרבה מיקרים בחיי יומיום שני משתנים יחסיים זה לזה. לדוגמא: המשקל והמחיר של גבינה.

התיאור הגראפי: קו העובר בראשית.

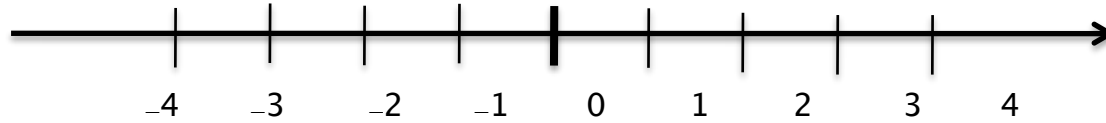
לפתרון שאלה מסוג: אם 100 גרם גבינה עולה 5 ש"ח כמה עולה 250 גרם?
אפשר להשתמש בחוק המשולש: מכפילים אלכסון ומחלקים במספר שממול לנעלם:

$$\begin{array}{cc} 100 & 5 \\ 250 & ? \end{array}$$

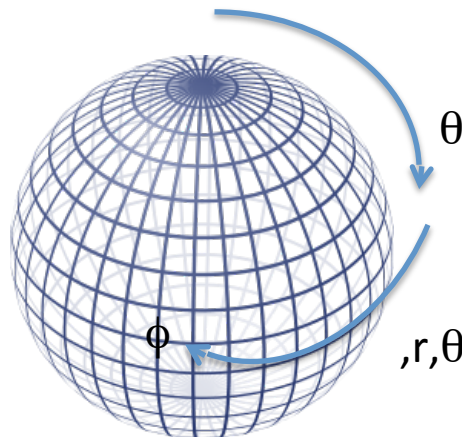
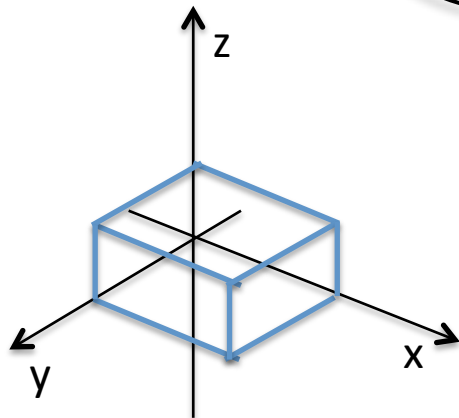
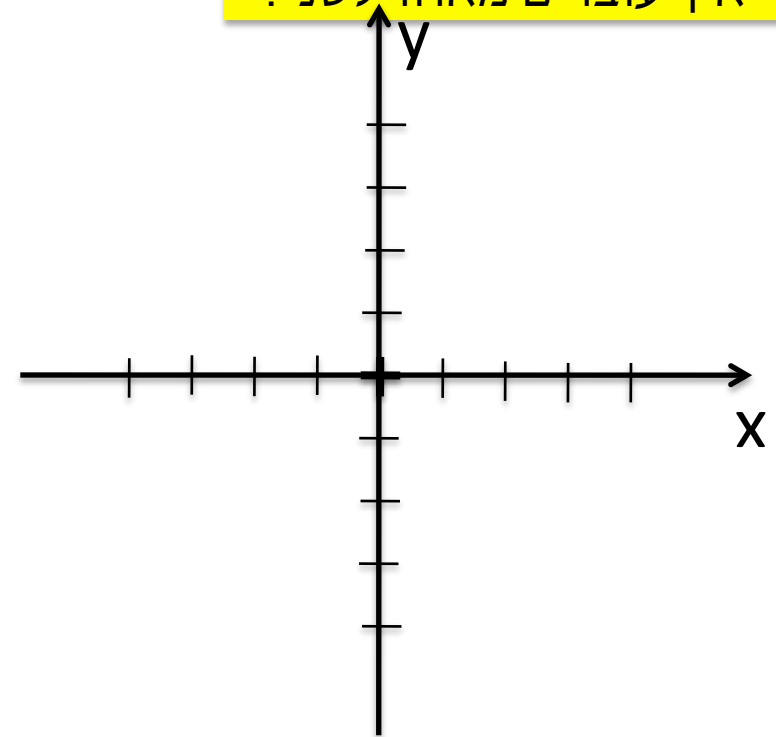
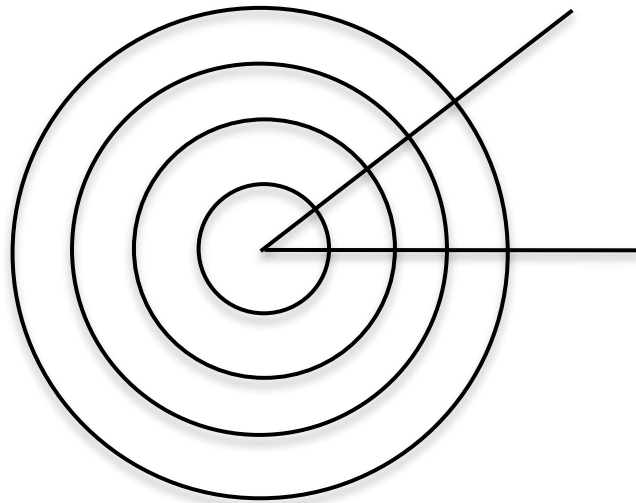


הקשר בין אלגברה לתיאור הגראפי

מערכת קוורדינטות – חד ממדית: הראשית, הסקלה .

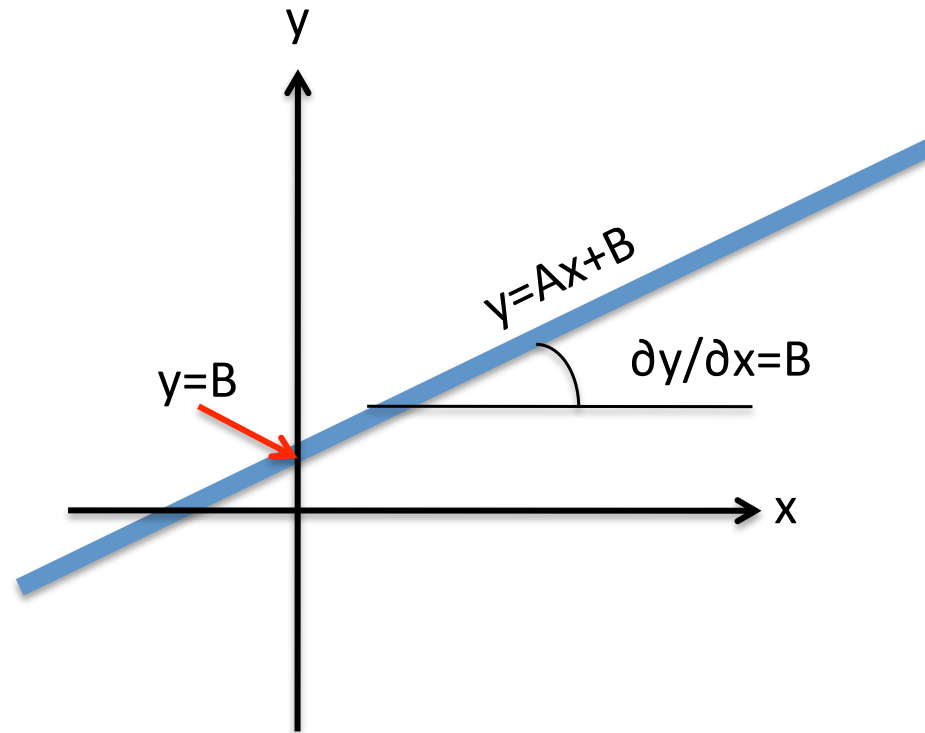


דו ממדית קרטזית: x, y , פולארית r, θ
איך עוברים מאחד לשני?



תלת ממדית קרטזית: x, y, z , כדורית (ספרית) r, θ, ϕ

משוואה ליניארית – משואת הקו במישור $y = Ax + B$ או $ax + by + c = 0$ מה הקשר בין a, b, c לבין A, B ? האם צריך שני או שלושה פרמטרים לתיאור קו?



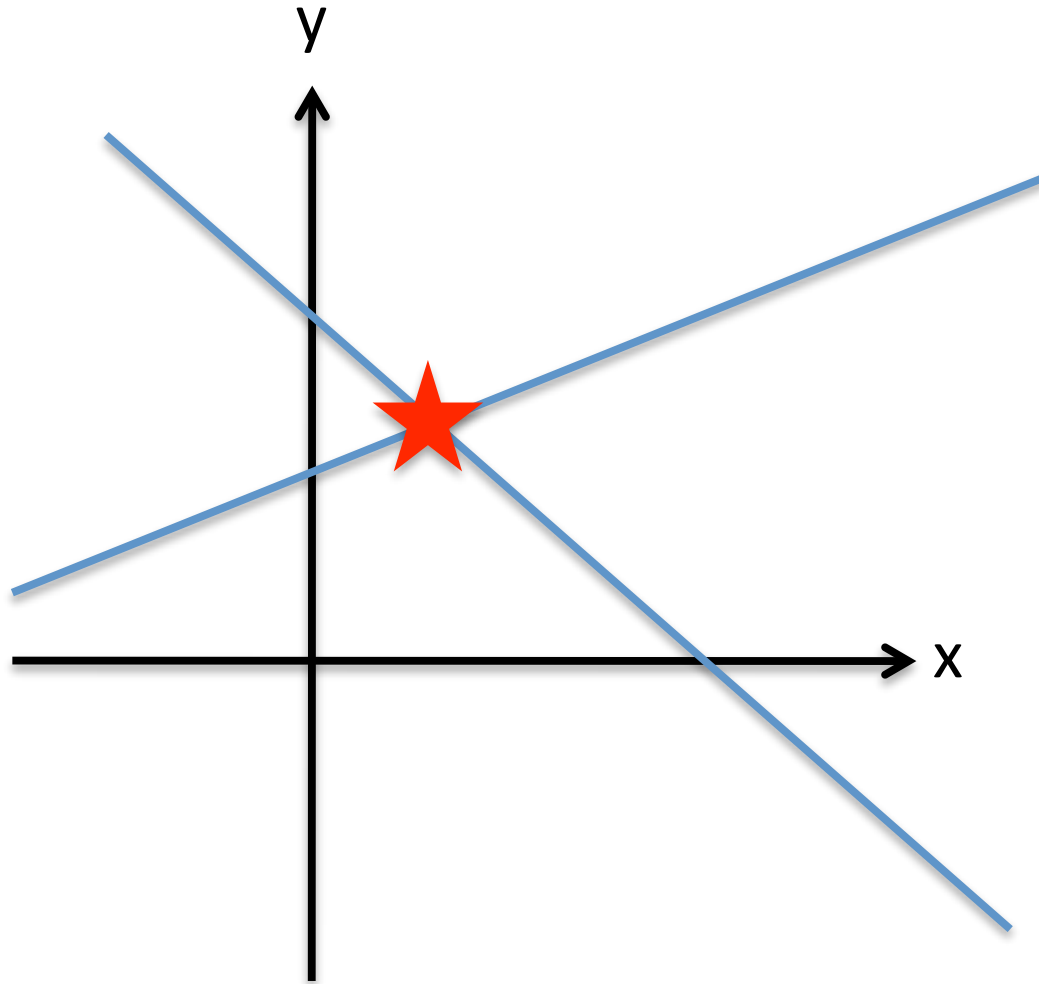
השפוע ונקודת החיתוך עם ציר y קובעת קו. אבל מה יקרה לקו המקביל לציר y ? (אין נקודת חיתוך, או נקודות חיתוך באינסוף) לכן משתמשים "בצורה הקנונית" בה הפרמטרים a, b, c מוגדרים עד כדי מכפיל.

ציור הקו: מחישוב שתי נקודות $y_1 = Ax_1 + B$ $y_2 = Ax_2 + B$

פתרון שתי משוואות ליניאריות באופן גראפי:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$



דרך ראשונה – חילוץ y מהמשוואה הראשונה, הצבתו למשוואה השנייה ופתרון x מתוכה

$$y = -(c_1 + a_1 x) / b_1$$

$$a_2 x - (c_1 + a_1 x)(b_2 / b_1) + c_2 = 0$$

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2) x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$x = (c_1 b_2 - c_2 b_1) / (a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

האם אתם רואים סדר בבלגן? נכתוב באופן סימבולי ע"י דטרמיננטות

$$x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

וכך גם עבור y

$$y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

היופי הוא שבעזרת דטרמיננטות ניתן להכליל לפתרון של n משוואות ליניאריות עם n נעלמים. הכתיבה המסודרת הביאה לפיתוח תורת המטריצות והאלגברה הוקטורית שבלעדיהן לא ניתן היה לפתח את הפיסיקה ומשוואות התנועה של חלקיקים וגלים. כמו שבאלגברה אנו משתמשים במשתנים x, y שמתארים כל מספר רציונאלי, באלגברה וקטורית המשתנים הם קבוצות של מספרים (x, y, z) שמתארים למשל נקודה במרחב.

פתרון סט משוואות ליניאריות ב-n נעלמים - דטרמיננטות:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i &= e_i x = e_i \frac{\text{adj } A}{|A|} c \\ &= \frac{(A_{1i} A_{2i} \dots A_{ni}) c}{|A|} \\ &= \frac{(c_1 A_{1i} + c_2 A_{2i} + \dots + c_n A_{ni})}{|A|} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1, i-1} & c_1 & a_{1, i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2, i-1} & c_2 & a_{2, i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n, i-1} & c_n & a_{n, i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

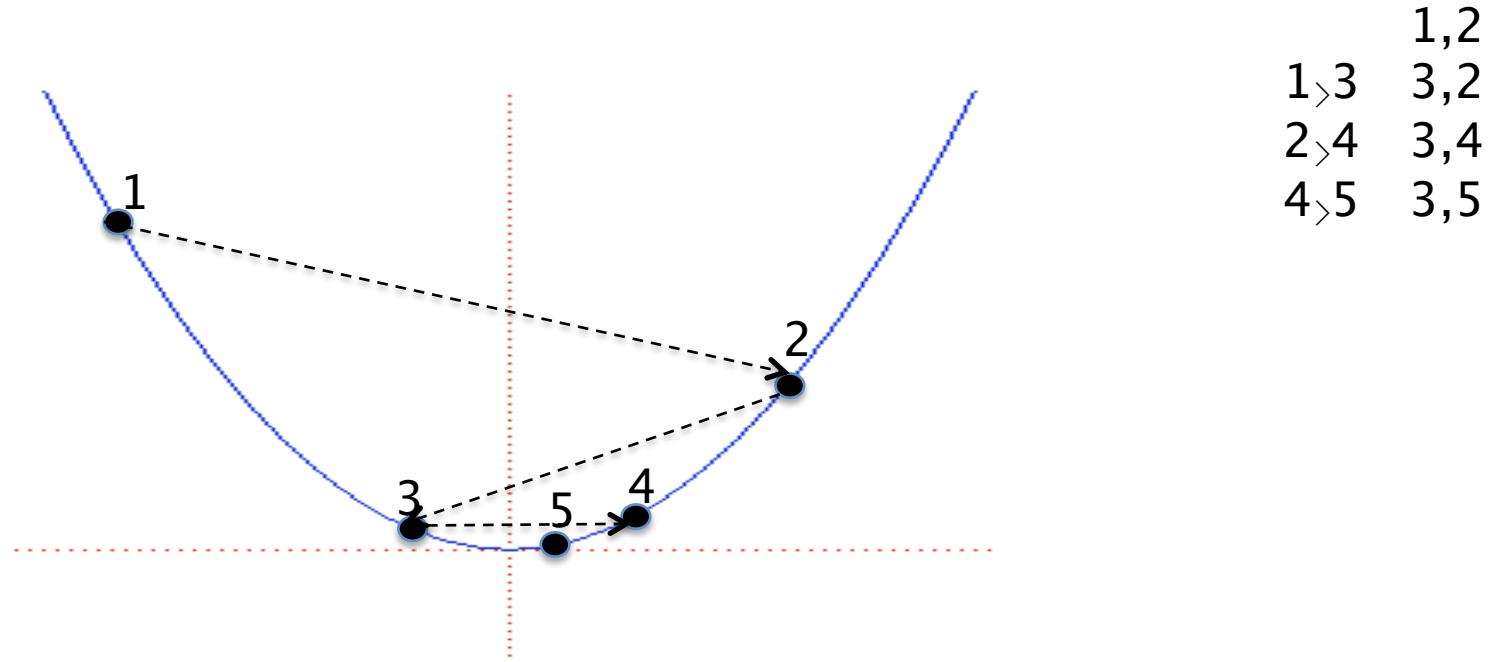
$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i, \sigma_i}.$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}.$$

מינימום לפונקציה

(פונקציה נותנת ערך מחושב לכל ערך משתנה נתון)
חיפוש מינימום לפונקציה מונוטונית- תפוס אריה במדבר: אם מחפשים מינימום בתחום מוגדר: בודקים בשתי נקודות קצה לתחום ומצמצמים את התחום לצד הנקודה הנמוכה:



למה צריך שיטות לחיפוש מינימום (או מקסימום)?

המבנה החזק ביותר עם מינימום בטון וברזל
המערכת האופטית החדה ביותר משילוב של עדשות
תיק השקעות לפי משתנים של איפיון מניות ואגרות חוב
תכנון מכונית או מטוס עם חיכוך אויר מינימאלי
התאמה בין שתי תמונות (זיהוי פנים, טביעת אצבעות)

חיפוש אריה במדבר Simplex

ניתן להרחיב לכל מימד n

n -ממדים ניצור צלעון עם $n+1$ קדקדים X_i

1. נסדרם בסדר עולה של הפונקציה

2. מרכז הכובד של n הקדקדים הראשונים X_0

3. נקודת רפלקציה לקדקד $n+1$: $x_r = x_0 + \alpha(x_0 - x_{n+1})$

4. אם $f(x_1) \leq f(x_r) < f(x_n)$ החלף X_{n+1} ב- X_r וחזור ל-1

אם $f(x_r) < f(x_1)$, חשב נקודת הרחבה $x_e = x_0 + \gamma(x_0 - x_{n+1})$

אם $f(x_e) < f(x_r)$ החלף X_{n+1} ב- X_e וחזור ל-1

אחרת החלף X_{n+1} ב- X_r וחזור ל-1

אחרת המשך

5. עתה $f(x_r) \geq f(x_n)$ חשב נקודת כוץ $x_c = x_0 + \rho(x_0 - x_{n+1})$

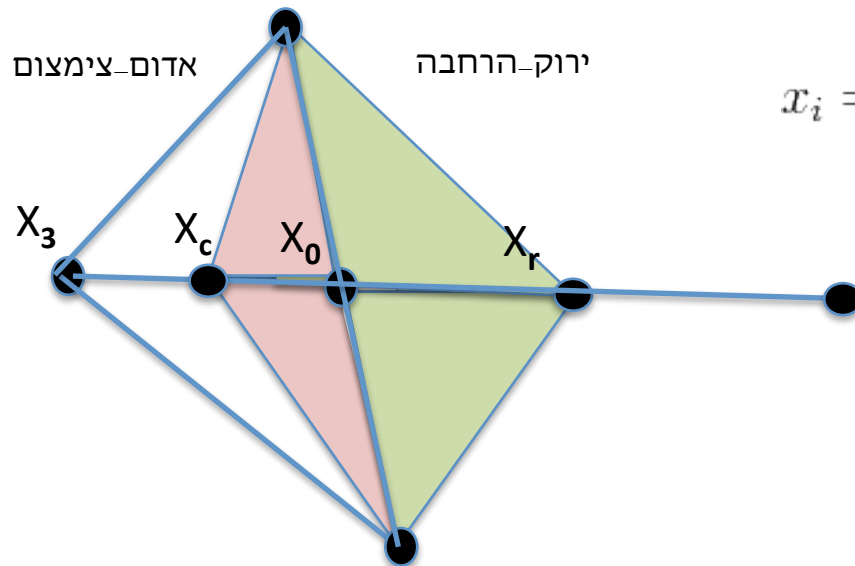
אם $f(x_c) < f(x_{n+1})$ החלף X_{n+1} ב- X_c וחזור ל-1

אחרת המשך

6. החלף כל קדקדים מלבד הראשון

$x_i = x_1 + \sigma(x_i - x_1)$ for all $i \in \{2, \dots, n+1\}$

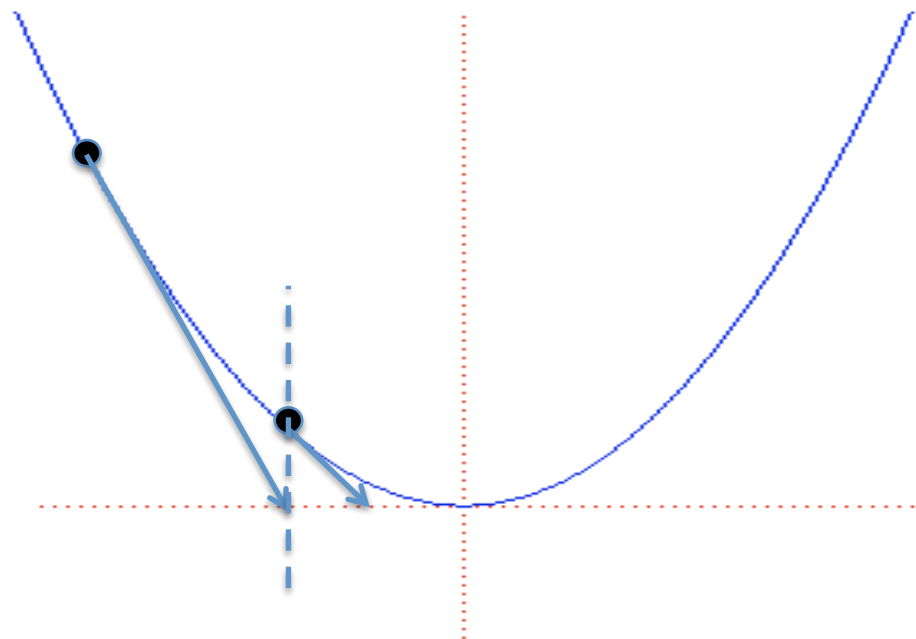
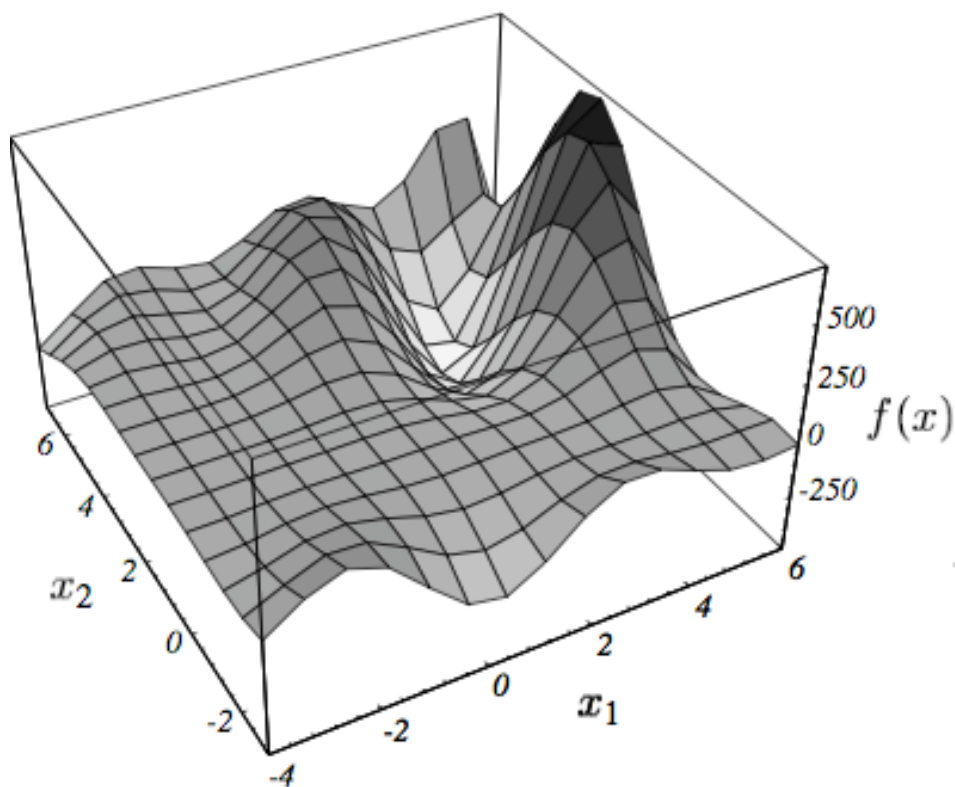
וחזור ל-1



האם תוכלו לתכנת את האלגוריתם?

מציאת מינימום על ידי שיפוע (Newton-Rapson steepest descent)

גודל הצעד: אקסטרפולציה ליניארית: השיטה המהירה ביותר לפונקציות חלקות



מגרעות: השיפוע מנגזרת רגיש לדיוק החישוב
נתקע במינימום מקומיים
לא טוב ליד המינימום - שפוע < 0 זורק
לאינסוף
לא מגיע למינימום הגלובאלי
פתרון - שילוב דגימת התחום עם אופטימיזציה
מקומית.

נביא להלן שני ספרי מתמטיקה – יווני וסיני – שהקדימו את ה"אלגברה" במאות שנים, אך השתמשו בכל הכלים שלה – משוואות עם נעלמים שנפתרות ע"י חילוצם, משוואות ריבועיות ומסדר גבוה יותר, וכו

דיאופנטוס 200-284 לפה"ס Diophantus – "אריתמטיקה"

<http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/Greek/diophant.pdf>



דיאופנטוס נחשב לאבי האלגברה, לא נקראה בשם זה עד ימי הביניים ע"י אלקראזי (al Karaji 1030-980) ותורת המספרים, שהוותה השראה לפרמה Pierre de Fermat 1601-1665, והמתמטיקאים אחריו. משוואות דיאופנטיות הן משוואות עם פתרונות של מספרים חיוביים ושלמים. הביטוי האלגברי של דיאופנטוס לא היה כמו שלנו היום: למשל במקום הביטוי $(12+6n)/(n^2-3)$ הוא כותב: שש פעמים המספר מוגדל ב-12 אשר מחולק בהפרש שבו ריבועו עולה על 3.

תכן 13 הכרכים של "אריתמטיקה" של דיאופנטוס

כרך I

בעיות פשוטות להצגת מחשבה אלגברית. מספר נחשב רק חיובי ורציונאלי. לבעיות לעיתים כמה פתרונות, והמשוואות עד דרגה שניה בנעלם.

כרכים II ו-III

הצגת ריבוע כסכום שני ריבועים רציונאליים, הצגת מספר שאינו ריבוע כסכום ריבועים, לא תמיד יש פתרון, וכהפרש ריבועים. פתרונות רק למספרים שאין להם גורם $4n + 3$ המועלה בכל חזקה איזוגית - לרוב דיאופנטוס מסתפק בפתרון אחד, אך מזכיר מיקרים עם אינסוף פתרונות.

כרכים IV עד-VII

הרחבה לבעיות מדרגה שניה.

כרכים VII עד-IX

בעיות קשות יותר כגון הצגת מספר כסכום שני ריבועים קרובים קרבה שרירותית, או סכום שלשה ריבועים. מטפל במספרים מהצורה $8n + 7$

כרך X

משולשים ישרי זווית עם ניצבים רציונאליים.

כרכים XA עד-XIII

אבדו, אך מההקדמה מטפלים במשוואות מדרגה שלישית.

דוגמא לבעיה דיאופנטית הכתובת על קיברו:

'Here lies Diophantus,' the wonder behold. Through art algebraic, the stone tells how old:
'God gave him his boyhood one-sixth of his life, One twelfth more as youth while whiskers
grew rife; And then yet one-seventh ere marriage begun; In five years there came a bouncing
new son. Alas, the dear child of master and sage After attaining half the measure of his
father's life chill fate took him. After consoling his fate by the science of numbers for four
years, he ended his life.'

פה נח דיאופנטוס. נערותו נמשכה $1/6$ מחייו. הוא התחתן אחרי עוד $1/7$ זקנו צימח אחרי
עוד $1/12$ ובנו נולד 5 שנים אח"כ. הבן חי מחצית מחיי אביו, והאב נפטר 4 שנים אחרי בנו.
בן כמה היה דיאופנטוס במותו?

פתרון:

פה נח דיאופנטוס. נערותו נמשכה $1/6$ מחייו. הוא התחתן אחרי עוד $1/7$ זקנו צימח אחרי עוד $1/12$ ובנו נולד 5 שנים אח"כ. הבן חי מחצית מחיי אביו, והאב נפטר 5 שנים אחרי בנו.

נניח שדיאופנטוס חי x שנים, ולכן בנו חי $x/2$ שנים
האב נפטר 4 שנים אחרי בנו, והבן נולד כשהאב בן $5 + x/12 + x/7 + x/6$
לכן $x/2 + 4 + 5 + x/12 + x/7 + x/6 = x$
 $x = x - x(14 + 12 + 7 + 42)/84 = 9/84 x$
 $x = 84$

נראה בשקפים הבאים דוגמאות של בעיות של דיאופנטוס שפתרוןן דורש סריקה של אפשרויות
הם מדגימות איך מתמטיקאי מבלה את זמנו במשחקים

דיאופנטוס החשיב פתרונות שליליים כ"אפסורד" ולכן למשוואה $4=4x+20$ הכריז שאין פיתרון. היום נאמר שהפיתרון הוא $x=-4$ מסיבה זו לא גילה שלמשואה ריבועית שני פתרונות. הוא מיין שלשה סוגי משוואות ריבועיות:

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 = bx + c$$

$$ax^2 + c = bx$$

בעיה 1: שתי המשוואות עם שני הנעלמים $y+z=10$ $yz=9$

דיאופנטוס העביר למשוואה ריבועית ב x נציב $y-z=2x$

בחיבור $y+z$ עם $y-z$ נקבל $2y=10+2x$ או $y=5+x$

בחסור נקבל $2z=10-2x$ או $z=5-x$

נציב ב- $xy=9$ ונקבל $(5+x)(5-x)=25-x^2=9$ ולכן $x^2=25-9=16$

או $x=4$ ולכן $z=1$ $y=9$

בעיה 2: מצא x כזה שגם- $10x+9$ וגם- $5x+4$ הם ריבועים

פתרון- $x=28$

בעיה 3: מצא x כזה ש- $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ הוא ריבוע

הוא חזקה שלישית $4x+2$

הוא ריבוע $2x+1$

פתרון - $x=3/2$

בעיה 4: מצא שבר שהוא ריבוע שלם בין $5/4$ ו-2

פתרון: $25/16$ (גדול מ- $5/4 = 20/16$)

בעיה 5: מצא 2 שברים שכ"א מריבועיהם < 6 ושסכומם 13

פתרון: $66564/10201 = (258/101)^2$ $66049/10201 = (257/101)^2$

בעיה 6: מצא 3 שברים שכ"א מריבועיהם < 3 ושסכומם 10

פתרון: $(1321/711) = 1745041/505521$

$(1285/711) = 1651225/505521$

$(1288/711) = 1658944/505521$

בעיה 7: מצא 2 מספרים שסכומם 20 וסכום ריבועיהם 208

פתרון: נכתוב את שני המספרים כ- $(10+x)$ $(10-x)$

ולכן $(10+x)^2 + (10-x)^2 = 208$

או $2x^2 + 200 = 208$ לכן $2x^2 = 8$ ולכן $x = 2$

המספרים הם 8,12

יש פתרון נוסף $x = -2$ שבמקרה גם הוא נותן 8,12 כפתרון, אך כאמור דיאופנטוס התעלם

ממנו.

בעיה 8: כמה פתרונות (שלמים חיוביים) יש למשוואה $1/x + 1/y = 1/n$

למשל $n=4$ $1/5 + 1/20 = 1/6 + 1/12 = 1/8 + 1/8 = 1/4$

הנחות בתורת המספרים שדיאופנטוס לא הוכיח, והעסיקו את פרמה ומתמטיקאים אחריו :

לא ניתן לכתוב מספר מהצורה $4n+3$ או $4n-1$ כסכום ריבועים
לא ניתן לכתוב מספר מהצורה $24n+7$ כסכום 3 ריבועים
כל מספר ניתן להכתב כסכום 4 ריבועים

לכל זוג מספרים a, b קיימים c, d כך שייתקיים $a^3 - b^3 = c^3 + d^3$

אם p ראשוני אזי $(p-1)! + 1$ מתחלק ב- p

פרמה ניסה ולא הצליח להוכיח. הוכח ע"י לגראנז בהתבסס על משפטים של אוילר

האם תמיד ניתן למצוא פתרונות לכל n למשוואה $x^n + y^n = z^n$

בעיות

סכום שלשה שלמים איזוגיים עוקבים הוא 231, מה השלם הגדול?

סכום חמישה שלמים עוקבים הוא 200, מה השלם הקטן?

כמה ליטרים בנזין אוכל לקנות ב-100 ש"ח אם ליטר עולה 7.38 ש"ח?

סכום 100 מספרים הוא 3000, מה ממוצעם?

מדף באורך 12 מטר נחתך לשלשה מדפים שכ"א קצר בחצי מטר מקודמו. מה אורך המדפים?

ארבעה מבקרים מודדים מרחק שהרכבת עברה: א' 27.5 ק"מ בחצי שעה, ב' 55 ק"מ בשעה,

ג' 82.5 ק"מ בשעה וחצי, ד' 110 ק"מ בשעתיים. האם הרכבת נעה במהירות קבועה?

חנות א מוסיפה 30% למחיר אופנים ומוכרת בהנחת 30%. חנות ב מוסיפה ומורידה 25%. איפה

המחיר נמוך יותר?

ממדי ארגז חול $5 \times 8 \times 0.5$ מטר. כמה שקי חול של 100 ליטר ימלאו אותו?

קנייתי שמלה ב-80 ש"ח אחרי 20% הנחה. מה מחירה לפני הנחה?

3 ק"ג עגבניות עולים 9 ש"ח בהנחת 25%, מה מחיר 2 ק"ג בשבוע הבא לאחר שההנחה פגה?

בכיסוי 50 ש"ח. איזה מחיר שמלה לפני הנחת 25% אוכל לקנות?

בהנחת 20% חסכתי 30 ש"ח, מה המחיר לאחר ההנחה?

הפקדתי 1000 ש"ח בחשבון המשלם ריבית של 4% לשנה. כמה אצבור אחרי 4 שנים?

אני חוסך 250 ש"ח כל שנה ומפקיד בחשבון נושא ריבית 4%. כמה אצבור בתום 4 שנים?

יש לי ממוצע 84 ב-4 בחינות. איזה ציון אצטרך לקבל בבחינה החמישית שהממוצע יהיה 90?

פתרונות

סכום שלשה שלמים איזוגיים עוקבים הוא 231, מה השלם הגדול? $231/3+2=79$

סכום חמישה שלמים עוקבים הוא 200, מה השלם הקטן? $200/5-2=38$

כמה ליטרים בנזין אוכל לקנות ב-100 ש"ח אם ליטר עולה 7.38 ש"ח?

סכום 100 מספרים הוא 3000, מה ממוצעם?

מדף באורך 12 מטר נחתך לשלשה מדפים שכ"א קצר בחצי מטר מקודמו. מה אורך המדפים?

ארבעה מבקרים מודדים מרחק שהרכבת עברה: א' 27.5 ק"מ בחצי שעה, ב' 55 ק"מ בשעה,

ג' 82.5 ק"מ בשעה וחצי, ד' 110 ק"מ בשעתיים. האם הרכבת נעה במהירות קבועה?

חנות א מוסיפה 30% למחיר אופנים ומוכרת בהנחת 30%. חנות ב מוסיפה ומורידה 25%. איפה

המחיר נמוך יותר?

ממדי ארגז חול $5 \times 8 \times 0.5$ מטר. כמה שקי חול של 100 ליטר ימלאו אותו?

קנייתי שמלה ב-80 ש"ח אחרי 20% הנחה. מה מחירה לפני הנחה?

3 ק"ג עגבניות עולים 9 ש"ח בהנחת 25%, מה מחיר 2 ק"ג בשבוע הבא לאחר שההנחה פגה?

בכיסוי 50 ש"ח. איזה מחיר שמלה לפני הנחת 25% אוכל לקנות?

בהנחת 20% חסכתי 30 ש"ח, מה המחיר לאחר ההנחה?

הפקדתי 1000 ש"ח בחשבון המשלם ריבית של 4% לשנה. כמה אצבור אחרי 4 שנים?

אני חוסך 250 ש"ח כל שנה ומפקיד בחשבון נושא ריבית 4%. כמה אצבור בתום 4 שנים?

יש לי ממוצע 84 ב-4 בחינות. איזה ציון אצטרך לקבל בבחינה החמישית שהממוצע יהיה 90?

נוסחאות

שטח משולש = חצי המכפילה של בסיס * גובה

אחוז = שבר * 100 = חלק / השלם * 10

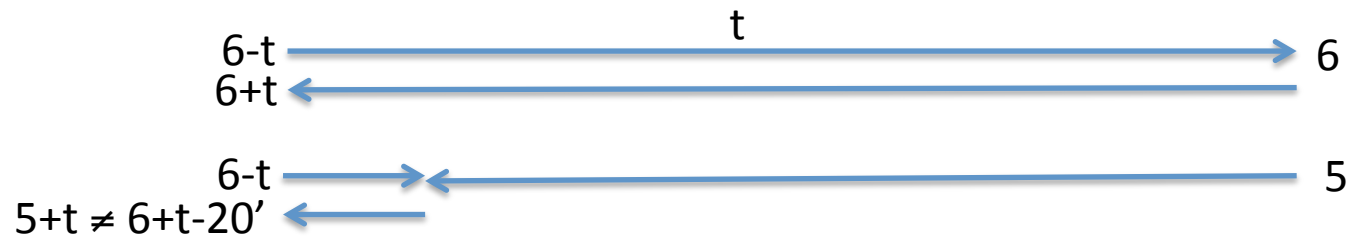
מרחקים

אני יוצא כל יום מהבית לתחנה לפגוש את אישתי ב-6. אך היא גמרה היום מוקדם והגיע ב-5.
היא צעדה הביתה, נפגשנו בדרך והגענו הביתה 20 דקות מוקדם מהרגיל. כמה זמן לוקח
ללכת מהבית לתחנה? (הנח שאישתי ואני הולכים במהירות זהה)

פתרון:

אני יוצא כל יום מהבית לתחנה לפגוש את אישתי ב-6. אך היא גמרה היום מוקדם והגיע ב-5. היא צעדה הביתה, נפגשנו בדרך והגענו הביתה 20 דקות מוקדם מהרגיל. כמה זמן לוקח ללכת מהבית לתחנה? (הנח שאישתי ואני הולכים במהירות זהה)

לא ייתכן: אם אשתי יצאה מהתחנה שעה מוקדם מהרגיל, גם היתה צריכה להגיע הביתה שעה מוקדם מהרגיל, ולא 20 דקות.



גילים

בעוד 4 שנים גיל אורי יהיה פי 3 מגילו היום. מה גילו היום?

רחל גדולה מאורי ב-4 שנים, לפני שנתיים היה גילה פי 5 גילו. מה גילו היום?

אהרון בן 50 ויונתן 15. עוד כמה שנים גיל אהרון יהיה כפול מיהונתן?

גיל אהרון פי 3 ממשה. לפני 20 שנים היה פי 8 ממשה. מה גיל אהרון היום?

כשאגיע לגיל אבי כעת אהיה מבוגר פי 5 מגיל בני כעת, ובני יהיה מבוגר ב-8 שנים מגילי כעת. סכום הגילים שלי ושל אבי 100. בן כמה בני?

סבא ונכדו חוגגים ימי הולדתם באותו יום. באחת המסיבות אומר הסב: זו השנה הששית ברציפות שגילי הוא כפולה שלמה של גילך. מה הגילים?

יש לי שלשה ילדים שמכפילת גיליהם 36. מה גיליהם? (מספרים שלמים)

לא אוכל לדעת

סכום גיליהם שווה למספר הבית שלי וננו עומדים

עדין חסר לי נתון

היום הוא יום הולדת של בני הבכור

פתרונות:

בעוד 4 שנים גיל אורי יהיה פי 3 מגילו היום. מה גילו היום?
רחל גדולה מאורי ב-4 שנים, לפני שנתיים היה גילה פי 5 גילו. מה גילו היום?
אהרון בן 50 ויונתן 15. עוד כמה שנים גיל אהרון יהיה כפול מיהונתן?
גיל אהרון פי 3 ממשה. לפני 20 שנים היה פי 8 ממהשה מה גיל אהרון היום?

$$x+4=3x \quad 5(x-2)=x+4-2 \quad 50+x=2(15+x) \quad x=3y \quad x-20=8(y-20) \rightarrow 3y-20=8y-160$$

כשאגיע לגיל אבי כעת אהיה מבוגר פי 5 מגיל בני כעת, ובני יהיה מבוגר ב-8 שנים מגילי כעת. סכום הגילים שלי ושל אבי 100. בן כמה בני?

גילי M, גיל אבי F, ובני S

$$F=5S \quad S+F-M=M+8 \quad F+M=100 \quad S=13$$

סבא ונכדו חוגגים ימי הולדתם באותו יום. באחת המסיבות אומר הסב: זו השנה הששית ברציפות שגילי הוא כפולה שלמה של גילך. מה הגילים?

הילד 6-1 הסב 61-66.

יש לי שלשה ילדים שמכפילת גיליהם 36. מה גיליהם? (מספרים שלמים)
לא אוכל לדעת

סכום גיליהם שווה למספר הבית שלי ונניח שיש לנו עומדים
עדין חסר לי נתון

היום הוא יום הולדת של בני הבכור

אה, מכל האפשרויות של פירוק 36 לשלשה גורמים יש שניים שסכומם שווה: $1+6+6=2+2+9$
הנתון שיש בכור מבודדת את 229

* גילי הוא כפליים ממכפלת שתי הספרות המרכיבות אותו. בת כמה אני?

* בכיסי 100 מטבעות של שקל, חצי שקל ו-10 אגורות. סה"כ 16 שקלים. מה בכיסי?

• פדיתי צק וקיבלתי בטעות שקלים כמספר האגורות, ואגורות כמספר השקלים. קניתי מסטיק ב-5 אגורות ונשאר לי סכום כפול מהרשום במקור בצק. מה הסכום?

• ההפרש בין ריבוע גילו של אחי הבכור לריבוע גילי 749. בן כמה אני?

פתרונות:

* גילי הוא כפליים ממכפלת שתי הספרות המרכיבות אותו. בת כמה אני?
שלם. לכן גילי 36 א נותן $y=6$ ורק $y > 5$ לפתרונות חיוביים $x = y / (2y - 10)$ $\rightarrow x + y = 2xy$
* בכיסי 100 מטבעות של שקל, חצי שקל ו-10 אגורות. סה"כ 16 שקלים.

$$x + y + z = 100 \quad 10x + 50y + 100z = 1600 \quad \Rightarrow \quad 4y + 9z = 60$$

לפתרונות חיוביים נותן פתרון של $x=90 \quad y=6 \quad z=4$ $z=1 \dots 6$

* פדיתי צק וקיבלתי בטעות שקלים כמספר האגורות, ואגורות כמספר השקלים. קניתי מסטיק ב-5 אגורות ונשאר לי סכום כפול מהרשום במקור בצק. מה הסכום.

אגורות b שקלים a

$$100a + b - 5 = 2(100b + a) \quad \Rightarrow \quad 100(a - 2b) = 2a - k + 5$$

$a = 2b + 1$ קטן מ-3 ורק 1 מסתדר. נציב $a - 2b$ ולכן $a, k < 100$

פתרון $a=63 \quad b=31$ לכן הסכום בצק 31.63 ש"ח

* ההפרש בין ריבוע גילו של אחי הבכור לריבוע גילי 749. בן כמה אני?

$$x^2 - y^2 = 749 \quad \text{לכן} \quad (x+y)(x-y) = 749$$

נפרק 749 לגורמין $7 * 107$ (לא נותן פתרון הגיוני) ולכן $x=57 \quad y=50$

• מהם שני המספרים שסכומם שווה למכפלתם

* מהם שלשת המספרים שסכומם שווה מכפלתם
הוכח שזה הפתרון היחיד למספרים שלמים:

פתרונות:

* מהם שני המספרים שסכומם שווה למכפלתם
 $2*2=2+2$

* מהם שלשת המספרים שסכומם שווה מכפלתם
 $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}*\sqrt{3}*\sqrt{3}$ וגם $1+2+3=3*2*1$
הוכח שזה הפתרון היחיד למספרים שלמים:
 $xyz=x+y+z$

אם שלשת המספרים שווים הפתרון אינו רציונאלי

$$x=y=z$$

$$x^3=3x \quad x=\sqrt{3}$$

אחרת מבלי לאבד כלליות

$$x \geq y \geq z$$

$$y=z=1 \quad \text{לא יתכן}$$

$$y \geq 2 \quad \text{לכן}$$

$$y > 2 \quad \text{אבל לא יתכן}$$

$$xyz \geq yz \geq 3z > x+y+z$$

$$3z \leq x+y+z \quad \text{אבל}$$

בעית הבקר של ארכימדס

ראשי הבקר היו מחולקים לארבעה עדרים בצבעים שונים : לבן , שחור , צהוב ומנומר . מספר השוורים גדול ממספר הפרות . בכל עדר מספר השוורים , בהתאם ליחסים הבאים : מספר הלבנים שווה לחצי ועוד שליש של השחורים והצהובים גם יחד , מספר השחורים השתווה לרבע ועוד חמישית מהמנומרים יחד עם הצהובים . מספר השוורים המנומרים שווה לשישית עוד שביעית מהלבנים יחד עם הצהובים .
ואלה היו היחסים בין הפרות : מספר הלבנות שווה בדיוק לשליש ועוד רבע מכל העדר השחור , מספר הפרות השחורות היה שווה לרבע ועוד חמישית מכלל עדר השוורים והפרות המנומרים , המנומרות השתוו לשישית ועוד שביעית של העדר הצהוב . והצהובים היו שווים במספרם לשישית ועוד שביעית של עדר הלבנים .

הבעיה ממשיכה : כשהשוורים הלבנים התערבבו בשחורים הם עמדו איתנים ושווים בעומק וברוחב והשדות הנרחבים של סיציליה המשתרעים למלוא העין , היו מלאים בהמוניהם . ועוד , כשהשוורים הצהובים והמנומרים התלכדו לעדר אחד , הם ניצבו בצורה כזו שמספרם החל מאחד גדל באיטיות עד שהשלימו צורה משולשת ללא שום שוורים בצבעים אחרים בתוכם ואף אחד מהם לא היה חסר .
בשפת המתמטיקה של היום : מספר השוורים השחורים והלבנים , יחד , הוא ריבועי ; ומספר הנקודים והחומים הוא חזקה שלישית

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

$$D = 4729494 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353$$

בעית הבקר של ארכימדס - הפתרון

7 משוואות עם 8 נעלמים. הפתרון הקטן ביותר (סה"כ העדר 50,389,082) ושאר הפתרונות - מכפילים שלמים של הפתרון הקטן.

$$W = \frac{5}{6}B + Y$$

$$B = 7,460,514 * k = 4657 * 1602 * k$$

$$B = \frac{9}{20}D + Y$$

$$W = 10,366,482 * k = 4657 * 2226 * k$$

$$D = \frac{13}{42}W + Y$$

$$D = 7,358,060 * k = 4657 * 1580 * k$$

$$Y = 4,149,387 * k = 4657 * 891 * k$$

$$w = \frac{7}{12}(B + b)$$

$$b = 4,893,246 * k$$

$$w = 7,206,360 * k$$

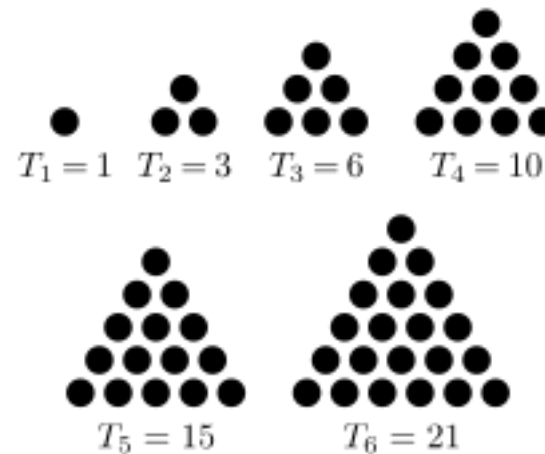
$$b = \frac{9}{20}(D + d)$$

$$d = 3,515,820 * k$$

$$d = \frac{11}{30}(Y + y)$$

$$y = 5,439,213 * k$$

$$y = \frac{13}{42}(W + w)$$



התנאים הנוספים: $B + W = 7,460,514k + 10,366,482k = (2^2)(3)(11)(29)(4657)k$ צריך להיות ריבוע, או $k = (3)(11)(29)(4657)q^2$ עבור כל שלם q

התנאי השני: $D+Y=t(t+1)/2$ פתרון ל- t והצבת D, Y נותנת: $1 = (4)(609)(7766)(4657^2)q^2$ זו משוואת פל, $D = 4729494 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 = 7766 * 609$ כאשר $x=p$ $y=q * 2 * 4657$

והפתרון הוא הנ"ל כפול n עבור כל n שלם

$$w^2 = u + v\sqrt{(609)(7766)} \quad n = \frac{(w^{4658j} - w^{-4658j})^2}{(4657)(79072)}$$

$$w = 300426607914281713365\sqrt{609} + 84129507677858393258\sqrt{7766}$$

בעיות סיניות

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Chinese_problems.html

מובאות מתוך תשעת הכרכים הסיניים הנ"ל.
הפתרונות מצורפים.



9 פירקי "אמנות המתמטיקה" מאת מחבר סיני לא ידוע

כנראה מסכם מאות שנות ידע, אך נכתב בערך בזמנו של אוקלידס

מענין לראות את הדימיון בפיתוח המתמטיקה, בתגובה לבעיות יומיום דומות, ואת הענין בהרחבת הידע שלא תמיד לצורך מעשי. יש הבדל בולט אחד שהיונים הדגישו בכתביהם את התהליך הלוגי של ההוכחה, אך הסינים רק מצטטים משפטים לשימוש מעשי בלי הוכחות (למרות שאולי ידעו בעצמם להוכיח).

פרק 1: מדידות קרקע

בעיות שטחים (מלבנו, משולש, טרפז, מעגל וערך π), חיבור חיסור כפל וחילוק שברים, המחלק המשותף הגדול ביותר לשני מספרים.

פרק 2: מסחר בארז, קיטניות וכו,

יחסים ואחוזים לקביעת שערי חילופין בין מוצרים.

פרק 3: חלוקה לפי יחסים

יחס ישר והפוך, חישובי סכומי חוב וזכות.

פרק 4: שטחים

מה רוחב שדה אם אורכו גדל ושיטחו נשמר. אם האורך $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ מה הרוחב אם השטח = 1, חישוב שרשים ריבועיים ומסדר שלישי, נפח כדור (פתרון שגוי)

פרק 5: בעיות הנדסת בנין

נפח כמויות, תעלות, חישוב נפח פירמידה בשיטת המיצוי - ראשית האינפי...

פרק 6: חלוקה צודקת של סחורות
בעיות דרכי נסיעה, מיסוי, חלוקה יחסית

פרק 7: עודף וחסר
פתרון משוואה ליניארית ע"י שני ניחושים וחישוב הפתרון מהשגיאות

פרק 8: חישובי מטריצות
פתרון סט משוואות וחילוץ בשיטת גאוס

פרק 9: משולשים ישרי זווית ומשולשים דומים
שימושים במשפט פיתגורס (חוג הגורו בסין) ומשוואות ריבועיות (פתרון גיאומטרי)

1. אם תרנגול שוה 5 מטבעות, תרנגולת 3 ו-3 אפרוחים שווים מטבע אחת, כמה מכל אחד מהם נוכל לקנות ב-100 מטבעות אם סה"כ נקנה 100 פרטים

1. אם תרנגול שוה 5 מטבעות, תרנגולת 3 ו-3 אפרוחים שווים מטבע אחת, כמה מכל אחד מהם נוכל לקנות ב-100 מטבעות אם סה"כ נקנה 100 פרטים

תשובה: נניח x תרנגולים, y תרנגולות ו- z אפרוחים

$$x+y+z=100$$

$$5x+3y+z/3=100 \rightarrow 15x+9y+z=300$$

$$14x+8y=200$$

$$7x+4y=100$$

נחסיר

ונצמצם

$$y=(100-7x)/4$$

ננסה את הכפולות של 4

$$x=16, y=1$$

$$x=12, y=4, z=84$$

$$x=8, y=11, z=81$$

$$x=4, y=18, z=78$$

$$x=0, y=25, z=75$$

2. בריכה מתמלאת מ-5 תעלות. תעלה 1 לבד ממלאת את הבריכה ב- $\frac{1}{3}$ יום, השניה ביום, השלישית ב- $2\frac{1}{2}$ ימים, הרביעית ב-3 ימים והחמישית ב-5 ימים. אם כל התעלות יפתחו ביחד בכמה זמן תתמלא הבריכה?

3. רץ א גומע 100 ק"מ כשרץ ב גומר 60 ק"מ. אחרי שרץ ב גמר 100 ק"מ רץ ב מתחיל לרוץ אחריו. אחרי כמה ק"מ ישיג א את ב?

4. כמה אנשים קונים ביחד. אם כל קונה ישלם 8 מטבעות ישאר עודף של 3, אם כ"א יתן 7 מטבעות יחסרו 4. כמה אנשים ומה המחיר?

2. בריכה מתמלאת מ-5 תעלות. תעלה 1 לבד ממלאת את הבריכה ב-1/3 יום, השניה ביום, השלישית ב-2 1/2 ימים, הרביעית ב-3 ימים והחמישית ב-5 ימים אם כל התעלות יפתחו ביחד בכמה זמן תתמלא הבריכה?

תשובה: נניח שהבריכה מתמלאת ב-x ימים

התעלה הראשונה תמלא 3x חלקים של הבריכה אם ב-1/3 יום 1 בריכה
ב-x יום $(1/3) \cdot x = 1$

וכך לכולן, ונקבל המשוואה:

$$3x + x + 2x/5 + x/3 + x/5 = 1$$

$$(45 + 15 + 6 + 5 + 3) \cdot x / 15 = 1$$

$$15/74 = x \text{ יום}$$

3. רץ א גומע 100 ק"מ כשרץ ב גומר 60 ק"מ. אחרי שרץ ב גמר 100 ק"מ רץ ב מתחיל לרוץ אחריו. אחרי כמה ק"מ ישיג א את ב?

תשובה: נניח x ק"מ. לרץ ב הם לקחו $(x-100)/60$ יחידות זמן ולרץ ב $x/100$ יחידות זמן ומאחר ונפגשו בסוף המירוץ $x/100 = (x-100)/60$
 $100 \cdot 100 = 100x - 60x = 40x$
 $x = 250$

4. כמה אנשים קונים ביחד. אם כל קונה ישלם 8 מטבעות ישאר עדף של 3, אם כ"א יתן 7 מטבעות יחסרו 4. כמה אנשים ומה המחיר?

תשובה: $8x - 3 = 7x + 4$ ולכן מספר האנשים $x = 7$ והמחיר הכולל $53 = 49 + 4 = 56 - 3$

5. לפנינו שתי ערימות שוות משקל. באחת 9 מטבעות זהב ובשניה 11 מטבעות כסף. מחליפים מטבע אחת בין הערימות, ואז משקל הערימה עם יותר מטבעות זהב קלה ב-13 יחידות מהשניה. מה משקל מטבע זהב ומטבע כסף?

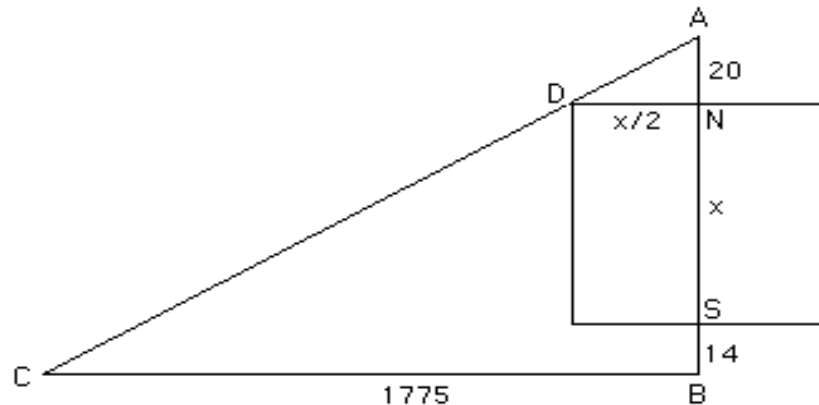
6. חומת עיר ריבועית עם שער במרכז כל ארבעת צלעות החומה. 20 מטר מחוץ לשער הצפוני עומד עץ. אם יוצאים מהשער הדרומי 14 מטר דרומה ואח"כ 1775 מטר מערבה בדיוק מתגלה העץ. מה ממדי העיר

5. לפנינו שתי ערימות שוות משקל. באחת 9 מטבעות זהב ובשניה 11 מטבעות כסף. מחליפים מטבע אחת בין הערימות, ואז משקל הערימה עם יותר מטבעות זהב קלה ב-13 יחידות מהשניה. מה משקל מטבע זהב ומטבע כסף?

תשובה: זהב - x כסף - y ולכן $7x + 13 = 9y$ $8x + y + 13 = 10y + x \rightarrow 7x + 13 = 9y$
 $9x = 11y$ $9 * 7x = 77y$ $7 * 9x + 13 * 9 = 9 * 9y$ $13 * 9 = (81 - 77)y$ $y = 117/4$
 נחלץ ולכן

6. חומת עיר ריבועית עם שער במרכז כל ארבעת צלעות החומה. 20 מטר מחוץ לשער הצפוני עומד עץ. אם יוצאים מהשער הדרומי 14 מטר דרומה ואח"כ 1775 מטר מערבה בדיוק מתגלה העץ. מה ממדי העיר

תשובה: x מטר צלע. משולשים דומים:
 $20 / (x/2) = (20 + x + 14) / 1775$
 $40 * 1775 = x(x + 34)$ $x^2 + 34x - 71000 = 0$
 $x = (-34 \pm \sqrt{34^2 + 4 * 71000}) / 2 = (-34 \pm \sqrt{285156}) / 2 = (-34 \pm 534) / 2$
 הפתרון השלילי אינו שייך לתיאור ממשי $x = 250$ מטר



7. רועה א עם כבשה אחת שואל רועה ב כמה כבשים מאחריו. עונה רועה ב: תוסיף את העדר שלי פעמיים ועוד חצי ועוד רבע ועוד הכבשה שלך ונקבל 100 כבשים. כמה כבשים לרועה ב?

8. קובית אבן ירקון (jade) שממד צלעה 1 ס"מ שוקלת 7 גרם וקוביה זהה מסלע שוקלת 6 גרם. קוביה עם צלע 3 ס"מ עשויה מתערובת סלע וירקון ושוקלת 176 גרם. מה משקל הירקון בקוביה זו?

9. בטיול ראית 9 גבעות, על כל גיבעה 9 עצים, לכל עץ 9 ענפים, 9 קינים על כל ענף, 9 ציפרים בכל קן, לכל ציפור 9 גוזלים, לכל גוזל 9 נוצות, ובכל נוצה 9 צבעים שונים. כמה נוצות יש מכל קומבינציה של צבעים?

7. רועה א עם כבשה אחת שואל רועה ב כמה כבשים מאחריו. עונה רועה ב: תוסיף את העדר שלי פעמיים ועוד חצי ועוד רבע ועוד הכבשה שלך ונקבל 100 כבשים. כמה כבשים לרועה ב?
 תשובה: $x=9*4=36$ $99=11x/4$ $100=x+x+x/2+x/4+1=11x/4+1$

8. קובית אבן ירקון (jade) שממד צלעה 1 ס"מ שוקלת 7 גרם וקוביה זהה מסלע שוקלת 6 גרם. קוביה עם צלע 3 ס"מ עשויה מתערובת סלע וירקון ושוקלת 176 גרם. מה משקל הירקון בקוביה זו?

תשובה: נניח שמשקל הירקון x והסלע לכן $176-x$. צפיפות הירקון $1/7$ והסלע $1/6$
 נפח הקוביה המעורבת $=3^3 = x/7 + (176-x)/6 = 27*7*6 = 176*7 - 7x + 6x$
 $x=176*7-27*7*6=98$

9. בטיול ראית 9 גבעות, על כל גיבעה 9 עצים, לכל עץ 9 ענפים, 9 קינים על כל ענף, 9 ציפרים בכל קן, לכל ציפור 9 גוזלים, לכל גוזל 9 נוצות, ובכל נוצה 9 צבעים שונים. כמה נוצות יש מכל קומבינציה של צבעים?

תשובה: $9^7=4,782,969$ נוצות $9!=362,880$ קומבינציות שונות של צבעים
 ~13.2 נוצות מכל סוג

10. כשמסדרים גולות בשלישיות נשארות 2, בחמישיות נשארות 3, בשביעיות נשארות 2. כמה גולות סה"כ?

11. עיר עם חומה עגולה וארבעה שערים בכווני ארבעת רוחות השמים. שני אנשים יוצאים מהשער המערבי. אחד צועד 256 מטרים מזרחה ועומד, ואז השני צועד 480 מטרים דרומה כשהאדם הראשון מתגלה לו מעבר לחומה. מה קוטר חומת העיר?

10. כשמסדרים גולות בשלישיות נשארות 2, בחמישיות נשארות 3, בשביעיות נשארות 2. כמה גולות סה"כ?

תשובה: אין דרך אלגברית, וצריך לסרוק. הכי מהר להתחיל בשביעיות:

שביעיות - $63+2, 56+2, 49+2, 42+2, 35+2, 28+2, 21+2, 14+2, 7+2$

שארית חמישיות 0 3 1 4 2 0 3 1 4

שארית שלישיות 2 1 0 2 1 0 2 1 0

המחזורים של 5 לחמישיות ו-3 לשלישיות נפגשים נכון ב $7*3+2=23$ ובעוד 15 הינו $7*18+2$, $7*33+2$ וכן הלאה...

11. עיר עם חומה עגולה וארבעה שערים בכווני ארבעת רוחות השמים. שני אנשים יוצאים מהשער המערבי. אחד צועד 256 מטרים מזרחה ועומד, ואז השני צועד 480 מטרים דרומה כשהאדם הראשון מתגלה לו מעבר לחומה. מה קוטר חומת העיר?

תשובה: רדיוס החומה x , משולשים דומים $(256-x)/x=256/y$

$$(256-x)y=256x$$

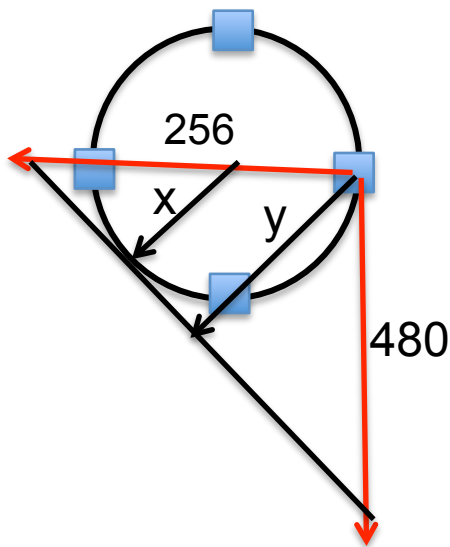
$$256/(256/y+1)=x$$

$$256*480=y*\sqrt{256^2+480^2}=544y$$

$$y=256*480/544$$

$$x=256/(256/256/480*544+1)=256/(544/480+1)=256*480/(544+480)$$

לכן הקוטר 240 מטר $x=120$.

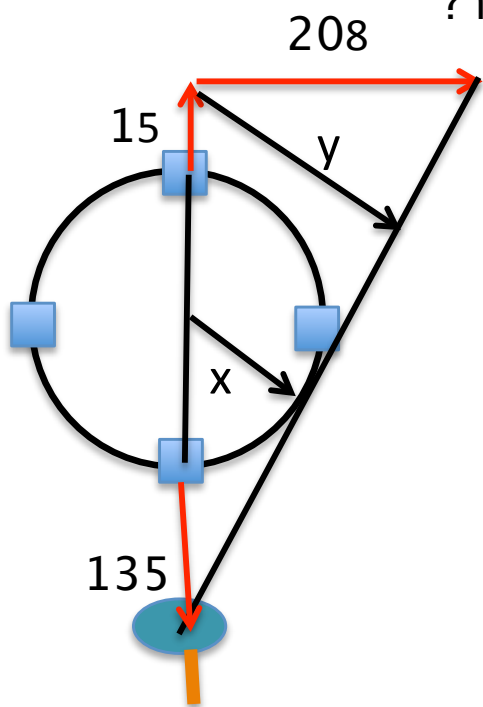


12. עיר חומה כנ"ל. אדם יוצא מהשער המערבי דרומה וצועד 480 מטר. אדם שני יוצא מהשער המזרחי ישר (מזרחה) ועובר 16 מטר כשהוא רואה את האדם הראשון. מה קטר החומה?

14. עיר כנ"ל. 135 מטר דרומה לשער הדרומי יש עץ. אם אדם יוצא 15 מטר צפונה מהשער הצפוני ואז פונה מזרחה וצועד 208 מטר נגלה לו העץ. מה קוטר העיר?

12. עיר חומה כנ"ל. אדם יוצא מהשער המערבי דרומה וצועד 480 מטר. אדם שני יוצא מהשער המזרחי ישר (מזרחה) ועובר 16 מטר כשהוא רואה את האדם הראשון. מה קטר החומה? תשובה: מצב זהה לשאלה הקודמת

14. עיר כנ"ל. 135 מטר דרומה לשער הדרומי יש עץ. אם אדם יוצא 15 מטר צפונה מהשער הצפוני ואז פונה מזרחה וצועד 208 מטר נגלה לו העץ. מה קוטר העיר?



תשובה: מתוך משולשים דומים $x/(135+x)=y/(135+2x+15)$

נפתור y באמצעות x

$$x(150+2x)/(135+x)=y$$

ונציב בשויון שטחי המשולש הגדול

$$208*(150+2x)=y*\sqrt{208^2+(150+2x)^2}$$

$$208*(150+2x)(135+x)=x(150+2x)*\sqrt{208^2+(150+2x)^2}$$

$$208*(135+x)=x*\sqrt{208^2+(150+2x)^2}$$

$$208^2(135+x)^2=208^2x^2+x^2(150+2x)^2$$

$$1352*2082+270*2082x+*2082x2=2082x2+1502x2+600x3+4x4$$

$$1352*1042+270*1042x-752x2-150x3-x4=0$$

לנוחיות חישוב נאסוף אברים

$$135+2, 135*1042x)-752(75+2x)-x4=0$$

$$1460160(135+2x)-5625(75+2x)-x4=0$$

משוואה מדרגה 4 - פתרון אלגברי קיים אבל מסובך אולי הסינים ניסו חיפוש מתקרב. $x=100$

המשוואה מעט חיובית $x=200$ די הרבה שלילית. $x=120$ המשוואה מתאפסת - הפלא ופלא

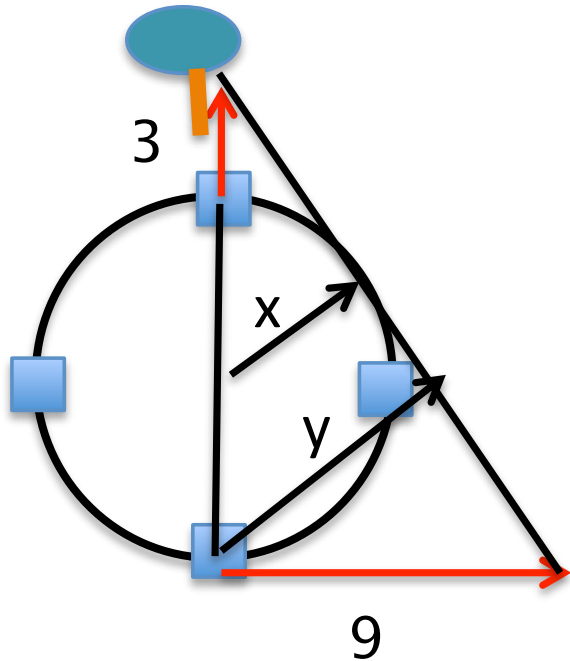
זו אותה העיר...

15. עיר כנ"ל. 3 קמ צפונה לשער הצפוני עומד עץ. אם אדם יוצא 9 ק"מ מזרחה מהשער הדרומי נגלה לו העץ. מה הקפה וקוטר של העיר?

16. לחווה ריבועית בריכה עגולה במרכזה. שטח החווה 12 מ"ר ועוד שתים וחצי עשירות מ"ר. הבריכה 2 מטר מגבול החווה. מה אורך צלע החווה ומה קטר הבריכה?

15. עיר כנ"ל 3 קמ צפונה לשער הצפוני עומד עץ. אם אדם יוצא 9 ק"מ מזרחה מהשער הדרומי נגלה לו העץ. מה הקפה וקוטר של העיר?

תשובה: נשתמש במשולשים דומים $x/(3+x)=y/(3+2x)$ $y=x(3+2x)/(3+x)$ ובשטח המשולש $9(3+2x)=y*\sqrt{[(3+2x)^2+9^2]}$



$$3+2x)(3+x)=x(3+2x)*\sqrt{[(3+2x)^2+9^2]}$$

$$9(3+x)=x*\sqrt{[(3+2x)^2+9^2]}$$

$$81(3+x)^2=(3x+2x^2)^2+81x^2$$

$$81*3+2*81x-9x^2-12x^3-4x^4=0$$

ולנוחיות חישוב נאסוף אברים

$$81(3+2x)-3x^2(3+4x)-4x^4=0$$

שוב משוואה מדרגה 4 שנפתור בחיפוש

$$x=4 \quad 81*11-3*16*17-1024=-949 << 0$$

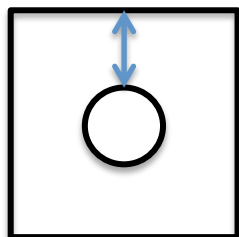
$$x=2 \quad 81*7-3*4*11-4*16=371 > 0$$

$$x=3 \quad 81*9-27*15-36*9=0$$

קטר העיר לכן 6 ק"מ והקפה 18.85 ק"מ

16. לחווה ריבועית בריכה עגולה במרכזה. שטח החווה 12 מ"ר ועוד שתים וחצי עשירות מ"ר. הבריכה 1.5 מטר מגבול החווה. מה אורך צלע החווה ומה קטר הבריכה?

תשובה: הצלע $=\sqrt{12.25}$ מטר 3.5 וקטר הבריכה מטר $3.5-1.5*2=0.5$

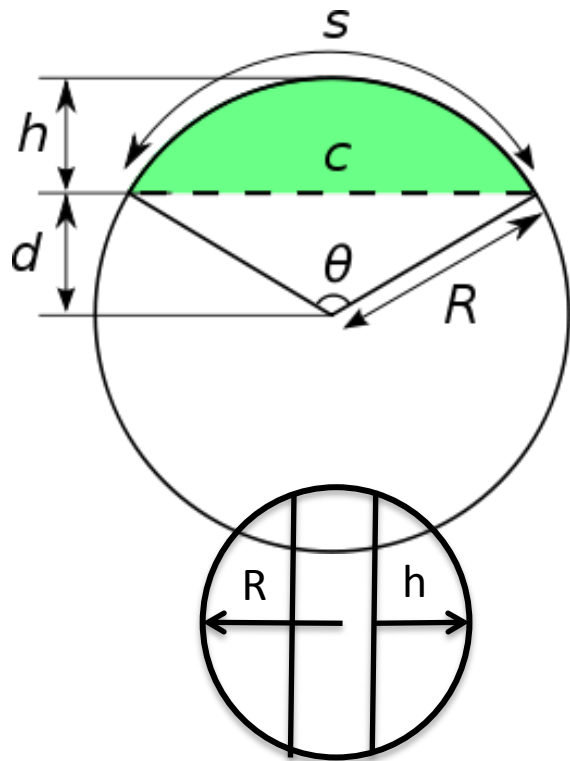


17. ערימת אורז צמודה לקיר, הקף בסיסה 6.28 מטר וגבהה 2 מטר. מה ניפחה?
ערימה אחרת בפינה כשהקף בסיסה 3.14 מטר וגבהה גם הוא 2 מטר – מה ניפחה?

18. פלג קטן חוצה שדה עגול במרכזו. אם קטר השדה 4 מטר ורוחב הפלג 2 מטר מה שטח השדה שמחוץ למים?

17. ערימת אורז צמודה לקיר, הקף בסיסה 6.28 מטר וגבהה 2 מטר. מה ניפחה?
 ערימה אחרת בפינה כשהקף בסיסה 3.14 מטר וגבהה גם הוא 2 מטר – מה ניפחה?
 תשובה: נפח חרוט הוא שטח בסיסו כפול הגובה חלקי 3. בגלל הקיר יש לנו חצי חרוט ובסיסו
 חצי מעגל שהקפו $r\pi$ לכן $r=2$ שיטחו $\pi r^2/2$ לכן 4.19 מטר מעוקב
 נפח הערימה בפינה חצי מזה, הינו 2.09 מטר מעוקב.
 שימו לב: אם הבסיס היה עיגול שלם וההקף היה חצי, הנפח היה רבע (אם הגובה שווה)
 אך כאן ההקף חצי עם אותו הרדיוס ושטח הבסיס חצי בגלל פינת הקירות ולא השינוי ברדיוס

18. פלג קטן חוצה שדה עגול במרכזו. אם קטר השדה 4 מטר ורוחב הפלג 2 מטר מה שטח
 השדה שמחוץ למים?



תשובה: שטח A של פרוסה בגובה $R-d=h$ מעיגול ברדיוס R

הוא שטח הגיזרה פחות שטח המשולש

$$sR/2 = \theta R^2/2 = R^2 \sin^{-1}(d/R)$$

שטח המשולש

$$cd/2 = d \cdot \sqrt{R^2 - d^2} = Rd \cdot \sqrt{1 - (d/R)^2}$$

נותן:

$$A = 1/2 R^2 (\theta - \sin\theta) = R^2 [\sin^{-1}(d/R) - d/R \sqrt{1 - (d/R)^2}]$$

כאן: $d=1$ $R=2$ ולכן שטח הגן היבש:

$$A = 4[\sin^{-1}(0.5) - 0.5\sqrt{0.75}] = 4[\pi/6 - .866/2] = 2\pi/3 - 1.732 = 0.362$$

19. במשולש ישר זווית צלעות $a > b > c$ $a + c = 72$ $a + b = 81$

19. במשולש ישר זווית צלעות $a > b > c$ $a + c = 72$ $a + b = 81$

פתרון: מפיתגורס $a^2 = b^2 + c^2$

נציב $a^2 = (81 - a)^2 + (72 - a)^2$

$$0 = a^2 - 306a + 11745 \quad a = 306/2 \pm \sqrt{306^2 - 4 \cdot 11745} / 2 = 153 \pm 108 = 45, 261$$

הפתרון $a = 261$ יתן ערכים שליליים עבור b, c

ולכן הפתרון $a = 45$ $b = 36$ $c = 27$

20. למשולש ישר זווית שטח 30 סמ"ר סכום אורכי הניצבים 17 מה סכום הבסיס והאלכסון?

במשולש ישר זווית $c = a + 36 + \frac{9}{10}$ $ab = 706 + \frac{1}{5}$ $a > b > c$

20. למשולש ישר זווית שטח 30 סמ"ר סכום אורכי הניצבים 17 מה סכום הבסיס והאלכסון?

$$b+c=17 \quad bc=60$$

$$b(17-b)=60 \quad b^2-17b+60=0 \quad b=17/2 \pm \sqrt{(289-240)/2} = (17 \pm 7)/2$$

$$b=12,5 \quad c=5,12$$

האלכסון = 13 סכום הבסיס (הניצב היותר גדול) והאלכסון 25

$$a > b > c \quad ab=706+1/5 \quad c=a+36+9/10$$

$$(a+36.9)^2 = (706.2/a)^2 + a^2 \quad 73.8a^3 + 1361.61a^2 - 498718.44 = 0$$

ננסה לסרוק:

$$a=10 \quad -288757.44$$

$$a=20 \quad +636325.56$$

$$a=15 \quad +56718.81$$

$$a=14 \quad -29335.68$$

$$a=14.2 \quad -12852.7452$$

$$a=14.4 \quad 3990.6288$$

$$a=14.35 \quad -254.1996$$

$$a=14.355 \quad 169.26$$

כשאנו קרובים אפשר להתקדם באינטרפולציה ליניארית

$$a=14.35 \quad F=-254.2$$

$$a=14.355 \quad F=169.3$$

$$x/0.005 = 169/(169+254)$$

$$a=14.355-x \quad F=0$$

$$x=0.002$$

$$a=14.353 \quad F=-0.15040$$

לכן זה דיוק טוב מאד

21. דרך מעגלית סביב ההר ארכה 325 מטר. שלשה אנשים רצים בדרך. א רץ 150 מטר בדקה ב 120 ו-ג 90. אם מתחילים ביחד, מתי יפגשו שוב לראשונה?

22. שלשה אנשים עם מטבעות בשקיהם. א אומר: "אם אקח $\frac{2}{3}$ ממטבעותיו של ב ו- $\frac{1}{3}$ משל ג יהיו לי 100" אומר ב: "אם אקח $\frac{2}{3}$ של א ו- $\frac{1}{2}$ של ג יהיו לי 100". אומר ג: "אם אקח $\frac{2}{3}$ של א ו- $\frac{2}{3}$ של ב יהיו לי 100". כמה מטבעות לכל אחד?

21. דרך מעגלית סביב ההר ארכה 325 מטר. שלשה אנשים רצים בדרך. א רץ 150 מטר בדקה ב 120 ו-ג 90. אם מתחילים ביחד, מתי יפגשו שוב לראשונה?
 תשובה: נניח שייפגשו אחרי ש-א רץ x מטרים ז"א ש-ב רץ $x-325$ מטרים
 עבור א+ב $x/150 = (x-325)/120$
 $120x = 150x - 325 \cdot 150$ $30x = 325 \cdot 150$ $x = 325 \cdot 5$
 זה יקרה אחרי 5 סיבובים שיימשכו $325 \cdot 5 / 150 = 10.83333$ דקות
 וכך עבור ב+ג $x/120 = (x-325)/90$
 $90x = 120x - 325 \cdot 120$ $30x = 325 \cdot 120$ $x = 325 \cdot 4$
 ז"א אחרי 4 סיבובים שיימשכו $325 \cdot 4 / 120 = 10.83333$ דקות
 שלשתם ייפגשו באותו הזמן: א השלים 5 סיבובים, ב רץ 4 ו-ג 3 סיבובים

22. שלשה אנשים עם מטבעות בשקיהם. א אומר: "אם אקח $2/3$ ממתבעותיו של ב ו- $1/3$ משל ג יהיו לי 100".
 אומר ב: "אם אקח $2/3$ של א ו- $1/2$ של ג יהיו לי 100".
 אומר ג: "אם אקח $2/3$ של א ו- $2/3$ של ב יהיו לי 100". כמה מטבעות לכל אחד?
 פתרון: $a + 2/3b + 1/3c = 100$ $2/3a + b + 1/2c = 100$ $2/3a + 2/3b + c = 100$
 ראשית נחלץ בהחסרת שתי המשוואות האחרונות את b, c
 $b/3 - c/2 = 0$
 ובהחסרת שתי הראשונות אחרי הכפלת השניה ב- $3/2$
 $(3/2 - 2/3)b + (3/4 - 1/3)c = 50$
 ומכאן נחלץ את c
 $2b - 3c = 0$ $5b + 5/2c = 300$
 $b - 3/2c = 0$ $b + c/2 = 60$
 $2c = 60$ $c = 30$ $b = 45$ $a = 100 - 30 - 10 = 60$

23. פסיון עולה 5 שקל, תרנגולת 3 ו-3 אפרוחים 1 שקל. קנו 100 עופות ב-100 שקל כמה היו מכל סוג?

24. 100 שקל קונים 100 פרות. תפוז עולה 7 שקל, אגס 3 קיווי 1 כמה מכל סוג?

23. פסיון עולה 5 שקל, תרנגולת 3 ו-3 אפרוחים 1 שקל. קנו 100 עופות ב-100 שקל כמה היו מכל סוג?

$$100 = 5x + 3y + z/3 \quad 100 = x + y + z \quad \text{תשובה:}$$

$$15 = 300x + 9y + z \quad 200 = 14x + 8y$$

נחפש פתרונות שלמים:

$$x=1 \quad y=186/8=23+2/8$$

$$x=2 \quad y=172/8=21+4/8$$

$$x=3 \quad y=158/8=19+6/8$$

נקפוץ לכפולות של 4 $x=4 \quad y=18 \quad z=78$

$$x=8 \quad y=11 \quad z=81$$

$$x=12 \quad y=4 \quad z=84$$

$$x=16 \quad y=\text{negative}$$

24. 100 שקל קונים 100 פרות. תפוז עולה 7 שקל, אגס 3 קיווי 1 כמה מכל סוג?

$$100 = 7x + 3y + z/3 \quad 100 = x + y + z \quad \text{תשובה:}$$

$$4 = 600y + 20/3z \quad 12y + 20z = 1800$$

יהיה שלם z - יכול רק להיות מכפילה של 5 כדי ש y

$$y=5 \quad z=1740/20=87 \quad x=8$$

$$y=10 \quad z=1680/20=84 \quad x=6$$

$$y=15 \quad z=81 \quad x=4$$

$$y=20 \quad z=78 \quad z=2$$

$$y=25 \quad z=75 \quad z=0$$

25. בכלוב פסיונים ושפנים. סופרים 35 ראשים ו-94 רגליים. כמה מכל סוג?

26. במשולש ישר זווית $x < y < z$ נתונים היחסים הבאים:

$$2x+4y+4z=x(y^2-z+x) \quad 2yz=z^2+xz$$

$$\text{מצא } d=2x+2y$$

27. אם חוק החזקה השלישית מתאר קצב גיוס חיילים וביום הראשון גוייסו 3^3 חיילים בשני 4^3 וכו כמה חיילים גוייסו ב-15 ימים? כמה אחרי ח ימים?

28.

d קטר מעגל החסום במשולש ישר זווית שצלעותיו $x < y < z$
נתון $y+z=9$ $dxy=24$ מה שוה x ? (השתמש בשוויון $d=2r=x+y-z$)

25. בכלוב פסיונים ושפנים. סופרים 35 ראשים ו-94 רגליים. כמה מכל סוג?

$$x+y=35 \quad 2x+4y=94$$

$$2y=94-70=24 \quad y=12 \quad x=23$$

26. במשולש ישר זווית $x < y < z$ נתונים היחסים הבאים:

$$2x+4y+4z=x(y^2-z+x) \quad 2yz=z^2+xz$$

$$\text{מצא } d=2x+2y$$

פתרון: משוואה שלישית - משפט פיתגורס - $x^2+y^2=z^2$

#####

27. אם חוק החזקה השלישית מתאר קצב גיוס חיילים וביום הראשון גוייסו 3^3 חיילים בשני

4^3 וכו כמה חיילים גוייסו ב-15 ימים? כמה אחרי n ימים?

תשובה: $3^3+4^3+\dots n^3=an^4+bn^3+cn^2+dn+e$

$$n=3 \quad 27=81a+27b+9c+3d+e$$

$$n=4 \quad 91=255a+64b+16c+4d+e$$

#####

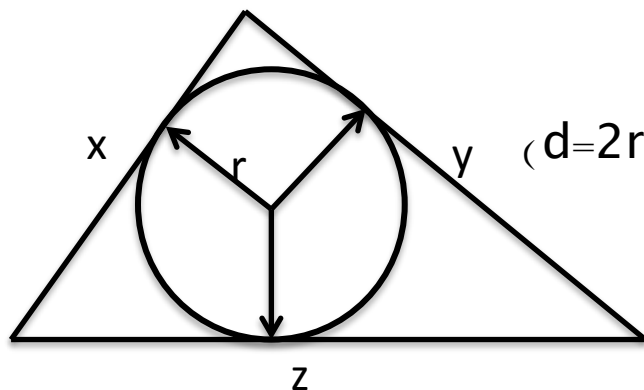
28.

d קטר מעגל החסום במשולש ישר זווית שצלעותיו $x < y < z$

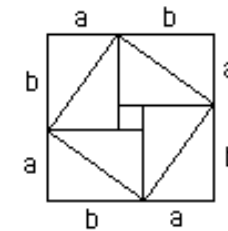
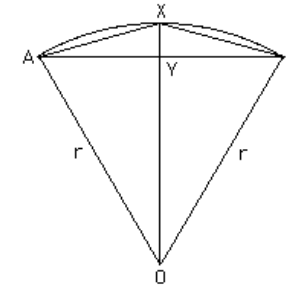
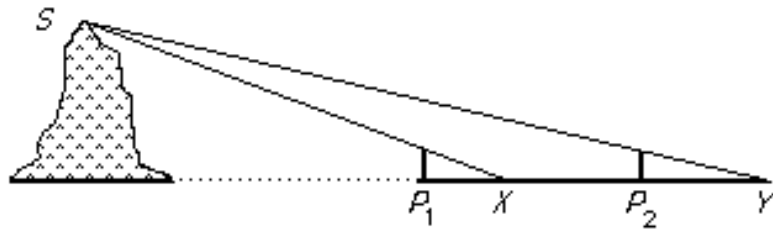
נתון $dxy=24$ $y+z=9$ מה שווה x ? (השתמש בשוויון - $d=2r=x+y-z$)

$$\text{פתרון: } x=3 \quad y=4 \quad z=5 \quad d=2$$

#####



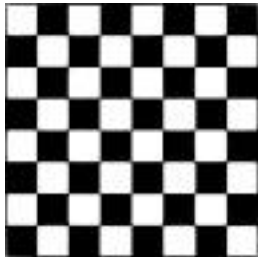
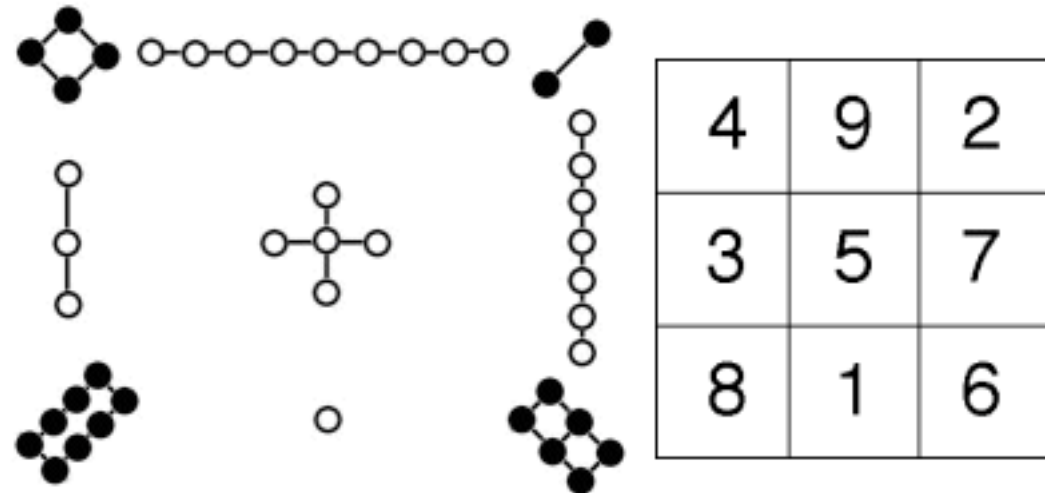
רישומים מספר המתמטיקה הסיני: משפט פייטגורס, הקף המעגל, גובה מגדל במדידה מרחוק. הדמיון לתכנ ספריו של אוקלידס מדהים



פתרון משואה ריבועית: לעיל (שקף 13)
פתרון אלגברי למשוואות מסדר שלישי ורביעי (ימי הביניים) והוכחה שאין פתרון אלגברי סגור
לסדרים מעל 4 (הוכחות במאה ה-19 ע"י רופיני, אבל וגלואה)

קובית קסם סיניות :

סבום עמודות שורות ואלכסונים הוא 15
 הציג את הקוביה שלו כמצוייר משמאל Lo Shu



כמה ריבועים אפשר לצייר על לוח שחמט?

$$64 + 49 + 63 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$$

כמה גרגרי אורז צריך כדי לשים על לוח שחמט כן שבריבוע הראשון גרגר אחד, ובכל

ריבוע פי שניים המריבוע הקודם

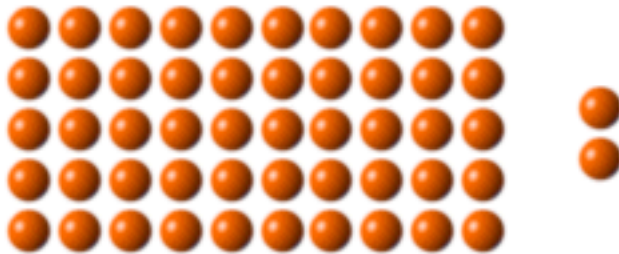
$$1.84467 = (2-1) / (2^{64}-1) = 2^{63} + \dots + 1 + 2 + 4 + 8 \times 10^{19}$$

תיאורמת השארית

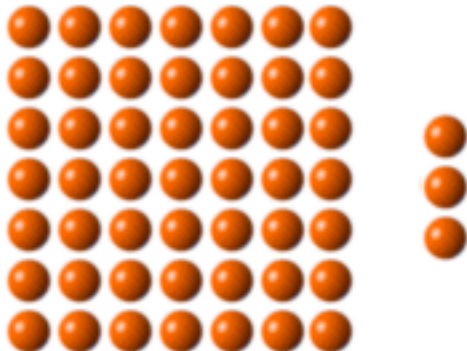
If a collection of balls are arranged in rows of 3,
there is one ball left over



If arranged in rows of 5, there are two balls left over



If arranged in rows of 7, there are three balls left over



The Chinese Remainder Theorem proves that the
smallest number of balls must be 52

$$1+3*a = 2+5*b=3+7*c = n$$

$$a=3 \quad - \quad c=1 \quad n=10$$

$$- \quad b=3 \quad c=2 \quad n=17$$

$$- \quad - \quad c=3 \quad n=24$$

$$a=10 \quad - \quad c=4 \quad n=31$$

$$- \quad - \quad c=5 \quad n=38$$

$$- \quad - \quad c=6 \quad n=45$$

$$a=17 \quad b=10 \quad c=7 \quad n=52$$

$$\dots C=7 + 3*5$$

$$a=52 \quad b=31 \quad c=22 \quad n=157$$

שיטות סיניות לפתרון משוואות (בשיטה שהיום נקראת "חילוץ")

Problem:

If one plum and three peaches weigh a total of 750g, and two plums and one peach weigh a total of 500g, how much does a single peach and plum weigh?

$$X+3y=750$$

$$2x+y=500$$

First, double the contents of the first scale:



$$2x+6y=1500 \quad +$$

$$2x+y=500 \quad \underline{-}$$

$$5y=1000$$

$$Y=200$$

Subtract from this the contents of the second set of scales:



Therefore, a single peach must weigh **200g** (1,000 ÷ 5).

Then, take the peach off the second scale:



Therefore, a single plum must weigh **150g** (300 ÷ 2)

נושאים שכלולים בתכנית הלימודים במתמטיקה

משוואות ריבועיות

אי שוויונות

פונקציות

סדרות (חשבוניות וגיאומטריות) וסכומים אינסופיים

משוואות עם n נעלמים

אינדוקציה

צרופים וקומבינטוריקה

חבורות וקבוצות

מספרים מרוכבים

פתרון משוואה ריבועית ע"י השלמת האברים התלויים ב-x לריבוע:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + (b/a)x + c/a = 0$$

$$x^2 + (b/a)x = -c/a$$

$$x^2 + (b/a)x + (b/2a)^2 = -c/a + (b/2a)^2$$

$$[x + (b/2a)]^2 = -c/a + (b/2a)^2$$

$$[x + (b/2a)]^2 = [b^2 - 4ac] / (4a^2)$$

$$x + (b/2a) = \pm \sqrt{[b^2 - 4ac] / (4a^2)}$$

$$x = -b/2a \pm \sqrt{[b^2 - 4ac] / (4a^2)}$$

$$x = -b/2a \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) / 4} \cdot |a| = -b/2a \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) / 4} \cdot |a|$$

$$x = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}] / 2a$$

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{שני פתרונות}$$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \text{פתרון אחד}$$

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \text{אף פתרון}$$

תיאור גרפי לפונקציות

נראה את הצורה הגרפית של פתרון המשוואה - פרבולה: $ax^2 + bx + c = y$

כאשר x גדול מאד או קטן מאד - ערך y גדול מאד בגלל ש- x^2 "משתלט"

כאשר $x = -b/2a$ הגרף במינימום:

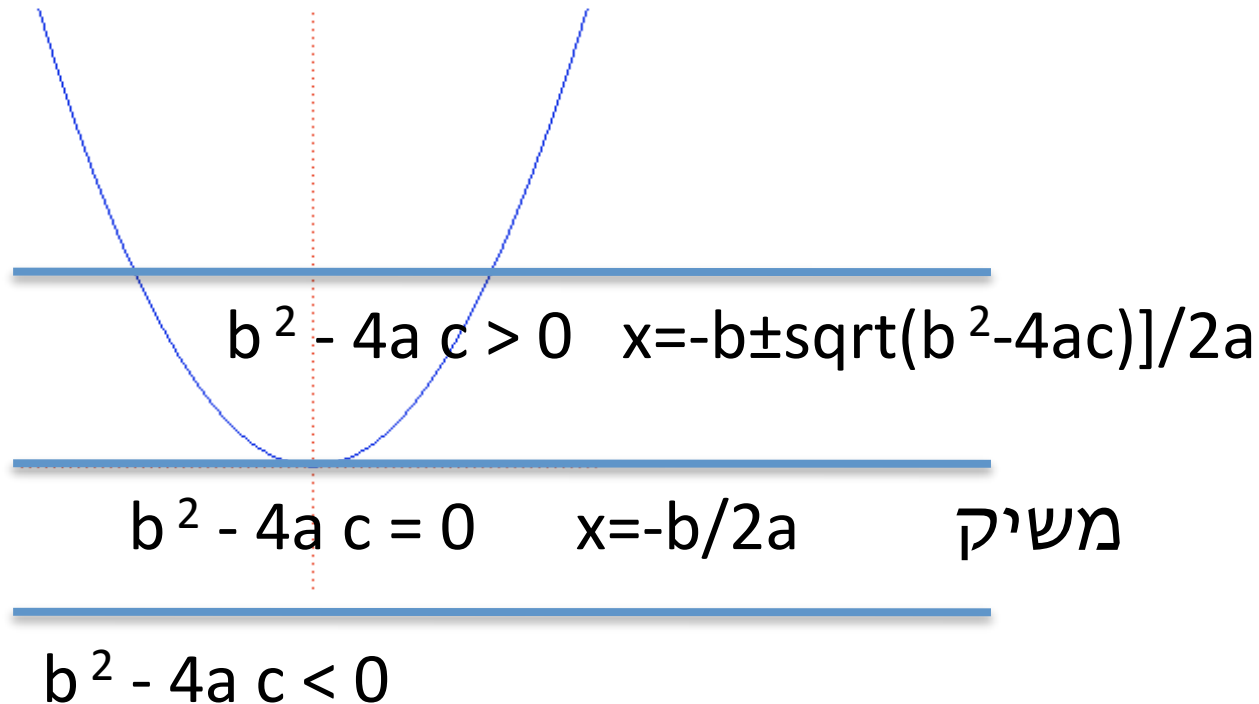
הוכחה: $aX^2 = y$ במינימום כאשר $X=0$

נציב $x + b/2a = X$

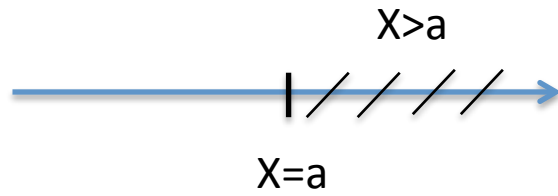
ונקבל $ax^2 + bx + (b/2a)^2 = y$

השונה רק בקבוע ולכן לו אותו המינימום

מיון הפתרונות באמצעות הדיסקרימיננט $b^2 - 4ac$

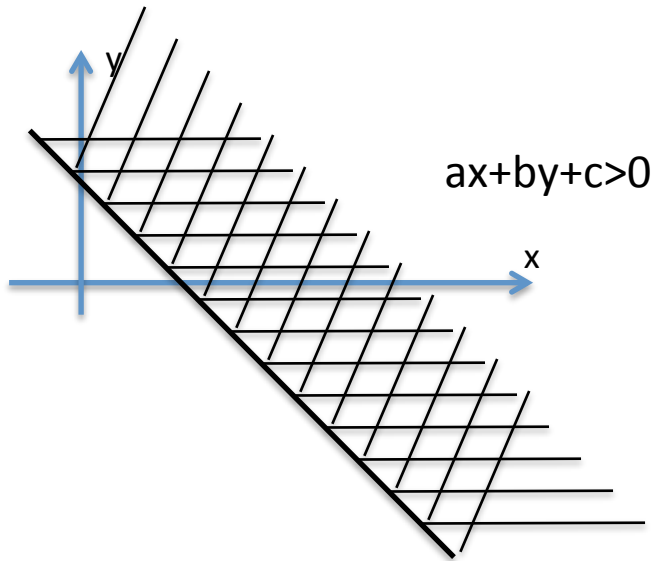


אי שוויונות - מבט גראפי

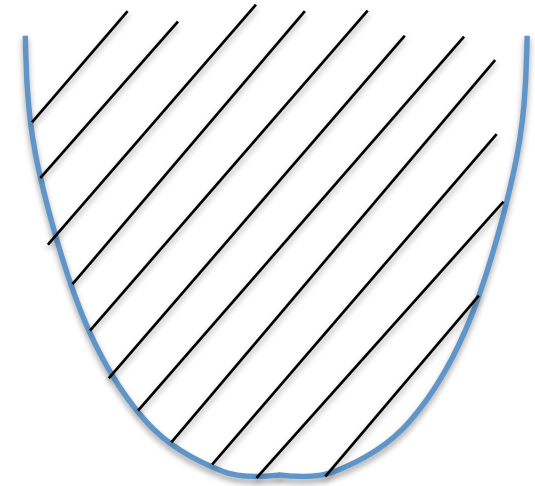


מימד אחד : $x>a$

בשני ממדים :

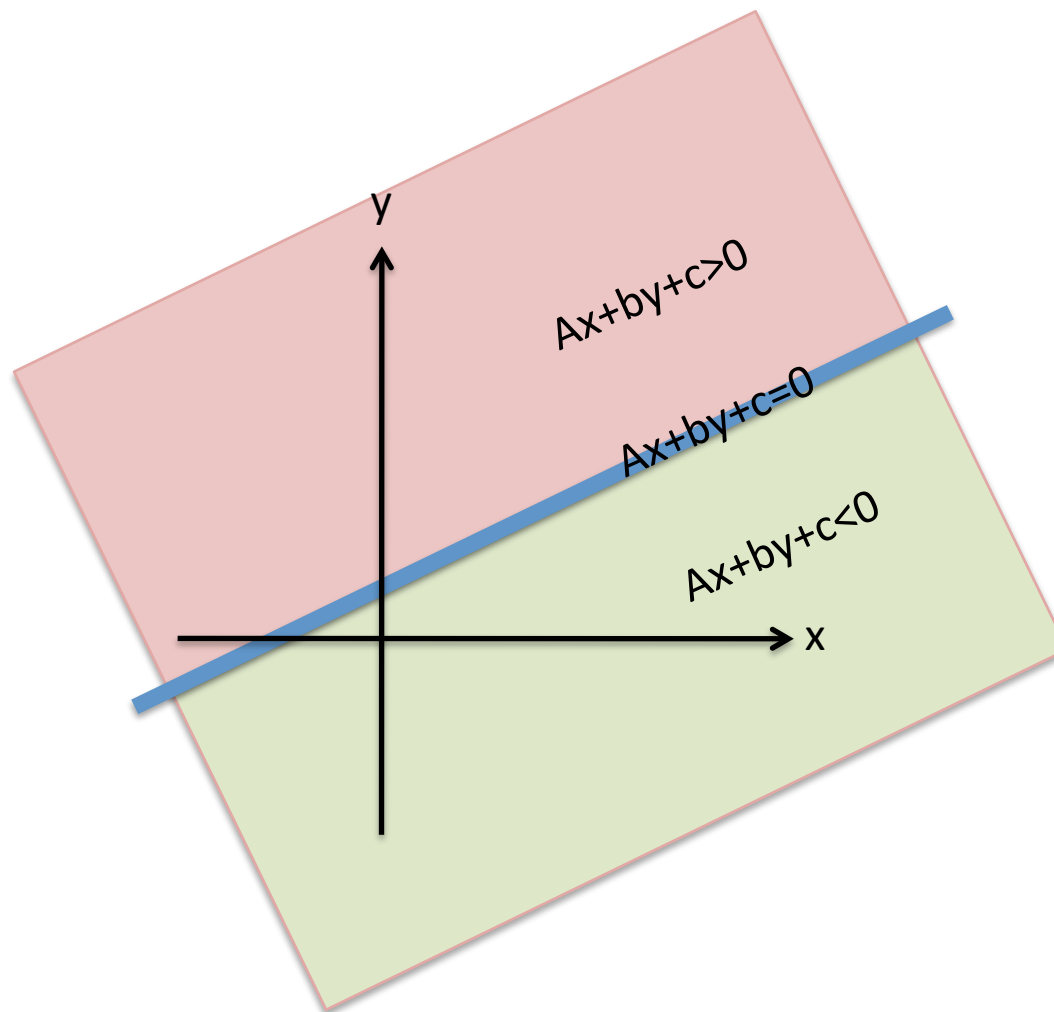


$$ax^2 + bx + c > 0$$

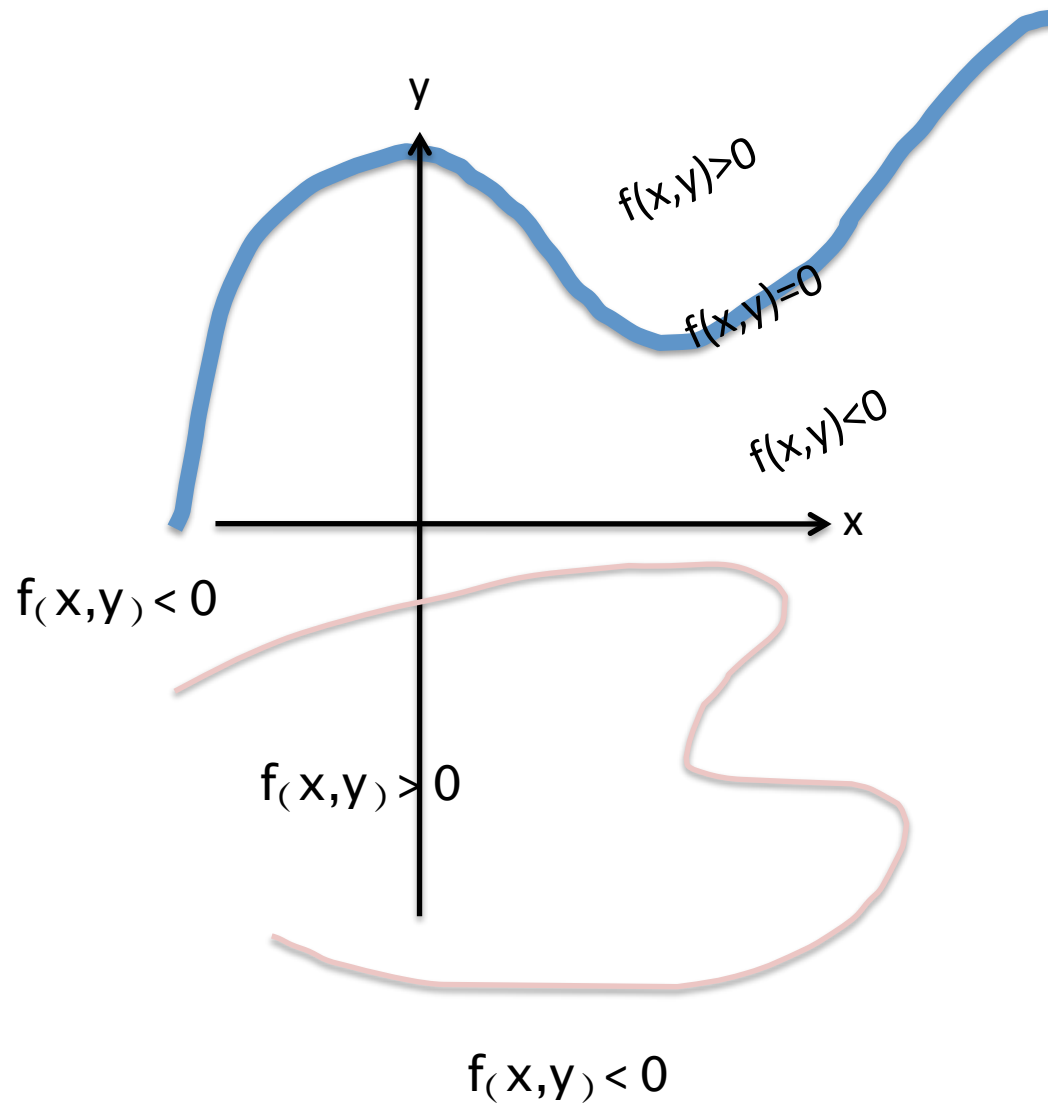


אי שוויונות - מבט גראפי

$ax+by+c=0$ קו במישור
 $ax+by+c>0$ מתאר חצי המישור הגובל בקו
מספיק לבדוק נקודה אחת כדי לדעת איזה חצי אנחנו נמצאים



למעשה כל פונקציה פשוטה $f(x,y)=0$ (מוגדרת חד ערכית לכל משתניה) מחלקת את המישור לשני אזורים $f(x,y)>0$ ו- $f(x,y)<0$ אך לא תמיד כך לפונקציה רב ערכית



בניגוד לשוויונות, בהם מותר להכפיל ולחלק את שני האגפים בכל מספר

$$\text{אם } a = b \text{ אז } ac = bc$$

לאי שוויון יש סיבוך: אם $2 > 3$ אז $-3 < -2$ לכן:

$$\text{אם } a > b \text{ אז } ac > bc \text{ אם } c > 0$$

$$\text{אם } c < 0 \text{ אז } ac < bc$$

זה מסבך חילוץ משתנים מביטוי אי שוויון אלגברי מסובך.

$$\text{אם: } ax > b$$

יש שתי אפשרויות לחלוקה ב- a :

$$\text{אם } a > 0 \text{ אז } x > b/a$$

$$\text{אם } a < 0 \text{ אז } x < b/a$$

$$\text{אם } a > b \text{ אז } b < a$$

טרנזיטיביות: אם $a > b$ ו- $b > c$ אז: $a > c$

$$\text{אם } a > b \text{ אז } a+x > b+x$$

הערך המוחלט:

הגדרה: אם $a > 0$ אז $|a| = a$

ואם $a < 0$ אז $|a| = -a$

לכן: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ וגם: $|a/b| = |a|/|b|$

אבל ערכו של: $|a \pm b|$ יכול להיות כל אחד מארבע האפשרויות:

$-a-b$ $a+b$ $a-b$ $-a+b$

סכומים, סכומים אינסופיים מתכנסים ואינטגרלים

הסימון לסכום:

$$\sum_{i=0}^{i=n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

הסימון למכפלה:

$i=n$

$$\prod_{i=0} x_i = x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n$$

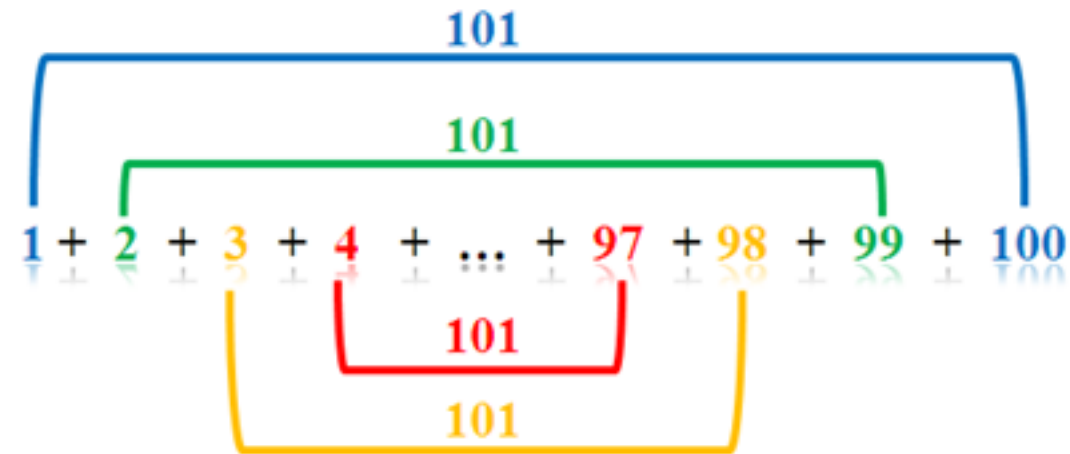
כמה סכומים פשוטים – סידרה חשבונית:

$$\sum_{i=0}^{i=n} i = n(n+1)/2$$

או במקרה יותר כללי: סכום של סידרה חשבונית הוא מספר האברים כפול ממוצעם:

$$\sum_{i=n1}^{i=n2} (a+bi) = (n2-n1+1) * (a+b*n1+a+b*n2) / 2$$

ההסבר של גאוס לסכום סדרה חשבונית:



לפי הסיפור, המורה שאל תלמידים מה סכום המספרים מ-1 עד-100 וגאוס ענה מיד 5050.

סכומים של חזקות – תמיד חזקה אחת יותר:

$$\sum_{i=0}^n i^m = an^{m+1} + bn^m + \dots + xn + y$$

$i=0$

אפשר לפתור באופן הדרגתית למשל עבור סכום ריבועים:

$$\begin{aligned} i=0 \\ \sum_{i=0} i^2 = y = 0 \\ i=0 \end{aligned}$$

נניח שהפתרון: $a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + x \cdot n$

$$\begin{aligned} i=1 \\ \sum_{i=0} i^2 = a + b + x = 1 \\ i=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i=2 \\ \sum_{i=0} i^2 = 8a + 4b + 2x = 5 \\ i=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i=3 \\ \sum_{i=0} i^2 = 27a + 9b + 3x = 14 \\ i=0 \end{aligned}$$

איך פותרים 3 משוואות עם 3 נעלמים? דרך פשוטה וארוכה-חילוץ

$$a+b+x = 1 \quad \times 6 \quad \text{חילוץ } x$$

$$8a+4b+2x = 5 \quad \times 3$$

$$27a+9b+3x = 14 \quad \times 2$$

נחסיר משוואות: שלישית משניה

$$a(54-24) + b(18-12) = 28-15$$

$$a(24-6) + b(12-6) = 15-6 \quad \text{שניה מראשונה}$$

נשארנו עם שתי משוואות בשני נעלמים

$$30a+6b=13$$

$$18a+6b=9$$

נחסיר שוב (במקרה מקדם שווה)

$$12a=4 \quad a=1/3$$

$$6b=(9-18/3)=3 \quad b=1/2$$

$$x=1-1/2-1/3=1/6$$

עכשיו נבדוק:

$$\sum_{i=0}^n i^2 = n^3/3 + n^2/2 + n/6 = (2n^2 + 3n + 1)n/6 = (2n+1)(n+1)n/6$$

$$n=0 \quad \text{sum}=0$$

$$n=1 \quad \text{sum}=3*2/6=1$$

$$n=2 \quad 1+4=\text{sum}=5*3*2/6=5$$

$$n=3 \quad 1+4+9=\text{sum}=7*4*3/6=14$$

$$n=4 \quad 1+4+9+16=\text{sum}=9*5*4/6=30$$

אם "מנחשים" פתרון – ואפשר להוכיח שנכון תמיד ע"י באינדוקציה

בודקים שנכון עבור $n=1$

מניחים שאם נכון עבור n

במקרה הנ"ל

$i=n$

$$\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = (2n+1)(n+1)n/6$$

$i=0$

מוכיחים שאז נכון ל- $n+1$

$i=n+1$

במקרה הנ"ל

$$\sum_{i=0}^{i=n+1} i^2 = (2n+2+1)(n+2)(n+1)/6 = v = (2n+1)(n+1)n/6 + (n+1)^2$$

$i=0$

כאשר הסימן $=v=$ אומר שוויון להוכחה. נוכל לפתוח את הסוגריים, או אם נביט – נצמצם קודם

ב- $(n+1)/6$

$$2n+2+1)(n+2)/6 = v = (2n+1)n + 6(n+1)$$

$$2n^2+(3+4)n+6 = v = 2n^2+7n+6$$

וזה נכון

סדרות גיאומטריות:

$$\sum_{i=0}^{i=n} aq^i = a(q^{n+1}-1)/(q-1)$$

הוכיח באינדוקציה כי

יישומים חשובים: ריבית דריבית בבנק
דילול תמיסה

דעיכה רדיואקטיבית: בכל חלקיק זמן נתון חלק קטן דועך

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ [1+1/n]^n \} = e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ [1+p/n]^n \} = e^p \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ [1-p/n]^n \} = e^{-p}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ a(q^{n+1}-1)/(q-1) \} = ae^{-p} \quad q=1-p/n$$

סכומים אינסופיים מתכנסים:

ננסה לחשב:

$i=n$

$$\sum_{i=1}^n 1/i = \text{?????}$$

$i=0$

$i=n$

$$\sum_{i=1}^n 1/i^2 = \text{?????}$$

$i=0$

וכן:

נגלה תופעה מעניינת: למרות שערכם של i^{-1} וגם i^{-2} הולך ושואף לאפס עבור n גדול, הסכום הראשון הולך וגדל לאינסוף, בעוד הסכום השני "מתכנס" לערך סופי. ההוכחה ניתנה בימי הביניים ע"י ניקולה אורסמה (Nicole Oresme 1325-1382)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty.$$

$$\sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{k}{2}$$

אבל לעומת זאת, הוכחות מסובכות ע"י אוילר Leonhard Euler 1707–1783 וקושי
(Augustin-Louis Cauchy 1789–1857)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

האפשרות לחשב סכומים אינסופיים היא הבסיס לחשבון אינטגרלי, אך ההבנה של
המושג עשתה לה שימוש למשל ע"י ארכימדס (לחישוב מרכזי כובד ונפחי גופים)

צרופים (קומבינטוריקה):

מספר הסידורים האפשריים של n אנשים בשורה = $n!$

אפשרויות לבחור את הראשון n

אפשרויות לבחור את השני $n-1$

וכו

מספר האפשרויות של בחירת שורה מסודרת m אנשים מקבוצה של n אנשים

$n! / (n-m)!$

אפשרויות לבחור את הראשון n

אפשרויות לבחור את השני $n-1$

וכו עד $n-m+1$

מספר האפשרויות של קיבוץ m אנשים (בלי סדר) מקבוצה של n אנשים

$n! / (n-m)! / m!$

כנ"ל לחלק למספר החילופין של m אנשים

נוסחת הבינום של ניוטון (ומשולש פסקל):

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{n!}{(n-m)! m!} a^m b^{(n-m)}$$

חבורות

דוגמא $(-1, 0, 1)$ – לכפל
חבורות לא שלמות, מספרים חיוביים לחיסור ולחילוק,
מספרים אירציונאליים לחיבור חילוק או כפל – יוצרים ראציונאליים

תוכמן – אלגברה

סיכום הספר

המשוואה הריבועית ושורשיה

$$ax^2 + bx + c = 0$$

הפתרונות:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -b/a$$

$$x_1 x_2 = c/a$$

קשרים:

$$a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 + bx + c$$

נתוח המיקרים:

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{שני פתרונות אם}$$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \text{פתרון אחד אם}$$

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \text{אין פתרון (ממשי)}$$

חזקות ושרשים:

$$a^m > a^n \quad \text{אם: } a > 1 \text{ ו- } m > n \text{ אז:}$$

$$a = b \quad \text{אם: } a > 0; b > 0 \text{ ו- } a^n = b^n \text{ אז:}$$

$$a^n = b \quad \text{אם: } a = \sqrt[n]{b}$$

$$a^{-n} = 1/a^n$$

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

לוגריטם:

אם: $ax=b$ אזי: $x=\log ab$

קשרים: $\log(a/b)=\log a-\log b$ $\log(a*b)=\log a+\log b$

מעבר מבסיס לבסיס: $\log cb / \log ca=\log ab$

פולינומים:

אם $P(x)$ הוא פולינום מדרגה m ומקיים: $P(r)=0$ אזי הוא מתחלק ב- $(x-r)$ ז"א שניתן לכתוב

$P(x)=(x-r)Q(x)$ והפולינום $Q(x)$ הוא מדרגה $m-1$

סדרה חשבונית: $a_1+a_2+\dots+a_n = n*(a_1+a_n)/2$

סדרה הנדסית: $a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1} = a(1-q^n)/(1-q)$

$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

הערך המוחלט:

הגדרה: אם $a > 0$ אז $|a|=a$

ואם $a < 0$ אז $|a|=-a$

לכן: $|a*b|=|a|*|b|$ וגם: $|a/b|=|a|/|b|$

אבל ערכו של: $|a \pm b|$ יכול להיות כל אחד מארבע האפשרויות:

$-a-b$ $a+b$ $a-b$ $-a+b$

אי שוויונות:

אם: $ax > b$

יש שתי אפשרויות לחלוקה ב- a :

אם $a > 0$ אז $x > b/a$

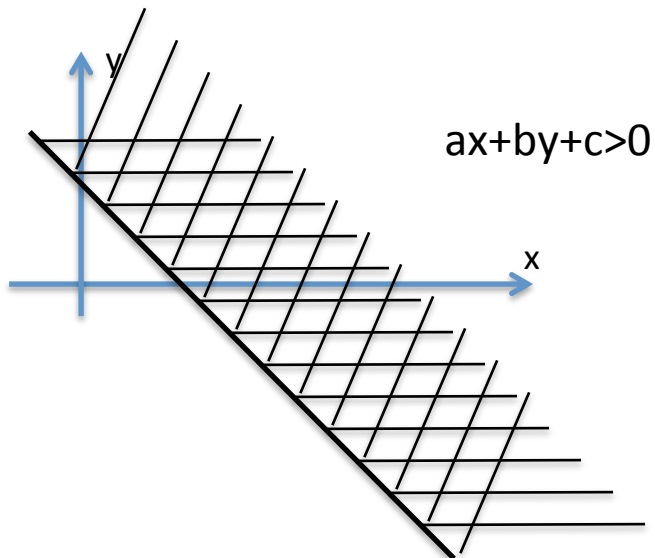
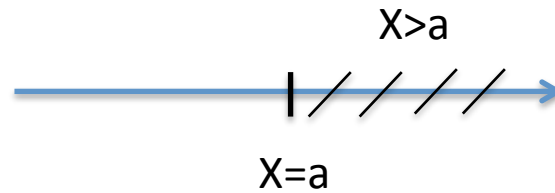
אם $a < 0$ אז $x < b/a$

אם $a > b$ או $b < a$

טרנזיטיביות: אם $a > b$ ו- $b > c$ אז: $a > c$

אם $a > b$ אז $a+x > b+x$

מבט גראפי על אי שוויונות: $x > a$



$$ax^2 + bx + c > 0$$

